

偏微分方程讲义

Starshine

July 14, 2026



基于 amznotes 模板制作

小红书

小红书号: 11609874930

前言

本笔记基于西安交通大学 23 级数试偏微分方程授课内容编写，以教材 F.J. 的《偏微分方程》为主线，并在一定程度上结合 evans 和姜礼尚的教材（但不超出授课内容）。

本笔记的基本思路是，在不超出授课内容的前提下对教材内容进行整理，使这本重点不甚明晰、排版不甚清楚的书更为可读以辅助知识理解与复习。因此，本笔记仅涵盖教材的第一、二、四、五、七章的授课范围内的内容，分别对应本笔记一、二、三、四、五章，不作为授课范围的知识将不在本笔记的考虑范围内。特别的，标 * 的内容为选讲内容，虽为授课内容但不在 23 级的应会范围内。具体的，前两章为一阶、二阶偏微分方程的局部解相关内容，后三章则讨论全局解。

本笔记仅作交流和学习用，任何人或实体不应当使用本笔记进行任何牟利行为。并且本笔记仅基于课本但与课本内容在相当程度上大相径庭，因此决不能代替课本。

本文档基于编者手稿使用 deepseek 的识图与逻辑补全功能编写，编者以排版与校对为主，故可能存在诸多疏漏，也欢迎读者斧正。

就我个人而言，我认为本科的偏微分方程授课仅仅只是讲解方程的求解、解的存在性、解的唯一性、解的正则性，也就只是对数学分析的应用。因此，PDE 本不应当成为一门很痛苦的课程，虽然我学的挺痛苦的。

Starshine
July 14, 2026

目录

前言	1
1 一阶方程及其特征线法^[1]	4
1.1 偏微分方程概述	4
1.2 一阶线性方程的数值解（有限差分法）*	13
1.3 拟线性方程	15
1.4 线性方程的柯西问题	17
1.5 二元函数的一阶方程	24
1.6 Cauchy 问题	28
2 二阶方程与双变量双曲方程	33
2.1 二阶方程的特征线	33
2.2 二阶线性方程	37
2.3 二阶方程的解及其性质	42
2.4 一维波动方程	46
2.5 分离变量法与 Sturm-Liouville 理论 ^[2]	54
2.6 一阶线性偏微分方程组 *	62
3 Laplace 方程	70
3.1 Green 恒等式	70
3.2 基本解	73
3.3 Cauchy 问题与 Poisson 公式	79
3.4 极值原理	87
3.5 Dirichlet 问题的求解与 Poisson 核公式	91
3.6 Perron 方法：一般区域 Dirichlet 问题解的存在性	103
3.7 极值原理的应用：最大模估计与能量模估计	112
4 高维双曲方程	118
4.1 球平均法	118
4.2 Hadamard 降维法与二维 Poisson 公式	133
4.3 Duhamel 原理与非齐次 Cauchy 问题	137

4.4	能量不等式与 Cauchy 问题解的唯一性	141
4.5	初边值问题（混合问题）	147
5	热方程与抛物型方程	154
5.1	Fourier 变换 ^[3]	154
5.2	热方程的初值问题	161
5.3	热方程的最大值原理与有界解的唯一性、正则性	174
5.4	一维热方程的混合问题	184
5.5	热方程初值问题非负解及初边值问题解的唯一性	193
5.6	一般二阶线性抛物型方程的初值问题 *	200
6	期末综合检测 *	206
	Index	211

一阶方程及其特征线法^[1]

1.1 偏微分方程概述

1.1.1 偏微分方程的基本概念

Definition 1.1.1 ▶ 偏微分方程 (P.D.E.)

形如

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

的等式称为偏微分方程，其中 F 是自变量 $x_1, \dots, x_n$ 、未知函数 u 及其有限个偏导数的已知函数。

- 若函数 $u(x_1, \dots, x_n)$ 代入上述方程后，在某个区域 Ω 上对自变量恒成立，则称 u 是该方程在 Ω 上的一个解。
- 偏微分方程的阶：方程中出现的未知函数的最高阶偏导数的阶数。

1.1.2 线性与拟线性方程

Definition 1.1.2 ▶ 线性与拟线性方程

如果方程关于未知函数 u 及其所有偏导数是线性的，且系数仅依赖于自变量，则称为线性偏微分方程。

如果方程关于未知函数的最高阶偏导数是线性的，但其系数可以依赖于未知函数及其低阶偏导数，则称为拟线性偏微分方程。

Example 1.1.3

- 线性 PDE:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

- 拟线性 PDE:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.1.3 数学物理方程举例

Example 1.1.4

1. Laplace 方程与调和函数

n 维 Laplace 算子定义为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

该算子在刚体变换（平移与旋转）下形式不变。方程

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_n x_n} = 0$$

称为 Laplace 方程，其解称为调和函数。

与之相关的是 Cauchy-Riemann 方程组

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

满足该方程组的 (u, v) 可构成复变函数 $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部与虚部，且 $f(z)$ 为解析函数。

2. 热传导方程

$$u_t = a \Delta u, \quad a > 0.$$

3. 波动方程

一维波动方程描述弦的振动。设弦的密度为 ρ ，张力为 T （常数），位移为 $u(x, t)$ ，则

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

4. Maxwell 方程组与电磁波

自由空间中的 Maxwell 方程组为

$$\varepsilon \vec{E}_t = \text{curl } \vec{H}, \quad \mu \vec{H}_t = -\text{curl } \vec{E}, \quad \text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0,$$

其中 ε 为介电常数, μ 为磁导率。由此可推出电磁波方程:

$$\vec{E}_{tt} = c^2 \Delta \vec{E}, \quad \vec{H}_{tt} = c^2 \Delta \vec{H}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

5. 弹性波方程

在弹性介质中, 位移向量 $\vec{u}$ 满足

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \vec{u}),$$

其中 λ, μ 为 Lamé 常数, ρ 为密度。

6. Schrödinger(薛定谔) 波方程

量子力学中的 Schrödinger 方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi,$$

其中 i 为虚数单位, $\hbar$ 为约化 Planck 常数, m 为粒子质量, V 为势函数。

7. 极小曲面方程

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为平面区域, 给定边界 $\partial\Omega$ 上的函数 φ , 在所有满足 $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ 的函数中, 若 u 为极小曲面, 则有 Euler-Lagrange 方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

亦作

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0.$$

8. Navier-Stokes 方程

不可压缩黏性流体的运动由 Navier-Stokes 方程描述:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

其中 $\vec{u}$ 为速度场, p 为压强, ρ 为密度, ν 为运动黏度。记 $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ 的分量形式为 $\sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 。方程常写为

$$\vec{u}_t - \nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Proposition 1.1.5 ▶ 热传导方程的物理推导

热传导方程（无内部热源）为

$$u_t = a\Delta u, \quad a > 0.$$

Proof. 由 Fourier 定律，热流密度 $\vec{q} = -k\nabla T$ ，即单位时间通过单位面积的热量与温度梯度成正比（ k 为热传导系数）。设区域 Ω 内温度分布为 $T(x, t)$ ，比热容为 C ，密度为 ρ 。在时间段 $[t_1, t_2]$ 内，通过边界 $\partial\Omega$ 流入的热量为

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} k\Delta T \, dV \, dt.$$

同时，该时间段内区域 Ω 中热量的增加量为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho C T_t \, dV \, dt.$$

二者相等，由区域和时间的任意性得

$$\rho C T_t = k\Delta T,$$

即

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C} \Delta T.$$

记 $a = k/(\rho C)$ ，即为热传导方程。 □

Proposition 1.1.6 ▶ 波动方程的物理推导

设弦的密度为 ρ ，张力为 T （常数），位移为 $u(x, t)$ ，则有

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Proof. 由动量定理，微元 $[x, x + \Delta x]$ 上动量变化率等于两端张力之差：

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho u_t(x, t) \, dx = T u_x(x + \Delta x, t) - T u_x(x, t).$$

利用微积分基本定理并将两边写成积分形式:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} \rho u_{tt}(x, t) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} T u_{xx}(x, t) dx dt.$$

由区间及时间段的任意性, 得到

$$\rho u_{tt} = T u_{xx},$$

即

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

□

Proposition 1.1.7 ▶ 使用 Maxwell 方程组推导电磁波方程

自由空间中的 Maxwell 方程组为

$$\varepsilon \vec{E}_t = \text{curl } \vec{H}, \quad \mu \vec{H}_t = -\text{curl } \vec{E}, \quad \text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0,$$

其中 ε 为介电常数, μ 为磁导率. 由向量恒等式

$$\text{curl curl } \vec{A} = \nabla \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

可推导电磁波方程

$$\vec{E}_{tt} = c^2 \Delta \vec{E}, \quad \vec{H}_{tt} = c^2 \Delta \vec{H}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

Proof. 对第一式求导并代入第二式:

$$\mu \varepsilon \vec{E}_{tt} = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E}_t) = \mu \frac{\partial}{\partial t}(\text{curl } \vec{H}) = \mu \text{curl } \vec{H}_t = -\text{curl curl } \vec{E} = -(\nabla \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E}) = \Delta \vec{E}.$$

同理,

$$\mu \varepsilon \vec{H}_{tt} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\text{curl } \vec{E}) = -\text{curl}(\varepsilon \vec{E}_t) = -\text{curl curl } \vec{H} = \Delta \vec{H}.$$

于是得到电磁波方程

$$\vec{E}_{tt} = c^2 \Delta \vec{E}, \quad \vec{H}_{tt} = c^2 \Delta \vec{H}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

□

Proposition 1.1.8 ▶ 极小曲面方程的几何推导

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为平面区域, 给定边界 $\partial\Omega$ 上的函数 φ , 在所有满足 $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ 的函数中, 寻求面积泛函

$$I(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx$$

的极小值。若 u 为极小曲面, 则有 Euler-Lagrange 方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

亦作

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0.$$

Proof. 若 u 为极小曲面, 则对任意满足 $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ 的试验函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 考虑单参数变分 $u + t\varphi$, 令

$$f(t) = I(u + t\varphi).$$

则有极值条件 $f'(0) = 0$. 从而需要计算 f 的导数:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla(u + t\varphi)|^2} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \sqrt{1 + |\nabla(u + t\varphi)|^2} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{1 + |\nabla(u + t\varphi)|^2}} \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla(u + t\varphi)|^2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{1 + |\nabla(u + t\varphi)|^2}} 2 \nabla(u + t\varphi) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\nabla(u + t\varphi) \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla(u + t\varphi)|^2}} \, dx. \end{aligned}$$

因此在 $t=0$ 时

$$0 = f'(0) = \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx.$$

利用分部积分公式（一维推广）

$$\int_{\Omega} f g_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f g \vec{n}_i dS - \int_{\Omega} f_{x_i} g dx,$$

并注意到 φ 在边界上为零，得到

$$0 = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \right] \varphi dx dy.$$

由 φ 的任意性即得 Euler-Lagrange 方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

展开后可写为

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0.$$

□

1.1.4 量纲分析与伸缩不变性

在偏微分方程的先验估计与不等式研究中，量纲分析提供了一种无需繁复计算即可快速锁定正确指标关系的方法论。其本质是将物理中的量纲思想形式化为一套数学操作规则：通过赋予空间变量和函数人为的“量纲”，要求在伸缩变换下不等式的每一项具有相同的量纲，从而将指标匹配问题转化为简单的线性代数方程。

Example 1.1.9 ▶ 量纲的赋予规则

我们并不需要真实的物理量纲，只需按如下约定形式化地设定：

- 空间变量 $x \in \mathbb{R}^n$ 的量纲为 $[x] = L$ （长度）。
- 函数 $u(x)$ 的量纲记为 $[u] = U$ ，其中 U 是基本量纲，取决于具体问题。

由此可自动派生其他相关量的量纲：

- 偏导数： $[\partial^\alpha u] = U \cdot L^{-|\alpha|}$ 。
- 积分： $\left[\int_{\mathbb{R}^n} \cdots dx \right] = [\cdots] \cdot L^n$ 。

- L^p 范数: $[\|u\|_{L^p}] = \left[\left(\int |u|^p dx \right)^{1/p} \right] = (U^p L^n)^{1/p} = U \cdot L^{n/p}$ 。
- Sobolev 范数: $[\|D^k u\|_{L^p}] = U \cdot L^{-k} \cdot L^{n/p} = U \cdot L^{n/p-k}$ 。
- 微分算子: $[\Delta u] = UL^{-2}$; 若赋予时间量纲 $[t] = T$, 则 $[\partial_t u] = UT^{-1}$ 。

Definition 1.1.10 ▶ 量纲的齐次性

任何有意义的齐次不等式, 其每一项必须具有完全相同的量纲。若两边量纲不等, 则可通过对函数作简单的伸缩变换使不等式一边趋于零而另一边保持非零, 从而导出矛盾。具体的伸缩变换检验有两种基本操作:

- 空间伸缩: $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, 则 $[u_\lambda] = U$, 但计算范数时因变量代换出现 λ 的幂次。
- 幅值伸缩: $u_\lambda(x) = \lambda u(x)$, 此时形式上的量纲放大了 λ 倍, 即 $[u_\lambda] = \lambda U$ 。

要求不等式在任意 $\lambda > 0$ 的伸缩下两端具有相同的 λ 幂次, 这等价于要求两端量纲相等。此即量纲的齐次性。

量纲分析最突出的威力在于, 无需冗长的证明, 仅凭量纲匹配就能直接读出 Sobolev、Gagliardo-Nirenberg、Hardy 等经典不等式中指标必须满足的代数关系。

Example 1.1.11 ▶ Sobolev 不等式

望形式: $\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$, 其中 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。

- 左端量纲: $U \cdot L^{n/q}$ 。
- 右端量纲: $U \cdot L^{-1} \cdot L^{n/p} = U \cdot L^{n/p-1}$ 。

量纲相等给出

$$\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - 1 \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

这正是著名的 Sobolev 共轭指标。若 q 不满足此关系, 不等式在伸缩变换下不可能一致成立。当 $p = n$ 时, 右端量纲为 UL^0 , 左端匹配需 $q = \infty$ 或出现指数型嵌入 (Trudinger-Moser 不等式), 这与量纲退化的直觉一致。

Example 1.1.12 ▶ Gagliardo-Nirenberg 插值不等式

式: $\|D^j u\|_{L^r} \leq C \|D^m u\|_{L^p}^\theta \|u\|_{L^q}^{1-\theta}$ 。

- 左端量纲: $U \cdot L^{n/r-j}$ 。
- 右端量纲: $(U \cdot L^{n/p-m})^\theta (U \cdot L^{n/q})^{1-\theta} = U \cdot L^{\theta(n/p-m)+(1-\theta)n/q}$ 。

量纲平衡得

$$\frac{n}{r} - j = \theta \left(\frac{n}{p} - m \right) + (1 - \theta) \frac{n}{q}.$$

该方程连同 $\theta \in [0, 1]$, 精确决定了插值指数 θ 和容许的 r , 是推导此不等式的必要条件。

Example 1.1.13 ▶ Hardy 不等式

考虑形式 $\| |x|^{-s} u \|_{L^p} \leq C \| |x|^{-t} \nabla u \|_{L^p}$ 。

- $|x|^{-s}$ 的量纲为 L^{-s} , 左端量纲为 $U \cdot L^{-s} \cdot L^{n/p}$ 。
- 右端 ∇u 量纲 UL^{-1} , 乘 $|x|^{-t}$ 后为 $U \cdot L^{-t-1} \cdot L^{n/p}$ 。

量纲相等给出 $s = t + 1$, 与 Hardy 不等式的最佳权指标完全吻合。

Proposition 1.1.14 ▶ 量纲的数学本质：伸缩对称性

量纲分析之所以有效, 是因为许多基础 PDE 和泛函不等式天然具有某种伸缩对称性。若方程本身在变换 $x \mapsto \lambda x$, $u \mapsto \lambda^\alpha u$ 下形式不变, 那么相应的先验估计必须与这一对称性相容。不等式的量纲齐次性, 正是这种对称性在范数层面的代数化体现。

因此, 量纲思想不仅是验证工具, 更是构造的指南:

- 面对新问题时, 先通过量纲分析猜出所有可能的临界指标和权函数形式。
- 利用典则的伸缩不变族测试不等式的尖锐程度, 构造最佳常数存在性的必要条件或反例。
- 在建立非线性估计时, 用量纲快速判断哪些项可被吸收、哪些项需用更强的范数控制。

量纲分析仅给出不等式成立的必要条件, 充分性仍需借助实分析工具(插值定理、紧性方法等)进行严格证明。当问题涉及多个特征尺度(如不同阶导数、不同权函数、有界域的几何尺度)时, 单一量纲可能不够, 需引入多尺度量纲分析或无量纲化。在非齐次不等式中, 可通过引入具有量纲的常数(如区域大小 R 、频率 N 等)恢复齐次性分析。

注: 我本身对 PDE 不那么感兴趣, 所以量纲相关内容理解的很不明白, 因此这部分内容实际上是 deepseek 为我整理的。但是这对本课程很重要, 并且根据笔者的学习体验来看很多同学对量纲思想都不理解。建议大家有时间有能力最好多问问老师或查找资料辅助理解。

1.2 一阶线性方程的数值解（有限差分法）*

Example 1.2.1 ▶ 一阶线性对流方程的一般解

设 $u = u(x, t)$, c 为正常数, 考虑一阶线性对流方程

$$u_t + cu_x = 0.$$

方程 $u_t + cu_x = 0$ 表示 u 沿特征线 $x - ct = \xi$ (ξ 为常数) 的方向导数为零, 故沿该直线 u 保持常值。因此通解可写为

$$u(x, t) = f(\xi) = f(x - ct), \quad u(x, 0) = f(x),$$

其中 f 为任意光滑函数。

Theorem 1.2.2 ▶ 一阶线性对流方程的两种迭代格式

对方程 $u_t + cu_x = 0$ 进行数值离散, 步长分别取 h (空间)、 k (时间)。令网格比 $\lambda = k/h$, 利用有限差分法可得两种迭代格式:

1. 顺风格式, 不稳定:

$$u(x, t + mk) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1 + c\lambda)^{m-j} (-c\lambda)^j u(x + jh, t).$$

2. 逆风格式, 稳定:

$$u(x, t + mk) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1 - c\lambda)^{m-j} (c\lambda)^j u(x - jh, t).$$

Proof. 对方程 $u_t + cu_x = 0$ 进行数值离散, 步长分别取 h (空间)、 k (时间)。令网格比 $\lambda = k/h$, 考虑两种差分格式:

1. 顺风格式:

$$\frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} + c \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} = 0.$$

整理得

$$u(x, t + k) = (1 + c\lambda) u(x, t) - c\lambda u(x + h, t).$$

引入位移算子 E : $E u(x, t) = u(x + h, t)$, 则

$$u(x, t + k) = ((1 + c\lambda)I - c\lambda E) u(x, t), \quad u(x, t + mk) = ((1 + c\lambda)I - c\lambda E)^m u(x, t).$$

将算子幂用二项式展开, 并利用 E 与 I 对易, 得到

$$\begin{aligned} u(x, t + mk) &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1 + c\lambda)^{m-j} (-c\lambda)^j E^j u(x, t) \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1 + c\lambda)^{m-j} (-c\lambda)^j u(x + jh, t). \end{aligned}$$

该格式虽然形式上是相容的, 但无法利用特征线 $x - ct = \text{const}$ 的信息, 且当初始值存在误差 ε 时, m 步后误差被放大为 $(1 + 2c\lambda)^m \varepsilon$, 因 $1 + 2c\lambda > 1$, 误差呈指数增长, 故不稳定, 不适合数值计算。

2. 逆风格式:

改用后差商逼近空间导数:

$$\frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} + c \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} = 0.$$

整理得

$$u(x, t + k) = (1 - c\lambda) u(x, t) + c\lambda u(x - h, t).$$

用位移算子的逆 $E^{-1}u(x, t) = u(x - h, t)$ 表示为

$$u(x, t + k) = ((1 - c\lambda)I + c\lambda E^{-1}) u(x, t).$$

迭代 m 步,

$$u(x, t + mk) = ((1 - c\lambda)I + c\lambda E^{-1})^m u(x, t) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1 - c\lambda)^{m-j} (c\lambda)^j u(x - jh, t).$$

该格式的支撑集自动依赖于点 $x, x - h, \dots, x - mh$, 与特征线 $x - ct = \text{const}$ 方向一致。若初值有误差 ε , 则 m 步后的误差为

$$\varepsilon \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (1 - c\lambda)^{m-j} (c\lambda)^j = ((1 - c\lambda) + c\lambda)^m \varepsilon = \varepsilon,$$

误差不随时间步数放大。则差分格式的极限解收敛到真解, 具有稳定性和收敛性。□

1.3 拟线性方程

Definition 1.3.1 ▶ 积分曲面

设 $u = u(x, y)$ 是未知函数，考虑一阶拟线性偏微分方程

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (1.1)$$

几何上，将解 u 看作 (x, y, z) 空间中的曲面 $z = u(x, y)$ ，称为积分曲面。

Definition 1.3.2 ▶ 特征方向，特征方程特征曲线

曲面 $z = u(x, y)$ 在点 $(x, y, u(x, y))$ 处的法向量为 $(u_x, u_y, -1)$ 。方程 (1.1) 可改写为

$$(a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0,$$

即向量场 $\vec{V} = (a, b, c)$ 与法向量处处垂直。因此 $\vec{V}$ 位于积分曲面的切平面中，称 $\vec{V}$ 的方向为特征方向。称下式为(1.1)的特征方程：

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{ds} = c(x, y, z). \quad (1.2)$$

特征方程的积分曲线称特征曲线。

Proposition 1.3.3

积分曲面在每一点处恰有一条特征曲线通过，积分曲面由特征曲线“编织”而成。

Proof. 由方程 (1.1) 可得

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)}.$$

引入参数 s ，使曲线 $(x(s), y(s), z(s))$ 的切向量恰为 $\vec{V}$ ，即

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{ds} = c(x, y, z). \quad (1.3)$$

若该曲线位于积分曲面 $z = u(x, y)$ 上，则必有

$$\frac{dz}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = a u_x + b u_y,$$

而由方程 (1.1) 知右端等于 c ，与 (1.3) 第三式自洽。常微分方程组 (1.3) 称为方程 (1.1) 的特征方程，其积分曲线称为特征曲线。 $\square$

Proposition 1.3.4

设 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 是积分曲面 $S : z = u(x, y)$ 上一点，过 P_0 的特征曲线（即方程组 (1.3) 的解）完全位于 S 上。

Proof. 记特征曲线为 $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ，满足 (1.3)，且初始值 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0 = u(x_0, y_0)$ 。定义函数

$$U(s) = z(s) - u(x(s), y(s)).$$

显然 $U(0) = 0$ 。对 s 求导并利用特征方程及 u 满足的偏微分方程，有

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= \frac{dz}{ds} - u_x \frac{dx}{ds} - u_y \frac{dy}{ds} \\ &= c(x, y, z) - u_x a(x, y, z) - u_y b(x, y, z). \end{aligned}$$

由于 $\gamma(s)$ 上的点满足 $z = z(s)$ ，而 u 及其偏导数在 $(x(s), y(s))$ 处取值。但方程 (1.1) 在积分曲面上处处成立，代入得

$$c(x, y, u(x, y)) = a(x, y, u(x, y))u_x + b(x, y, u(x, y))u_y.$$

故 $dU/ds = 0$ 。从而 $U(s) \equiv U(0) = 0$ ，即 $z(s) = u(x(s), y(s))$ 对一切 s 成立， γ 整个落在 S 上。 $\square$

Corollary 1.3.5

若两个积分曲面 S_1 与 S_2 有一公共点 P ，则它们必沿过 P 的整条特征曲线相交。

Corollary 1.3.6

若两个积分曲面 S_1 与 S_2 沿某条曲线 Γ 相交，则 Γ 必为特征曲线（或由特征曲线段组成）。

特征曲线方法的核心在于将求解一阶偏微分方程转化为求解常微分方程组，从而利用初始曲线构造积分曲面。

1.4 线性方程的柯西问题

1.4.1 柯西问题

偏微分方程理论关注的是从初始条件到解的映射算子的性质。对于一阶方程，柯西问题是指在给定初始曲线 Γ 上指定未知函数 u 的值，求方程满足该初始条件的解。

Definition 1.4.1 ▶ 拟线性方程的柯西问题

在 (x, y, z) 空间中，设初始曲线 Γ 由参数方程

$$\Gamma: x = f(s), y = g(s), z = h(s)$$

给出，要求寻找积分曲面 $z = u(x, y)$ ，使得

$$u(f(s), g(s)) = h(s), \quad \forall s.$$

这便是拟线性方程 $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$ 的柯西问题。

特别地，若取 $f(s) = s$, $g(s) = 0$, $h(s)$ 为任意函数，则 Γ 落在 xOy 平面上，问题退化为经典的初值问题：

$$u(x, 0) = h(x).$$

曲线的参数化方式不影响柯西问题的解。

1.4.2 拟线性方程柯西问题的解

Theorem 1.4.2 ▶ 拟线性方程柯西问题解的存在唯一性

设 $a, b, c \in C^1$ 在点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内， $f, g, h \in C^1$ 且

$$J = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

则拟线性方程 $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内存在唯一解 $u(x, y)$ ，满足初始条件

$$u(f(s), g(s)) = h(s).$$

Proof. 考虑拟线性方程

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u).$$

给定初始曲线

$$\Gamma: x = f(s), y = g(s), z = h(s),$$

其中 $f, g, h \in C^1$ 。设 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$ 为 Γ 上一点，并假设 a, b, c 在 P_0 的某个邻域内是 C^1 的。

求解方法（特征线法）：过 Γ 上每一点作特征曲线，其全体构成积分曲面。具体地，视 s 为参数，以 t 为特征曲线的参数，求解常微分方程组的初值问题：

$$\begin{cases} X_t = a(X, Y, Z), \\ Y_t = b(X, Y, Z), \\ Z_t = c(X, Y, Z), \end{cases} \quad \begin{cases} X(s, 0) = f(s), \\ Y(s, 0) = g(s), \\ Z(s, 0) = h(s). \end{cases}$$

由常微分方程解的存在唯一性定理，该初值问题存在唯一解 $X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)$ 。它们定义了 (s, t) 空间到 (x, y, z) 空间的映射：

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = Z(s, t),$$

这是一个以 s, t 为参数的曲面。

若能从此参数表示中反解出 $s = s(x, y), t = t(x, y)$ ，则

$$u(x, y) = Z(s(x, y), t(x, y))$$

即为所求的积分曲面。

可解性条件：由隐函数存在定理，从 $(x, y) = (X(s, t), Y(s, t))$ 反解出 (s, t) 的条件是在 $(s_0, 0)$ 处的 Jacobi 行列式非零：

$$J = \begin{vmatrix} X_s & Y_s \\ X_t & Y_t \end{vmatrix}_{(s_0, 0)} \neq 0.$$

注意到在 $t = 0$ 处， $X_s(s, 0) = f'(s)$ ， $Y_s(s, 0) = g'(s)$ ，而 $X_t(s, 0) = a(P_0)$ ， $Y_t(s, 0) = b(P_0)$ ，

故上述条件等价于

$$J = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

这给出了求解一阶拟线性方程的特征线法。

Corollary 1.4.3 ▶ 退化情形

若 $J = 0$, 即 $ag' - bf' = 0$, 则初始曲线 Γ 的切向量 (f', g', h') 可能与特征方向 (a, b, c) 成比例。此时沿 Γ 有

$$h' = f'u_x + g'u_y,$$

同时由方程本身有 $c = au_x + bu_y$ 。若 $(h', f', g') = \lambda(c, a, b)$, 则 Γ 本身就是一条特征曲线, 此时柯西问题要么有无穷多解, 要么无解 (视其他条件而定)。若 Γ 不是特征曲线但 $J = 0$, 则解不存在。

Corollary 1.4.4 ▶ 半线性方程情形

对于半线性方程

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u),$$

系数 a, b 仅依赖于 (x, y) 而不依赖于 u 。此时特征方程在 xOy 平面上的投影

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y)$$

构成一个自洽的二维系统, 与 z 无关。因此可先求解平面上的特征投影曲线, 再沿此曲线求解 $dz/dt = c(x, y, z)$ 。这使得求解过程大幅简化。

Corollary 1.4.5 ▶ 特征线法在 n 元一阶拟线性偏微分方程的推广

对于 n 个自变量的拟线性方程:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) u_{x_i} = c(x_1, \dots, x_n, u).$$

若 Jacobi 行列式在初始点非零, 则柯西问题局部存在唯一解。

Proof.

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) u_{x_i} = c(x_1, \dots, x_n, u).$$

其特征方程为

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, \dots, x_n, z), \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{dz}{dt} = c(x_1, \dots, x_n, z).$$

初始数据由 $n-1$ 个参数 $s_1, \dots, s_{n-1}$ 给出:

$$x_i = f_i(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

固定 $s_1, \dots, s_{n-1}$, 以 t 为自变量求解上述 ODE 组的初值问题, 得到

$$x_i = X_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t), \quad z = Z(s_1, \dots, s_{n-1}, t).$$

由隐函数存在定理, 能从 $(x_1, \dots, x_n)$ 反解出 $(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ 的条件是 Jacobi 行列式非零:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} & a_n \end{vmatrix}_{(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)} \neq 0.$$

若此条件在初始点成立, 则柯西问题局部存在唯一解。

□

1.4.3 应用举例

Example 1.4.6 ▶ 线性对流方程

讨论柯西问题

$$u_y + c u_x = 0, \quad u(x, 0) = h(x).$$

这里自变量为 (x, y) , 记 $z = u$ 。方程化为标准形式

$$a u_x + b u_y = c, \quad \text{其中 } a = c, \quad b = 1, \quad c = 0.$$

特征方程为

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

初始曲线 Γ 为

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s), \quad \text{在 } t = 0 \text{ 时.}$$

求解特征 ODE 得

$$x = ct + s, \quad y = t, \quad z = h(s).$$

Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故可反解出 $t = y, s = x - ct$ 。代入 z 的表达式得

$$u(x, y) = h(x - ct).$$

特别地, $u(x, t + T) = u(x - cT, t)$, 解在时空点上沿特征线平移。

Example 1.4.7 ▶ Euler 齐次偏微分方程

讨论柯西问题

$$\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} = \alpha u,$$

其中 α 为非零常数。

方程为拟线性形式, $a_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n$), $c = \alpha u$ 。特征方程为

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad \frac{dz}{dt} = \alpha z.$$

在 $t = 0$ 处给定初始条件:

$$x_i = s_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad x_n = 1, \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

求解 ODE 得

$$x_i = s_i e^t \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad x_n = e^t, \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}) e^{\alpha t}.$$

消去参数：由 $x_n = e^t$ 得 $t = \ln x_n$ ，且 $s_i = x_i/x_n$ 。代入 z 的表达式得

$$u(x_1, \dots, x_n) = h\left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) x_n^\alpha.$$

这是 Euler 齐次函数的一般形式。

关于原点处解的存在性：若考虑解在原点处的行为，可沿射线 $x_i = c_i t$ 检验。令

$$U(t) = u(c_1 t, \dots, c_n t),$$

则

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i u_{x_i} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n (c_i t) u_{x_i} = \frac{\alpha}{t} U(t).$$

解得 $U(t) = C t^\alpha$ 。当 $\alpha < 0$ 时， $t \rightarrow 0^+$ 导致 $U(t) \rightarrow \infty$ ，此时原方程在原点处不存在 C^1 解。

Example 1.4.8 ▶ 一维无粘 Burgers 方程

论柯西问题

$$u_y + u u_x = 0, \quad u(x, 0) = h(x).$$

此为拟线性方程， $a = u$ ， $b = 1$ ， $c = 0$ 。特征方程为

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

其中 $z = u$ 。初始条件（ $t = 0$ 时）：

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s).$$

求解得

$$y = t, \quad z = h(s), \quad x = t h(s) + s.$$

因此解由隐式方程

$$u = h(x - uy)$$

给出。

特征线的相交与解的破裂：在 xy 平面上，过 $(s, 0)$ 的特征线为直线

$$x = s + h(s)y,$$

沿此直线 $u \equiv h(s)$ 为常数。过不同初始点 $(s_1, 0)$ 与 $(s_2, 0)$ 的两条特征线分别为

$$x = s_1 + h(s_1)y, \quad x = s_2 + h(s_2)y.$$

若二者相交于某点 (x, y) , 则该点处的 y 满足

$$s_1 + h(s_1)y = s_2 + h(s_2)y \implies y = \frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)}.$$

当 $h(s_1) \neq h(s_2)$ 时, y 取正值, 对应两条特征线在某时刻相交。在该交点处 u 同时被赋予 $h(s_1)$ 与 $h(s_2)$ 两个不同的值, 解无法保持光滑, 产生激波 (间断)。

物理意义: 一维流体中运动速度不同的质点相遇, 导致解的梯度爆破。

1.5 二元函数的一阶方程

1.5.1 一般一阶方程的 Monge 锥

考虑二元函数的一般一阶偏微分方程

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad p = u_x, \quad q = u_y, \quad (1.4)$$

其中 F 对其五个变元具有连续的二阶偏导数。

Definition 1.5.1 ▶ Monge 锥

几何上, 将解 $z = u(x, y)$ 视为 (x, y, z) 空间中的曲面, 其法向量为 $(p, q, -1)$ 。方程 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 建立了曲面上点 (x, y, z) 与其法方向 $(p, q, -1)$ 之间的一个关系。在固定点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处, 所有可能的切平面

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

中的 (p, q) 必须满足 $F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$ 。这通常给出一个单参数的平面族, 其包络构成一个以 P_0 为顶点的锥面, 称为 **Monge 锥**。积分曲面 $z = u(x, y)$ 在每一点处必须与该点处的 Monge 锥相切。

对于拟线性方程 $au_x + bu_y = c$, 条件 $F = ap + bq - c = 0$ 关于 (p, q) 是线性的, 此时 Monge 锥退化为一条直线——恰为特征方向。

1.5.2 包络 (Envelope)

Definition 1.5.2 ▶ 包络 (Envelope)

设一族曲面 $\{S_\lambda\}$ 由方程 $S_\lambda : z = G(x, y, \lambda)$ 给出, 其中 λ 为参数。若一张曲面 Σ 与每个 S_λ 沿某条曲线相切, 则称 Σ 为该曲面族的包络。

Proposition 1.5.3 ▶ 包络的求法

包络曲面由联立方程

$$\begin{cases} z = G(x, y, \lambda), \\ G_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

消去 λ 得到, 且须满足可积条件 $dz = G_x dx + G_y dy$ 。

Proof. 设包络曲面由 $z = G(x, y, \lambda(x, y))$ 给出, 其中 $\lambda = \lambda(x, y)$ 待定。在该曲面上, 法向量为

$$(G_x + G_\lambda \lambda_x, G_y + G_\lambda \lambda_y, -1).$$

为使此曲面与曲面族中对应于常值 λ 的曲面在相应点处相切, 二者的法向量应平行, 这要求 $G_\lambda = 0$ 。因此包络曲面由联立方程

$$\begin{cases} z = G(x, y, \lambda), \\ G_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

消去 λ 得到, 且须满足可积条件 $dz = G_x dx + G_y dy$ 。

□

1.5.3 特征方程与特征带

回到方程 (1.4)。在一点 (x_0, y_0, z_0) 处, 切平面族

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0, \\ p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \end{cases}$$

为单参数族。取 p 为参数, 则 $q = q(p)$ 由 $F = 0$ 隐式确定。对包络条件关于 p 求导 (视 x, y, z 为包络上的点, p 为变化参数), 得

$$x - x_0 + q'(p)(y - y_0) = 0.$$

结合切平面方程, 这组关系可写为微分形式

$$\begin{cases} p dx + q dy = dz, \\ dx + \frac{\partial q}{\partial p} dy = 0. \end{cases}$$

另一方面, 由 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 对 p, q 的隐函数关系有

$$F_p + F_q \frac{\partial q}{\partial p} = 0 \implies \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{F_p}{F_q}.$$

代入上述第二式得

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q}.$$

令此比值为参数 dt , 即

$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q.$$

由第一式 $dz = p dx + q dy$ 得

$$\frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q.$$

现在求 p, q 沿此曲线的变化率。因为 $p = u_x(x(t), y(t))$, $q = u_y(x(t), y(t))$, 有

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= u_{xx} \frac{dx}{dt} + u_{xy} \frac{dy}{dt} = u_{xx}F_p + u_{xy}F_q, \\ \frac{dq}{dt} &= u_{yx} \frac{dx}{dt} + u_{yy} \frac{dy}{dt} = u_{yx}F_p + u_{yy}F_q. \end{aligned}$$

将原方程 $F(x, y, u, p, q) = 0$ 分别对 x 和 y 求偏导数:

$$\begin{aligned} F_x + F_u p + F_p u_{xx} + F_q u_{yx} &= 0, \\ F_y + F_u q + F_p u_{xy} + F_q u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

由此解出

$$u_{xx}F_p + u_{yx}F_q = -F_x - F_u p, \quad u_{xy}F_p + u_{yy}F_q = -F_y - F_u q.$$

因此

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - F_u p, \quad \frac{dq}{dt} = -F_y - F_u q.$$

Theorem 1.5.4 ▶ 方程 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 的特征方程

综上, 得到封闭的常微分方程组, 称为方程 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 的特征方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_p, \\ \frac{dy}{dt} = F_q, \\ \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{dt} = -F_x - F_u p, \\ \frac{dq}{dt} = -F_y - F_u q. \end{cases} \quad (1.5)$$

该 ODE 组的解 $(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ 称为特征带，其中空间曲线 $(x(t), y(t), z(t))$ 称为特征曲线。初始条件需满足

$$F(x(0), y(0), z(0), p(0), q(0)) = 0.$$

Corollary 1.5.5 ▶ 特征带的初值性质

可以验证，沿特征带 F 保持常值。事实上，

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} + F_p \dot{p} + F_q \dot{q} \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (p F_p + q F_q) + F_p (-F_x - F_u p) + F_q (-F_y - F_u q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

故若初始值满足 $F = 0$ ，则整个特征带上 $F \equiv 0$ 。

1.5.4 带与积分曲面

Definition 1.5.6 ▶ 带与积分曲面

一个单参数曲线族 $(x(s), y(s), z(s), p(s), q(s))$ 若满足

$$F(x(s), y(s), z(s), p(s), q(s)) = 0,$$

且 p, q 与曲面 $z = u(x, y)$ 相容（即 $p = u_x, q = u_y$ ），则称之为一个带。所有满足上述条件的特征带构成积分曲面。

- 积分曲面可视为由特征曲线编织而成。用参数 s, t 描述曲面时，得到双参数族

$$(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t)),$$

- 成为积分曲面的充要条件是满足可积条件（带条件）：

$$\frac{\partial z}{\partial s} = p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t}.$$

- 在求解 Cauchy 问题时，初值数据给出初始带，然后沿特征方向延伸特征带，最终构造出积分曲面。
- 若两积分曲面在一点处相切，则在该点所在的特征带上处处相切。

1.6 Cauchy 问题

1.6.1 初始带的存在唯一性

Proposition 1.6.1 ▶ 初始带的构造

设 Γ 为空间曲线

$$\Gamma : x = f(s), y = g(s), z = h(s), \quad s \in (-\delta, \delta),$$

其中 $f, g, h \in C^1$ 。在点 s_0 处, 若

$$J = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ F_p(P_0) & F_q(P_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

这里 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$, 则存在唯一的 C^1 函数 $\varphi(s), \psi(s)$ 定义在 s_0 附近, 满足带条件与方程条件

$$\begin{cases} h'(s) = \varphi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s), \\ F(f(s), g(s), h(s), \varphi(s), \psi(s)) = 0, \end{cases}$$

且 $\varphi(s_0) = p_0, \psi(s_0) = q_0$ 满足 $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ 。换言之, 在非特征曲线的假设下, 可唯一确定初始带。

Proof. 给定 s_0 , 先由方程 $F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$ 及带条件确定 (p_0, q_0) 的一组可能值 (因 $F = 0$ 通常有两个分支, 需根据实际问题选取)。然后考虑方程组

$$\begin{cases} G_1(s, \varphi, \psi) := \varphi f'(s) + \psi g'(s) - h'(s) = 0, \\ G_2(s, \varphi, \psi) := F(f(s), g(s), h(s), \varphi, \psi) = 0. \end{cases}$$

在 (s_0, φ_0, ψ_0) 处, Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(\varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ F_p & F_q \end{vmatrix}_{P_0} = J \neq 0.$$

由隐函数定理, 存在 s_0 的邻域及唯一的 C^1 函数 $\varphi(s), \psi(s)$ 使得该方程组恒成立, 且

$\varphi(s_0) = p_0, \psi(s_0) = q_0$ 。这就给出了初始带 $(f(s), g(s), h(s), \varphi(s), \psi(s))$ 。

□

1.6.2 Cauchy 问题的局部存在唯一性定理

Theorem 1.6.2 ▶ 完全非线性一阶方程 Cauchy 问题的局部解

设 $F(x, y, z, p, q)$ 在 $\mathbb{R}^5$ 中某区域上 C^2 光滑。给定空间曲线

$$\Gamma: x = f(s), y = g(s), z = h(s), \quad s \in (-\delta, \delta),$$

其中 $f, g, h \in C^2$ 。在点 s_0 处, 若

$$J = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ F_p(P_0) & F_q(P_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

且已选取 (p_0, q_0) 满足 $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ 和带条件 $h'(s_0) = p_0 f'(s_0) + q_0 g'(s_0)$, 则存在 (x_0, y_0) 的邻域 U 及唯一的 C^2 函数 $u(x, y)$, 使得

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in U,$$

且 $u(f(s), g(s)) = h(s)$ 对 s 在 s_0 附近成立。该解可由特征带构造给出。

Proof. 证明分为四步。

1. 构造初始带:

由前一命题, 在 s_0 附近存在唯一的 C^1 函数 $\varphi(s), \psi(s)$ 使

$$h'(s) = \varphi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s), \quad F(f(s), g(s), h(s), \varphi(s), \psi(s)) = 0.$$

由此得到初始带

$$s \mapsto (x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)) := (f(s), g(s), h(s), \varphi(s), \psi(s)).$$

2. 延拓为特征带:

以 t 为特征参数, 求解特征方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_p, & \frac{dy}{dt} = F_q, & \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{dt} = -F_x - F_z p, & \frac{dq}{dt} = -F_y - F_z q, \end{cases}$$

初始条件取为 $t = 0$ 时的初始带。由于 $F \in C^2$, 右端函数 Lipschitz, 故对每一 s 存在唯一解

$$(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t)),$$

且关于 (s, t) 是 C^1 的。当 $t = 0$ 时此即初始带。

3. 验证 $F \equiv 0$ 与可积条件:

首先, 沿特征带计算 $\frac{dF}{dt}$, 代入特征方程后得 $\frac{dF}{dt} = 0$ (已在第 6 节验证)。因 $t = 0$ 时 $F = 0$, 故对一切 (s, t) 有

$$F(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t)) = 0.$$

其次, 验证可积条件 $dz = p dx + q dy$ 。对 t 方向, 由特征方程直接有 $z_t = p x_t + q y_t$ 。对 s 方向, 定义 $A(s, t) = z_s - p x_s - q y_s$ 。在 $t = 0$ 处, 由初始带条件知 $A(s, 0) = 0$ 。计算 A_t 并利用特征方程与 $F \equiv 0$ 得

$$A_t = -F_z A, \quad A(s, 0) = 0,$$

从而 $A(s, t) \equiv 0$, 即 $z_s = p x_s + q y_s$ 恒成立。因此 $dz = p dx + q dy$ 对两个参数方向均成立。

4. 反解得到积分曲面:

由初始条件 $J \neq 0$ 及解对参数的光滑性, 映射 $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$ 在 $(s_0, 0)$ 附近的 Jacobi 行列式非零。根据隐函数定理, 存在局部 C^1 反函数 $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$ 。定义

$$u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y)).$$

由可积条件可得 $u_x = p, u_y = q$, 且 $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ 。当 (x, y) 沿 Γ 即 $t = 0$ 时, $u(f(s), g(s)) = z(s, 0) = h(s)$ 。因此 u 即为所求之解。

唯一性可由特征带的唯一性及反函数的唯一性得到 (若有两个解, 它们沿同一初始带出发的特征带必相同)。

□

1.6.3 高维情形

Proposition 1.6.3 ▶ 高维方程的特征带法

在 Jacobi 行列式非零的前提下, 特征方程可推广为

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = F_{p_i}, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -F_{x_i} - F_z p_i, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

从初始带 (由 $s_1, \dots, s_{n-1}$ 参数化) 出发, 求解该 ODE 组即可得到含 n 个参数的特征带, 进而通过反解参数获得积分曲面 $z = u(x_1, \dots, x_n)$ 。

Proof. 对于 n 个自变量的完全非线性一阶方程

$$F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad z = u, \quad p_i = u_{x_i},$$

其 Cauchy 问题的初始数据由 $n-1$ 个参数 $s_1, \dots, s_{n-1}$ 给出:

$$\Gamma: x_i = f_i(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

为了确定初始的 p_i , 需要利用带条件

$$\frac{\partial h}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial s_j}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

以及方程本身

$$F(f_1, \dots, f_n, h, p_1, \dots, p_n) = 0.$$

这 n 个方程联立可解出 $p_1, \dots, p_n$ 的初始值。其可解性由 Jacobi 行列式保证:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}} & F_{p_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}} & F_{p_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

Example 1.6.4 ▶ 程函方程

考虑方程

$$c^2(p^2 + q^2) = 1, \quad p = u_x, \quad q = u_y,$$

其中 c 为常数。给定初始曲线

$$\Gamma: x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s).$$

初始带条件为

$$\begin{cases} h'(s) = p f'(s) + q g'(s), \\ c^2(p^2 + q^2) = 1. \end{cases}$$

由此可解出 $p = \varphi(s)$, $q = \psi(s)$ 。可解条件为

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'(s) & g'(s) \\ 2c^2 p & 2c^2 q \end{vmatrix} \neq 0.$$

特征方程（这里 $F_p = 2c^2 p$, $F_q = 2c^2 q$, $F_x = F_y = F_z = 0$ ）为

$$\frac{dx}{dt} = 2c^2 p, \quad \frac{dy}{dt} = 2c^2 q, \quad \frac{dz}{dt} = 2c^2(p^2 + q^2) = 2, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

求解得

$$X(s, t) = 2c^2 \varphi(s) t + f(s),$$

$$Y(s, t) = 2c^2 \psi(s) t + g(s),$$

$$Z(s, t) = 2t + h(s),$$

$$p(s, t) = \varphi(s), \quad q(s, t) = \psi(s).$$

从 (X, Y) 反解出 $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$ 的条件是 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} f'(s) & g'(s) \\ 2c^2 \varphi(s) & 2c^2 \psi(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

在 $t = 0$ 处成立，这恰由初始可解条件保证。将反解出的 s, t 代入 $Z(s, t)$ 即得解 $u(x, y)$ 。

二阶方程与双变量双曲方程

2.1 二阶方程的特征线

注：因本节与本笔记中的 2.2 节衔接过于紧密，则编写时对章节顺序进行了调整，正常的授课顺序（同课本）为 2.1，2.3，2.2。

2.1.1 二阶拟线性方程的柯西问题

Definition 2.1.1 ▶ 二阶拟线性方程的柯西问题

$$\begin{cases} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d, & (a, b, c, d \text{ 依赖于 } x, y, u, u_x, u_y), \\ u(x, y) = h(s), u_x(x, y) = \phi(s), u_y(x, y) = \psi(s), & ((x, y) \in \gamma), \\ x = f(s), y = g(s), & ((x, y) \in \gamma). \end{cases}$$

对于上述 Cauchy 问题，称 h, ϕ, ψ 为 Cauchy 数据， γ 为初始曲线，Cauchy 数据满足相容性条件，本节中将初步探讨它的特征线。

(1) 相容性条件 (带条件)

Theorem 2.1.2

任意函数 $v(x, y)$ 及其一阶导数 $v_x(x, y), v_y(x, y)$ 沿曲线 $\gamma : (x, y) = (f(s), g(s))$ 的值都必须满足相容条件，即

$$\frac{d}{ds} v(f(s), g(s)) = v_x(f(s), g(s))f'(s) + v_y(f(s), g(s))g'(s).$$

Proof. 对 $v(x(s), y(s))$ 直接求导即可。

□

Corollary 2.1.3 ▶ Cauchy 数据的相容条件

$$h'(s) = \phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s).$$

在 γ 上给出 u 及其法向导数值亦可确定柯西数据:

$$u = h(s), \quad n = \frac{-u_x g' + u_y f'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} = \chi(s)$$

则

$$\frac{\psi f' - \phi g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} = \chi(s).$$

由于 f, g 已知, 则导数可求, 从而结合相容条件可求出 ψ, ϕ .

(2) 高阶导的构造

· 基本原理: 高阶导必须满足相容条件

设 $u(x, y)$ 为解, 根据一阶导的相容性:

$$\frac{d}{ds} u_x = u_{xx} f'(s) + u_{xy} g'(s),$$

从而当 $u(x, y)$ 为解时对应满足如下方程组:

$$\begin{cases} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \\ f'u_{xx} + g'u_{xy} = \phi' \\ f'u_{xy} + g'u_{yy} = \psi' \end{cases}$$

事实上, 由 a, b, c, d 由 x, y, u, u_x, u_y 决定, 则 a, b, c, d 在 x 上是由 s 决定的。从而这是一个关于 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 的方程组 (视 s 为参数), 当它解存在唯一时, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 解存在唯一。这当且仅当

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & \\ & f' & g' \end{vmatrix} = ag'^2 - 2bf'g' + cf'^2 \neq 0.$$

2.1.2 特征曲线

Definition 2.1.4 ▶ 特征曲线

若沿曲线 $\gamma(s) = (f(s), g(s))$ 有 $\Delta = ag'^2 - 2bf'g' + cf'^2 = 0$, 则称曲线 γ 关于方程 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ 是特征曲线。若 $\Delta \neq 0$, 则称 γ 为非特征曲线。

Proposition 2.1.5

沿非特征曲线, γ 上的柯西数据唯一地确定 u 在 γ 上的二阶导数。

Proof. 设 $u_x = \varphi(s), u_y = \psi(s)$, 对 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ 求 s 导数得:

$$au_{xxx} + 2bu_{xxy} + cu_{xyy} = d',$$

(a, b, c, d 由 $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, x, y$ 决定).

相容条件: $u_{xxx}f' + u_{xxy}g' = \varphi'$, $u_{xxy}f' + u_{xyy}g' = \psi'$

推导:

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & \\ & f' & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad \Delta \neq 0.$$

从而可解。类似地可求出 u 的 n 阶导数, 只需把导数阶 n 替换为 $n-1$, 合理性有数学归纳法保证。 □

Corollary 2.1.6

沿非特征曲线, Cauchy 数据唯一地给定 u 在 γ 上的任意阶导数。

Corollary 2.1.7

沿非特征曲线, Cauchy 数据唯一确定曲线 γ 上任一点 (x_0, y_0) 处解 u 的形式幂级数。事实上, 根据后续 Cauchy-Kowalevski 定理, 该级数就是一解。

Theorem 2.1.8 ▶ Cauchy-Kowalevski 定理

设二阶线性偏微分方程

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d,$$

其中系数 a, b, c 及右端项 d 在点 (x_0, y_0) 的邻域内解析。设 γ 是一条过 (x_0, y_0) 的曲线, 在该点处非特征 (即沿 γ 不能确定所有二阶导数)。若在 γ 上给定了 u 及其法向导数的解析初值, 则存在唯一的解析函数 $u(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近满足方程及初值条件。此时 u 在 (x_0, y_0) 处的 Taylor 级数由初值与方程唯一确定, 并且该级数收敛到真解。

Proof. 由于 a, b, c, d 均为解析函数, 它们在 (x_0, y_0) 附近可展成收敛的幂级数。设解 u 的形式 Taylor 级数为

$$u(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k} u}{\partial x^j \partial y^k} (x_0, y_0) (x - x_0)^j (y - y_0)^k.$$

将 u 的级数代入方程左端

$$F = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} - d,$$

并按 $(x - x_0)$ 与 $(y - y_0)$ 的幂次合并同类项。由于 γ 在 (x_0, y_0) 非特征, 由初值条件以及方程可以逐次递推地唯一解出 u 的所有偏导数 $\frac{\partial^{j+k} u}{\partial x^j \partial y^k} (x_0, y_0)$, 使得 F 展开式的各项系数全为零, 即 $F \equiv 0$ 。

这个构造过程给出了一组形式幂级数系数, 其满足方程 (相容条件)。由 Cauchy-Kowalevski 定理的收敛性部分, 该形式级数在 (x_0, y_0) 的某邻域内收敛, 从而定义了真正的解析解 u 。□

Proposition 2.1.9 ▶ 特征线的相容条件

特征线 $\gamma(s)$ 需要满足相容条件

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Proof. 当 $\Delta = 0$ 即 $ag'^2 - 2bf'g' + cf'^2 = 0$ 化为 $a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$ 。

从而 $a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0$, 进而有 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ 。□

Corollary 2.1.10

特征线 γ 由隐式 $\Phi(x, y) = C$ (C 为常数) 给出, 则 $a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = 0$ 。

Proof. $\Phi_x dx + \Phi_y dy = d\Phi = dC = 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$, 代入即得证。□

2.2 二阶线性方程

2.2.1 二阶线性方程的分类

Definition 2.2.1 ▶ 二阶线性方程的分类

对于二阶线性方程

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d, \quad (a, b, c \text{ 为 } x, y \text{ 的函数})$$

它的特征线方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

- 若 $b^2 < ac$, 则称椭圆型 (elliptic): 无实解, 即无特征线。
- 若 $b^2 = ac$, 则称抛物型 (parabolic): 特征方程为 1 种, 特征线数目的 1。
- 若 $b^2 > ac$, 则称双曲型 (hyperbolic): 特征方程为 2 种, 特征线数目为 2。

2.2.2 二阶线性方程的变量替换

本部分讨论一般的二阶方程

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + 2d(x, y)u_x + 2e(x, y)u_y + f(x, y)u = 0.$$

· 变量替换的目的: 化简方程, 即通过新的变量替换后消去 Δx 或者 $u_{\xi\xi}$ 等项, 或者使得 L 化为简单形式方程。

记 $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y), \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| \neq 0$ 。用 ξ, η 替换 x, y :

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y.$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\xi\xi} \xi_{xx} + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\eta\xi} \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_y \xi_x + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_y + u_{\xi\xi} \xi_{xy} + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_{\eta\xi} \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\xi\xi} \xi_{yy} + u_{\eta\xi} \eta_y \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_{\eta\xi} \eta_{yy}$$

将上述代入原方程, 化为:

$$A(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + 2D(\xi, \eta)u_\xi + 2E(\xi, \eta)u_\eta + F(\xi, \eta)u = 0.$$

其中:

$$A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \quad B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \quad C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2.$$

$$\text{现记 } Lu = Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + 2Du_{\xi} + 2Eu_{\eta} + Fu = 0.$$

(1) 对双曲型方程的变量替换与化简

· 化简目标: 化成 $A=C=0$ 的形式, 然后化为波动方程.

Proposition 2.2.2

若 ξ, η 中满足 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ 的两组 $\xi(x, y), \eta(x, y)$ 满足 $\Delta \neq 0$, 则原方程特征线 $\Phi(x, y) = C_1, \Psi(x, y) = C_2$, 新方程特征线 $\xi = C_1, \eta = C_2$. (C_1, C_2, C'_1, C'_2 为常数, 但任意).

Proof. 若 ξ, η 中满足 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ 的两组 $\xi(x, y), \eta(x, y)$ 满足 $\Delta \neq 0$, 则 $A = C = 0$. 其中 $\xi = \Phi(x, y), \eta = \Psi(x, y)$.

对该特征方程求解: $u_{\xi} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} u_{\eta}$, 则

$$u(x, y) = F\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}x + y\right),$$

其中 F 为连续函数. 为使 $\Delta \neq 0$, 则将 ξ, η 分别取为

$$F\left(\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}x + y\right) \text{ 和 } F\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}x + y\right),$$

得到 $u(x, y) = \Phi(x, y), \Psi(x, y)$.

令新坐标, 最终有 $A = C = 0, B \neq 0$, 组合 $D' = \frac{D}{B}, E' = \frac{E}{B}, F' = \frac{F}{B}$, 则

$$u_{\xi\eta} + 2D'u_{\xi} + 2E'u_{\eta} + F'u = 0.$$

令 ξ, η 特征线为特征方程两条解, 得到

$$u_{\xi\eta} + 2D'u_{\xi} + 2E'u_{\eta} + F'u = 0,$$

新方程的特征方程为 $\lambda = 0$.

□

Corollary 2.2.3 ▶ 进一步可化简为含阻尼的波动方程

对于已化为第一标准型的双曲方程

$$u_{\xi\eta} + 2D'u_{\xi} + 2E'u_{\eta} + F'u = 0,$$

可以进一步作变量代换, 将其化为含阻尼的波动方程。令

$$\xi' = \xi + \eta, \quad \eta' = \xi - \eta,$$

则其逆变换为 $\xi = \frac{1}{2}(\xi' + \eta')$, $\eta = \frac{1}{2}(\xi' - \eta')$ 。此时偏导数算符满足

$$\partial_{\xi} = \partial_{\xi'} + \partial_{\eta'}, \quad \partial_{\eta} = \partial_{\xi'} - \partial_{\eta'}.$$

计算混合导数:

$$u_{\xi\eta} = (\partial_{\xi'} + \partial_{\eta'})(\partial_{\xi'} - \partial_{\eta'})u = u_{\xi'\xi'} - u_{\eta'\eta'}.$$

将上式代入原方程并归并同类项, 得到

$$u_{\xi'\xi'} - u_{\eta'\eta'} + 2(D' + E')u_{\xi'} + 2(D' - E')u_{\eta'} + F'u = 0,$$

或者写成更标准的波动方程形式

$$u_{\eta'\eta'} - u_{\xi'\xi'} - 2(D' + E')u_{\xi'} - 2(D' - E')u_{\eta'} - F'u = 0.$$

该方程因含有 $u_{\xi'}, u_{\eta'}$ 等一阶项, 被称为含阻尼的波动方程。

Example 2.2.4 ▶ 混合型方程示例: Tricomi 方程

研究 Tricomi 方程

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0.$$

此处系数为 $a = -y$, $b = 0$, $c = 1$, 判别式 $\Delta = b^2 - ac = y$ 。

- 当 $y > 0$ 时, $\Delta > 0$, 方程为双曲型;
- 当 $y = 0$ 时, $\Delta = 0$, 方程为抛物型;
- 当 $y < 0$ 时, $\Delta < 0$, 方程为椭圆型。

在双曲区域 $y > 0$, 特征方向为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\pm \sqrt{y}}{-y} = \mp \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

这等价于 $dx \pm \sqrt{y} dy = 0$ 。积分可得两族特征线:

$$3x \pm 2y^{3/2} = \text{常数}.$$

引入特征坐标

$$\xi = 3x + 2y^{3/2}, \quad \eta = 3x - 2y^{3/2},$$

经过直接计算 (求导、代入并整理), Tricomi 方程在 $y > 0$ 时化为第一标准型:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0.$$

这是研究跨音速流动的重要方程, 在 $\xi = \eta$ (即 $y = 0$) 处发生类型退化。

(2) 对椭圆型方程的变量替换与化简

· 化简目标: 化为 Laplace 算子加低阶项的形式 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = 0$ 。

Proposition 2.2.5 ▶ 椭圆型方程的化简

设二阶线性方程

$$Lu \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0$$

在区域内满足 $b^2 < ac$ (严格椭圆型)。则必存在非奇异的实变量代换 $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$, 使得方程化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2D'u_{\xi} + 2E'u_{\eta} + F'u = 0.$$

Proof. 经变量代换后, 二阶项系数为

$$A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = (\nabla\xi)^T M(\nabla\xi),$$

$$B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y = (\nabla\xi)^T M(\nabla\eta),$$

$$C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = (\nabla\eta)^T M(\nabla\eta),$$

其中 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, 且在椭圆型条件下 M 对称正定。

我们希望 $A = C > 0$ 且 $B = 0$ 。构造变换满足如下 Beltrami 型方程组:

$$\begin{cases} a\xi_x + b\xi_y = W\eta_y, \\ b\xi_x + c\xi_y = -W\eta_x, \end{cases} \quad W := \sqrt{ac - b^2} > 0. \quad (2.1)$$

下面验证: 若 (2.1) 成立, 则目标达成。将方程组写为矩阵形式

$$M \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \eta_y \\ -\eta_x \end{pmatrix}.$$

两边左乘 $(\nabla\eta)^T M^{-1}$, 注意 $M^{-1} = \frac{1}{W^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$, 可得

$$(\nabla\eta)^T \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{W} (\nabla\eta)^T \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_y \\ -\eta_x \end{pmatrix} = 0.$$

而 $B = (\nabla\xi)^T M (\nabla\eta) = W(\eta_y, -\eta_x)(\nabla\eta) = 0$ 。再计算 C :

$$C = (\nabla\eta)^T M (\nabla\eta) = \frac{1}{W^2} (a\xi_x + b\xi_y, b\xi_x + c\xi_y) M \begin{pmatrix} a\xi_x + b\xi_y \\ b\xi_x + c\xi_y \end{pmatrix} = (\nabla\xi)^T M (\nabla\xi) = A.$$

故只要找到满足 (2.1) 且 Jacobi 行列式非零的 ξ, η , 即完成化简。将 (2.1) 中的 η 消去, 可得 ξ 满足的二阶椭圆型方程, 由椭圆方程理论知其局部解存在且可保证 Jacobi 非零。 □

从证明中可以看出, 变换函数 ξ, η 本质上相当于将度量矩阵 M 共形化为单位阵的坐标, 其存在性由曲面上的等温坐标理论保证。一阶 Beltrami 方程组 (2.1) 是 Cauchy-Riemann 方程在一般度量下的推广。

2.3 二阶方程的解及其性质

本节除解的定义外，主要讨论二阶线性方程

$$Lu \equiv au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0$$

其中 a, b, c, d, e, f 均为 x, y 的函数。

2.3.1 广义解的概念

对于线性方程，可以在较弱的意义下定义解，即允许解在某些曲线上导数发生跳跃，但仍能满足方程。

Definition 2.3.1 ▶ 分片 C^2 解与广义解

设 xOy 平面上的区域被一光滑曲线 Γ 分为 Ω_1, Ω_2 两部分。若存在函数 $U(x, y)$ 满足：

$$U = \begin{cases} u^1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u^2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad u^1 \in C^2(\Omega_1), u^2 \in C^2(\Omega_2), U \in C^1(\overline{\Omega}_1 \cup \Gamma) \cap C^1(\overline{\Omega}_2 \cup \Gamma)$$

U 在 Γ 上直到一阶导数连续，则称 U 在除去 Γ 的区域上是原方程的分片 C^2 解。

若 u^1, u^2 在各自区域上满足原方程，且 U 在 Γ 上仅具有 C^1 连续性，则称 U 为方程的广义解。

2.3.2 解的跳跃条件

考虑在曲线 Γ 上发生间断的解。设 Γ 由方程 $x = \varphi(y)$ 给出。

Definition 2.3.2 ▶ 跳跃量

设 u^1, u^2 在 Γ 两侧，定义以下跳跃量（方括号表示物理量在 Γ 上从一侧到另一侧的跃度）：

$$\begin{aligned} [u] &\equiv u^1(\varphi(y), y) - u^2(\varphi(y), y), \\ [u_x] &\equiv u_x^1(\varphi(y), y) - u_x^2(\varphi(y), y), \\ [u_y] &\equiv u_y^1(\varphi(y), y) - u_y^2(\varphi(y), y). \end{aligned}$$

$[u]$ 称为解的跳跃， $[u_x], [u_y]$ 称为解的一阶导数的跳跃。

Proposition 2.3.3 ▶ 跳跃量沿曲线的导数关系

沿曲线 $\Gamma: x = \varphi(y)$, 解的跳跃 $[u]$ 与其导数跳跃存在如下相容关系:

$$\frac{d}{dy}[u] = [u_x]\varphi'(y) + [u_y].$$

Proof. 由跳跃的定义直接对 y 求全导数:

$$\frac{d}{dy}[u] = \frac{d}{dy}(u^1(\varphi(y), y) - u^2(\varphi(y), y)) = (u_x^1 - u_x^2)\varphi'(y) + (u_y^1 - u_y^2) = [u_x]\varphi'(y) + [u_y].$$

此即所求。 □

现在我们讨论二阶导数跳跃与特征线的关系。这是偏微分方程理论中极为重要的结论: 弱间断 (一阶导数发生跳跃) 只能沿特征线传播; 二阶导数的间断量 (奇性) 一旦产生, 就会沿整条特征线传播下去, 不会在中间某点突然终止。

Theorem 2.3.4 ▶ 弱间断沿特征线传播定理

设 u 为方程 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ 的分片 C^2 解 (a, b, c 仅依赖于 x, y), 即除曲线 $\Gamma: x = \varphi(y)$ 外具有连续二阶导数, 而在 Γ 上仅具有 C^1 连续性 (即 $[u] = 0, [u_x] = 0, [u_y] = 0$), 但允许二阶导数发生跳跃。则 Γ 必为特征曲线。

Proof. 由于解在 Γ 上连续且一阶导数连续, 我们有

$$[u] = 0, \quad [u_x] = 0, \quad [u_y] = 0.$$

对 $[u] = 0$ 沿 Γ 求方向导数, 可得 $[u_x]\varphi'(y) + [u_y] = 0$, 这是一阶跳跃为零的直接推论。

现考虑二阶导数的跳跃。对 $[u_x] = 0$ 和 $[u_y] = 0$ 沿 Γ 求方向导数:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}[u_x] &= [u_{xx}]\varphi'(y) + [u_{xy}] = 0, \\ \frac{d}{dy}[u_y] &= [u_{xy}]\varphi'(y) + [u_{yy}] = 0. \end{aligned}$$

由此可得二阶跳跃量之间的关系:

$$[u_{xy}] = -[u_{xx}]\varphi'(y), \quad [u_{yy}] = -[u_{xy}]\varphi'(y) = [u_{xx}](\varphi'(y))^2.$$

另一方面, 原方程 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ 两侧在 Γ 上取跳跃 (注意 a, b, c, d 是连续的, 跳跃为零):

$$a[u_{xx}] + 2b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0.$$

将二阶跳跃关系代入上式:

$$a[u_{xx}] + 2b(-[u_{xx}]\varphi'(y)) + c([u_{xx}](\varphi'(y))^2) = 0.$$

由于至少有一个二阶导数发生跳跃 (否则为古典解), 故 $[u_{xx}] \neq 0$, 从而得到

$$a - 2b\varphi'(y) + c(\varphi'(y))^2 = 0.$$

注意到 $\varphi'(y) = \frac{dx}{dy}$, 上式两端乘以 $(dy)^2$ 即得特征线方程

$$a(dx)^2 - 2b dx dy + c(dy)^2 = 0.$$

这表明 Γ 必为原方程的特征曲线。 □

由于在两区域中都有

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & \\ & f' & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix},$$

则一阶导唯一确定时若 Γ 不为特征线则二阶导唯一确定, 为使 u 不是一节连续可导的, 只能让它在 Γ 上有 $\Delta = 0$, 即 Γ 为特征线.

Theorem 2.3.5 ▶ 奇性沿特征线传播定理

设 u 是初始数据 Γ 的 $Lu = 0$ 的分片 C^3 广义解, 若初始数据曲线上有一点处跳跃量为 0, 则在 Γ 上跳跃量恒为 0.

(思路: 找关于 $\lambda = [u_{xx}]$ 的常微分方程组, 由方程组解的存在唯一性进行证明.)

Proof. 记 $\lambda = [u_{xx}]$, 则

$$\frac{d\lambda}{dy} = [u_{xxx}]\varphi'(y) + [u_{xxy}].$$

又 $[u_x] = 0$, 则

$$[u_{xx}]\varphi'(y) + [u_{xy}] = 0,$$

即 $[u_{xy}] = -\lambda\varphi'(y)$. 从而再对 $[u_{xy}]$ 求导有

$$[u_{xxy}]\varphi'(y) + [u_{xyy}] = \frac{d}{dy}(-\lambda\varphi'(y)) = -\frac{d\lambda}{dy}\varphi'(y) - \lambda\varphi''(y).$$

将原方程 $Lu = 0$ 对 x 求导有

$$au_{xxx} + 2bu_{xxy} + cu_{xyy} + (a_x + 2d)u_{xx} + (2b_x + 2e)u_{xy} + c_x u_{yy} + (2d_x + f)u_x + 2e_x u_y + f_x u = 0.$$

分别取 u 为 u^1, u^2 并作差有

$$a[u_{xxx}] + 2b[u_{xxy}] + c[u_{xyy}] + (a_x + 2d)[u_{xx}] + (2b_x + 2e)[u_{xy}] + c_x[u_{yy}] = 0.$$

将 $[u_{xx}] = \lambda, [u_{xy}] = -\lambda\varphi'(y), [u_{yy}] = \lambda(\varphi'(y))^2$ 代入上式有

$$a[u_{xxx}] + 2b[u_{xxy}] + c[u_{xyy}] + (a_x + 2d)\lambda + (2b_x + 2e)(-\lambda\varphi'(y)) + c_x\lambda(\varphi'(y))^2 = 0.$$

由此产生了常微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dy} = [u_{xxy}]\varphi'(y) + [u_{xxy}], \\ [u_{xxy}]\varphi'(y) + [u_{xyy}] = -\frac{d\lambda}{dy}\varphi'(y) - \lambda\varphi''(y), \\ a[u_{xxx}] + 2b[u_{xxy}] + c[u_{xyy}] + (a_x + 2d)\lambda - (2b_x + 2e)\lambda\varphi'(y) + c_x\lambda(\varphi'(y))^2 = 0. \end{cases}.$$

消去 $[u_{xxy}], [u_{xyy}]$ 得以 $[u_{xxx}]$ 为参数关于 λ 的常微分方程:

$$\begin{aligned} (2b - 2c\varphi'(y))\frac{d\lambda}{dy} + ((a_x + 2d) - (2b_x + 2e)\varphi'(y) + c_x(\varphi'(y))^2 - c\varphi''(y))\lambda \\ + (a - 2b\varphi'(y) + c(\varphi'(y))^2)[u_{xxx}] = 0. \end{aligned}$$

而 $a - 2b\varphi'(y) + c(\varphi'(y))^2 = 0$, 从而

$$(2b - 2c\varphi'(y))\frac{d\lambda}{dy} + ((a_x + 2d) - (2b_x + 2e)\varphi'(y) + c_x(\varphi'(y))^2 - c\varphi''(y))\lambda = 0.$$

这是 $A\lambda'(y) + B\lambda(y) = 0$ 的形式, 由题设知有一点为 0, 则它有一解为 $\lambda(y) = 0$, 再由常微分方程的初值问题解的存在唯一性知解唯一为 $\lambda(y) = 0$. 又 $[u_{xx}] = \lambda, [u_{xy}] = -\lambda\varphi'(y), [u_{yy}] = \lambda(\varphi'(y))^2$, 则 $[u_{xx}] = [u_{xy}] = [u_{yy}] = 0$. 从而 u 是 C^2 的. $\square$

2.4 一维波动方程

考虑一维波动方程的初值问题 (Cauchy 问题):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $c > 0$ 为波速, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ 为初始位移, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ 为初始速度。

2.4.1 D'Alembert 公式

Theorem 2.4.1 ▶ D'Alembert 公式

设 $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$, 则初值问题 (2.2) 的唯一 C^2 解由如下 D'Alembert 公式给出:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Proof. 第一步: 特征化与通解。方程 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 的特征方程为 $(dx)^2 - c^2(dt)^2 = 0$, 特征线为 $x \pm ct = \text{常数}$ 。引入特征坐标

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

在此坐标下, 算符分解为

$$\partial_t + c\partial_x = 2c\partial_\xi, \quad \partial_t - c\partial_x = -2c\partial_\eta,$$

故原方程化为

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

依次积分: 由 $u_{\xi\eta} = 0$ 知 u_ξ 与 η 无关, 设 $u_\xi = f(\xi)$, 再积分得通解

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

其中 F, G 为任意 C^2 函数。代回原变量:

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \quad (2.4)$$

第二步：利用初始条件确定 F, G 。由初始条件：

$$\begin{cases} u(x, 0) = F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

对第二式积分，得

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(s) ds + C,$$

其中 x_0 为任意固定点， C 为积分常数。与第一式联立解得

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(s) ds + \frac{C}{2},$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(s) ds - \frac{C}{2}.$$

第三步：代回通解。将 F, G 代入 (2.4)：

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[\frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{C}{2} \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} \psi(s) ds - \frac{C}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

常数 C 消去，积分限合并即得 D'Alembert 公式 (2.3)。 □

Corollary 2.4.2

设 $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ ，则 $u(x, t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ 必为波动方程 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 的 C^2 解。此时初始条件自动给出

$$\varphi(x) = F(x) + G(x), \quad \psi(x) = cF'(x) - cG'(x).$$

反之，若 u 是初值问题 (2.2) 的 C^2 解，则 u 必可表为上述行波叠加形式，且 F, G 由 φ, ψ 通过 D'Alembert 公式唯一确定。

Corollary 2.4.3 ▶ 行波结构

任一 C^2 解 $u(x, t)$ 可分解为左行波 $F(x + ct)$ 与右行波 $G(x - ct)$ 。令 $v(x, t) = F(x + ct)$, $w(x, t) = G(x - ct)$, 则有

$$(\partial_t + c\partial_x)v = 0, \quad (\partial_t - c\partial_x)w = 0,$$

即 v 沿特征方向 $\frac{dx}{dt} = -c$ 为常数, w 沿特征方向 $\frac{dx}{dt} = c$ 为常数。波动算子可分解为

$$\partial_{tt} - c^2\partial_{xx} = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x).$$

因此, 波动方程的求解等价于求解两个一阶单向波方程的叠加。

Example 2.4.4 ▶ 紧支集初值的渐近行为

问题: 设 $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ 具有紧支集, 即存在 $R > 0$ 使得当 $|x| > R$ 时 $f(x) = g(x) = 0$ 。利用 D'Alembert 公式证明:

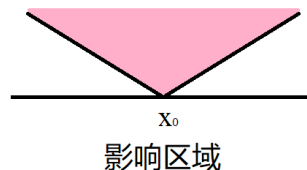
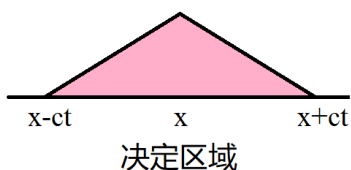
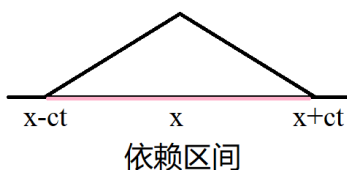
1. 对任意固定的 x , 当 t 充分大时, 有 $u(x, t) = 0$ 。
2. 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 0$, 则对任意 A, B , 极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_A^B u(x, t) dx = 0$ 成立。

Proof. 由 D'Alembert 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi.$$

取 t 充分大, 使得 $x - ct < -R$ 且 $x + ct > R$ 。此时 $f(x \pm ct) = 0$, 且积分区间 $[x - ct, x + ct]$ 覆盖了整个紧支集 $[-R, R]$ 。由于 g 在 $[-R, R]$ 外为 0, 积分值等于全空间积分 $\int_{\mathbb{R}} g = 0$ 。故 $u(x, t) = 0$ 。

由上述推导可知, 当 t 足够大时, 在任意有限区间 $[A, B]$ 上的每一点 x , 均有 $u(x, t) = 0$, 故积分为 0。若条件 $\int g = 0$ 不满足, 则 $u(x, t)$ 在大 t 时趋于一个非零常数波形, 积分一般非零。□

2.4.2 依赖区间, 决定区域, 影响区域

Definition 2.4.5 ▶ 依赖区间

在点 (x_0, t_0) 处解的值 $u(x_0, t_0)$ 由 D'Alembert 公式给出, 它仅依赖于初始数据在区间

$$[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$$

上的值。该区间称为点 (x_0, t_0) 的依赖区间。

Definition 2.4.6 ▶ 决定区域

设初始时刻 $t = 0$ 时, 数据 φ, ψ 给定在区间 $[x_1, x_2]$ 上。过点 $(x_1, 0)$ 作斜率为 $1/c$ 的特征线 $x - ct = x_1$, 过点 $(x_2, 0)$ 作斜率为 $-1/c$ 的特征线 $x + ct = x_2$ 。这两条特征线与线段 $[x_1, x_2]$ 在 $t \geq 0$ 半平面上围成一个等腰三角形区域 (如图)。该区域内任意一点 (x, t) 的依赖区间均包含于 $[x_1, x_2]$, 故解在此三角形内完全由 $[x_1, x_2]$ 上的初值决定, 称为区间 $[x_1, x_2]$ 的决定区域。

Definition 2.4.7 ▶ 影响区域

对于初始轴上的一个点 $(x_0, 0)$, 过该点分别作斜率为 $1/c$ 和 $-1/c$ 的两条特征线:

$$x - ct = x_0 \quad (\text{右行特征线}), \quad x + ct = x_0 \quad (\text{左行特征线}).$$

这两条射线在 $t > 0$ 半平面上夹成一个角状区域, 称为点 $(x_0, 0)$ 的影响区域。该区域内的任意一点 (x, t) 的依赖区间必包含 x_0 , 因而会受到 x_0 处初值的影响。

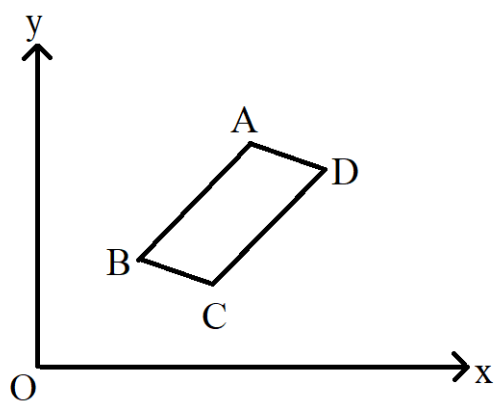
2.4.3 特征平行四边形与波动方程的等价性质

Figure 2.1: 特征平行四边形

波动方程 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 的解具有一个显著的几何特征：在由特征线构成的平行四边形中，对顶点的函数值之和相等。这一性质不仅刻画了方程的解，其逆命题也成立。

Proposition 2.4.8 ▶ 特征平行四边形对角和相等

设 $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ 为波动方程在带形区域内的 C^2 解。若 A, B, C, D 是平面上一个平行四边形的四个顶点，且其两组对边分别平行于特征方向（即分别平行于直线 $x + ct = \text{const}$ 和 $x - ct = \text{const}$ ），则必有

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D).$$

Proof. 采用特征坐标 (ξ, η) ，其中 $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ 。在此坐标下，特征线化为坐标线，平行四边形 $ABCD$ 的对边分别平行于 ξ 轴和 η 轴。因此可设四个顶点的坐标为

$$A = (\xi_0, \eta_0), \quad B = (\xi_0 + \alpha, \eta_0), \quad C = (\xi_0 + \alpha, \eta_0 + \beta), \quad D = (\xi_0, \eta_0 + \beta),$$

其中 α, β 为实参数。由 D'Alembert 通解 $u = F(\xi) + G(\eta)$ ，直接计算：

$$u(A) + u(C) = [F(\xi_0) + G(\eta_0)] + [F(\xi_0 + \alpha) + G(\eta_0 + \beta)],$$

$$u(B) + u(D) = [F(\xi_0 + \alpha) + G(\eta_0)] + [F(\xi_0) + G(\eta_0 + \beta)].$$

显然二者相等。得证。 □

上述命题的逆命题亦真：若一个函数在任意这样的特征平行四边形上均满足对角和相等，则它必满足波动方程。此即，波动方程等价于函数在特征平行四边形上满足“对顶和相等”的几何性质。这一观察可推广至高维波动方程，并联系到由特征面构成的积分恒等式。

Proposition 2.4.9 ▶ 平行四边形性质的逆命题

设 $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ （在上半平面或某区域内）。若对任意由特征方向为边的平行四边形 $ABCD$ ，均有 $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ ，则 u 满足波动方程

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Proof. 任取一点 (x_0, t_0) ，以及充分小的参数 h, k 。在特征坐标下构造平行四边形如下：

$$A = (x_0 - ct_0, x_0 + ct_0) \quad \text{在} (\xi, \eta) \text{坐标下实际对应点}$$

更直接地在 (x, t) 坐标下设

$$\begin{aligned} A &= (x_0, t_0), \\ B &= (x_0 + h, t_0 + h/c), \\ D &= (x_0 + k, t_0 - k/c), \\ C &= B + D - A = (x_0 + h + k, t_0 + (h - k)/c). \end{aligned}$$

易验证边 AB 和 DC 平行于特征线 $x - ct = \text{const}$ (因为沿此方向 $dx/dt = c$), 边 AD 和 BC 平行于 $x + ct = \text{const}$. 因此这是一个特征平行四边形。

由假设条件 $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$, 将各项在 (x_0, t_0) 处做 Taylor 展开到二阶:

$$\begin{aligned} u(A) &= u_0, \\ u(B) &= u_0 + (h)u_x + \left(\frac{h}{c}\right)u_t + \frac{1}{2}h^2u_{xx} + \frac{h^2}{c}u_{xt} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{c^2}u_{tt} + o(h^2), \\ u(D) &= u_0 + (k)u_x + \left(-\frac{k}{c}\right)u_t + \frac{1}{2}k^2u_{xx} - \frac{k^2}{c}u_{xt} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}u_{tt} + o(k^2), \\ u(C) &= u_0 + (h+k)u_x + \frac{h-k}{c}u_t \\ &\quad + \frac{1}{2}(h+k)^2u_{xx} + \frac{(h+k)(h-k)}{c}u_{xt} + \frac{1}{2}\frac{(h-k)^2}{c^2}u_{tt} + o(h^2 + k^2). \end{aligned}$$

代入 $u(A) + u(C) - u(B) - u(D) = 0$, 一阶项自动抵消。二次项经计算得:

$$\frac{hk}{c^2}(u_{tt} - c^2u_{xx}) = 0.$$

由于 h, k 是任意非零实数, 故在 (x_0, t_0) 有 $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$. 由点的任意性则得证. $\square$

2.4.4 初边值问题 (混合问题)

Definition 2.4.10 ▶ 初边值问题

一维波动方程在有限区间 $[0, l]$ 上的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, & x \in (0, l), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $f(x)$ 为初始位移, $g(x)$ 为初始速度, 两端点固定 (齐次 Dirichlet 边界条件)。

求解方法: i) 特征线法 (反射法); ii) 分离变量法 (见后续章节)。

(1) 特征线法 (反射法)

由于端点固定 $u(0, t) = u(l, t) = 0$, 波动在边界上会发生反射。特征线法通过将初始数据延拓到整个实轴, 将半无界或有界问题转化为无界问题。

延拓思路: 将定义在 $[0, l]$ 上的初始函数 f, g 奇延拓至 $[-l, l]$, 再以 $2l$ 为周期延拓至整个 $\mathbb{R}$ 。这样构造出的全实轴初值问题, 其解自动满足 $x = 0$ 和 $x = l$ 处为 0 的边界条件。通过 D'Alembert 公式即可求出原区域的解。

具体地, 在 (x, t) 平面上, 由于边界的存在, 解在不同区域由不同的特征线反射公式给出:

- 区域 I ($0 \leq t \leq \min(x/c, (l-x)/c)$): 解由 D'Alembert 公式直接给出, 尚未受边界影响。
- 区域 II (受 $x = 0$ 边界影响): 解为 $u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g(s) ds$ 。
- 区域 III (受 $x = l$ 边界影响): 解由类似反射公式给出。
- 更高次的反射区域 (IV, V, VI...) 依此类推, 通过反复延拓覆盖整个带形区域 $[0, l] \times [0, \infty)$ 。

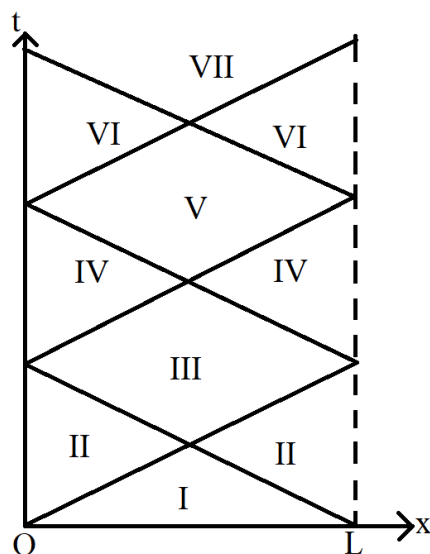


Figure 2.2: 特征线对解区域的划分

(2) 相容性条件与解的光滑性

Proposition 2.4.11 ▶ 初边值问题解的光滑性

为使初边值问题存在古典解 $u \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$, 初始数据 f, g 除自身的光滑性外, 必须在角点 $(0, 0)$ 和 $(l, 0)$ 处满足相容性条件 (匹配条件):

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(l) &= 0, \\ g(0) &= 0, & g(l) &= 0, \\ f''(0) &= 0, & f''(l) &= 0. \end{aligned}$$

Proof. 区域 I 中的解由 D'Alembert 公式给出, 则 $f \in C^2, g \in C^1$ 时该区域内 $u \in C^2$ 。考虑边界上的连续性。由边界条件 $u(0, t) = 0$ 对任意 $t > 0$ 成立, 令 $t \rightarrow 0^+$ 得 $u(0, 0) = f(0) = 0$; 同理 $f(l) = 0$ 。对 $u_t(0, t) = 0$ 取极限得 $g(0) = 0, g(l) = 0$ 。进一步, 由于 $u(0, t) = 0$ 恒成立, 有 $u_{tt}(0, t) = 0$ 。结合波动方程 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, 得 $u_{xx}(0, t) = 0$ 。令 $t \rightarrow 0^+$ 推出 $f''(0) = 0$ 。同理 $f''(l) = 0$ 。这些条件保证了在反射过程中, 不同区域的解在特征线上平滑连接 (直到二阶导数连续)。若相容条件不满足, 则解仅具有广义解的意义。 $\square$

Example 2.4.12 ▶ 课后练习: 初边值函数紧支撑时的特殊性质

对于 D'Alembert 公式, 若 f, g 是紧支撑的, 则:

1. 对任意给定的 $t, u(x, t)$ 紧支撑;
2. 若 F, G 紧支撑, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi = 0$ 。

Proof. 1. 于 f, g 紧支撑, 则 t 给定时对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $C_1, C_2 > 0$, 使得 $|x| > C_1$ 时 $f(x) < \frac{\varepsilon}{2}, |x| > C_2$ 时 $g(x) < \frac{\varepsilon}{2t}$ 。则当 $\min\{|x + ct|, |x - ct|\} > \max\{C_1, C_2\}$ 时,

$$u(x, t) < \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{1}{2c} \cdot 2ct \cdot \frac{\varepsilon}{2t} = \varepsilon.$$

再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即得 $u(x, t)$ 紧支撑。

2. F, G 紧支撑时

$$\begin{aligned} \int_A^B g(\xi) d\xi &= \int_A^B u_t(x, 0) dx = \int_A^B (cF'(x + ct) - cG'(x - ct)) dx \\ &= c(F(B + ct) - F(A + ct)) - c(G(B - ct) - G(A - ct)). \end{aligned}$$

由 $A \rightarrow -\infty, B \rightarrow +\infty$ 时 F, G 紧支撑知 t 固定时上式各部分趋于 0, 则得证。 $\square$

2.5 分离变量法与 Sturm-Liouville 理论^[2]

2.5.1 Sturm-Liouville 问题

Definition 2.5.1 ▶ Sturm-Liouville 问题

在求解偏微分方程边值问题时，常化归为如下常微分方程特征值问题，称为 **Sturm-Liouville 问题**（简记 S-L 问题）：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l, \\ \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\gamma + \delta > 0$ 。

Theorem 2.5.2 ▶ S-L 问题的基本性质

上述特征值问题具有以下性质：

1. 所有特征值均为非负实数。特别地，若边界条件不是两端 Neumann 型（即 α, γ 不全为零），则所有特征值严格正；若 $\alpha = \gamma = 0$ （两端 Neumann 边界），则 $\lambda = 0$ 是特征值，对应常数特征函数。
2. 特征值构成单调递增趋于无穷的序列：

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

3. 不同特征值对应的特征函数在 $[0, l]$ 上加权正交（此处权 $w(x) \equiv 1$ ），即

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

4. 任意函数 $f \in L^2[0, l]$ 可展开为特征函数级数：

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x), \quad C_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx},$$

且在 L^2 意义下级数收敛于 f 。若 f 充分光滑且满足边界条件，则级数绝对且一致收敛。

Corollary 2.5.3 ▶ Dirichlet 边界下的完备基

对两端固定弦 (Dirichlet 边界条件 $X(0) = X(l) = 0$), S-L 问题的解为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

函数系 $\{\sin \frac{n\pi}{l}x\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 $L^2[0, l]$ 的一组完备正交基, 规范正交基为

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l}x \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

此时 Fourier 正弦级数的系数为

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx.$$

2.5.2 分离变量法**Example 2.5.4**

考虑有界弦的振动混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.6)$$

分离变量法的主要步骤:

1. 设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入方程得

$$XT'' - a^2 X''T = 0 \implies \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

于是得到两个常微分方程: $X'' + \lambda X = 0$, $T'' + a^2 \lambda T = 0$.

2. 结合边界条件 $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ 等, 得 S-L 问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

解得特征值与特征函数:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

对应 $T_n(t)$ 满足 $T_n'' + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n = 0$, 通解为

$$T_n(t) = A_n \sin \frac{an\pi}{l}t + B_n \cos \frac{an\pi}{l}t.$$

3. 叠加特解得到形式解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{an\pi}{l}t + B_n \cos \frac{an\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

利用初值确定系数:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \implies B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx,$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} A_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \implies A_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx.$$

代入即得分离变量的形式解:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, d\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l}t + \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, d\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l}t \right] \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

Theorem 2.5.5 ▶ 分离变量解的适定性

设 $\varphi \in C^2[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, 且满足相容性条件

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

则上述级数给出的函数 u 是混合问题 (2.6) 的古典解, 即 $u \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$ 且满足方程、边界与初值条件。

Proof. 首先, 由边界条件与光滑性, 可将 φ, ψ 奇延拓至 $[-l, l]$ 再周期延拓至全直线, 延拓后的函数仍保持相应的光滑性。由此可对 Fourier 系数多次分部积分。

对 A_n 进行分部积分:

$$A_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi = -\frac{2l}{an^2\pi^2} \left[\psi(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \right]_0^l + \frac{2l}{an^2\pi^2} \int_0^l \psi'(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi.$$

由 $\psi(0) = \psi(l) = 0$ 知边界项为零, 故

$$A_n = \frac{2l}{an^2\pi^2} \int_0^l \psi'(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi.$$

再进行一次分部积分:

$$\int_0^l \psi'(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi = \frac{l}{n\pi} \left[\psi'(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right]_0^l - \frac{l}{n\pi} \int_0^l \psi''(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi.$$

因为 $\sin n\pi = \sin 0 = 0$, 边界项再次消失, 于是

$$A_n = -\frac{2l^2}{an^3\pi^3} \int_0^l \psi''(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi.$$

同理, 对 B_n 进行两次分部积分 (第一次利用 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, 第二次利用 $\sin n\pi = 0$):

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi = -\frac{2l}{n^2\pi^2} \int_0^l \varphi''(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi.$$

由于 $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$, 它们的二阶导数连续从而平方可积。记

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi''(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi''(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi,$$

则 $A_n = -\frac{l^3}{an^3\pi^3} a_n, B_n = -\frac{l^2}{n^2\pi^2} b_n$ 。

由 Fourier 系数的 Bessel 不等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \frac{l}{2} \int_0^l |\psi''(\xi)|^2 \, d\xi < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \leq \frac{l}{2} \int_0^l |\varphi''(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.$$

估计解及其导数项:

$$\begin{aligned}
 |u(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} \right) < \infty, \\
 |u_t(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} |A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} |B_n| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \\
 |u_{tt}(x, t)| &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|a_n|^2 + \frac{1}{n^2}) + (|b_n|^2 + \frac{1}{n^2})}{2} \\
 &\ll \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2 + \frac{1}{n^2}) < \infty.
 \end{aligned}$$

从而 $u \in C^2$, 且代入方程满足一切条件。 □

注: 这个证明总感觉怪怪的, 有说不上来的问题。。

2.5.3 边界条件非齐次时的分离变量法

考虑混合问题具有非齐次边界条件的情形:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = \alpha(t), u(l, t) = \beta(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

若直接设 $u(x, t) = \sum T_n(t)X_n(x)$ 并利用齐次边界条件的特征函数族, 则无法满足非齐次边界条件。正确的做法是先将边界条件齐次化。

边界条件齐次化方法: 令

$$u(x, t) = V(x, t) + \frac{x}{l}\beta(t) + \frac{l-x}{l}\alpha(t).$$

则 $V(x, t)$ 满足

$$V(0, t) = u(0, t) - \alpha(t) = 0, \quad V(l, t) = u(l, t) - \beta(t) = 0,$$

即化为齐次边界条件。将上述代换代入原方程和初值, 可得关于 V 的混合问题, 然后对 V 使用前面所述的分离变量法求解。最后代回即得原问题的解。

2.5.4 方程非齐次时的分离变量法

设方程本身是非齐次的，但边界条件已化为齐次：

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

求解步骤如下：

1. 设分离变量形式 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$ ，其中 $X_n(x)$ 为对应齐次边界条件的特征函数。对于两端固定弦，取

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. 将非齐次项和初始条件按此特征函数族展开：

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l}x,$$

其中系数由 Fourier 正弦级数给出：

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, d\xi, \\ \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, d\xi, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, d\xi. \end{aligned}$$

3. 代入方程，利用 $X_n'' = -\lambda_n X_n$ ，得到关于 $T_n(t)$ 的常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = F_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \quad \omega_n = \frac{cn\pi}{l}.$$

4. 解此常微分方程。由常数变易法或 Duhamel 原理，得

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) \, d\tau.$$

代回 $u(x, t) = \sum T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x$ 即得形式解。

Example 2.5.6 ▶ 非齐次方程混合问题示例

解:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = 2, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x^2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解: 首先齐次化边界。令 $u(x, t) = V(x, t) + 2 - \frac{2x}{\pi}$,
则 V 满足齐次边界 $V(0, t) = V(\pi, t) = 0$, 且代入方程得

$$V_{tt} - V_{xx} = 1,$$

初值变为

$$V(x, 0) = \sin x - 2 + \frac{2x}{\pi}, \quad V_t(x, 0) = x^2.$$

取特征函数 $X_n(x) = \sin nx$, 将 1 展开为 Fourier 正弦级数:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin nx.$$

将 V 展开为 $V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$, 代入方程得

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

初值系数为

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sin x - 2 + \frac{2x}{\pi} \right) \sin nx \, dx, \quad \psi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx.$$

由常微分方程解的公式,

$$T_n(t) = \varphi_n \cos nt + \frac{\psi_n}{n} \sin nt + \frac{1}{n} \int_0^t \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin n(t - \tau) \, d\tau.$$

具体算出积分可得 $T_n(t)$ 的封闭形式, 最后代回即得原问题的级数解:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx + 2 - \frac{2x}{\pi}.$$

2.5.5 分离变量法用于其他方程形式

分离变量法不仅适用于标准波动方程，也适用于含有低阶项或其他系数的方程，只要方程在空间部分能构成 S-L 问题。

Example 2.5.7 ▶ 含零阶项的波动方程

考虑方程

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + u = 0.$$

设 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$ ，代入得

$$T_n'' X_n - c^2 T_n X_n'' + T_n X_n = 0 \implies \frac{T_n''}{T_n} - c^2 \frac{X_n''}{X_n} + 1 = 0.$$

令 $X_n'' = -\lambda_n X_n$ ，则

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0, \quad T_n'' + (1 + c^2 \lambda_n) T_n = 0.$$

结合齐次边界条件可确定 λ_n 及特征函数，进而求得 T_n 。

Example 2.5.8 ▶ 标准波动方程的重述

于标准方程 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ，设 $u = \sum T_n X_n$ ，分离得

$$\frac{T_n''}{T_n} = c^2 \frac{X_n''}{X_n} = -c^2 \lambda_n,$$

故 $X_n'' + \lambda_n X_n = 0$, $T_n'' + c^2 \lambda_n T_n = 0$ ，与前面一致。

2.6 一阶线性偏微分方程组 *

在古典理论中, 许多高阶方程可以通过引入新未知函数化为一阶方程组。本章讨论一阶线性偏微分方程组的特征线理论和求解方法。

2.6.1 二阶方程化为一阶方程组

Proposition 2.6.1

一般的二阶线性方程 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0$ 可以通过引入变量化为一阶方程组。

Proof. 令

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_x, \quad u_3 = u_y,$$

则原方程可写为

$$a(u_2)_x + b(u_2)_y + b(u_3)_x + c(u_3)_y + 2du_2 + 2eu_3 + fu_1 = 0.$$

再结合可交换条件

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial x},$$

就得到了关于 (u_1, u_2, u_3) 的一阶线性方程组。 □

2.6.2 二元线性方程组的特征线

Definition 2.6.2 ▶ 特征曲线 (方程组)

考虑如下形式的方程组:

$$A(x, y)U_x + B(x, y)U_y = C(x, y)U + D(x, y), \quad (2.8)$$

其中 $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, A, B 为 $n \times n$ 矩阵函数, C 为 $n \times n$ 矩阵, D 为向量。设曲线 $\Gamma: y = \phi(x)$ 上给定了 Cauchy 数据 $U(x, \phi(x)) = F(x)$ 。若由方程 (2.8) 及 Γ 上的 Cauchy 数据不能唯一确定 U 在 Γ 上的所有一阶偏导数 (从而不能向区域内部延拓), 则称 Γ 为方程组的特征曲线。

Theorem 2.6.3 ▶ 特征线的判定

曲线 $\Gamma: y = \phi(x)$ 是方程组 (2.8) 的特征线当且仅当

$$\det(A - \phi'(x)B) = 0. \quad (2.9)$$

称此为特征方程.

Proof. 将 $t = \phi(x)$ 与 $U(x, \phi(x)) = f(x)$ 代入方程, 得

$$AU_x + BU_t = Cf + D.$$

对 $U(x, \phi(x)) = f(x)$ 两边求导:

$$U_x + \phi'(x)U_t = f'(x).$$

联立此二式, 得到关于 U_x, U_t 的线性代数系统. 其系数矩阵的行列式即为 $\det(A - \phi'B)$. 当该行列式为零时, 无法唯一解出 U_t (或 U_x), 故 Γ 为特征线. $\square$

Corollary 2.6.4 ▶ Cauchy 数据的相容性条件

若 $\det(A - \phi'B) \neq 0$, 则 Γ 为非特征线, 此时可由方程与 Cauchy 数据唯一解出

$$U_t = (A - \phi'B)^{-1}(Cf + D - Bf'),$$

并可进一步求出高阶导数.

Corollary 2.6.5 ▶ 特征线的判定

对于方程组 $AU_x + BU_t = CU + D$, 若 $\det A \neq 0$, 则可写为

$$U_t + A^{-1}BU_x = A^{-1}CU + A^{-1}D.$$

此时特征方向由 $A^{-1}B$ 的特征值决定. 令特征值 λ 满足

$$\det(\lambda I - A^{-1}B) = 0,$$

则特征线满足 $\frac{dx}{dt} = \lambda(x, t)$. 当所有特征值均为实数且特征向量完备时, 方程组为双曲型.

Proof. 由特征线条件 $\det(A - \varphi'B) = 0$ 。因 $\det A \neq 0$ ，两边左乘 $\det A^{-1}$ 得

$$\det(I - \varphi'A^{-1}B) = 0.$$

令 $\lambda = \varphi'(x)$ ，则上式即 $\det(\lambda I - A^{-1}B) = 0$ 。因此特征方向 $\frac{dx}{dt} = \lambda$ 恰为 $A^{-1}B$ 的特征值。当该矩阵有 n 个互异实特征值时，对应 n 条不同的实特征线，沿每条特征线均可将偏微分方程化为常微分方程。 $\square$

注：对于实 λ_i 对应的 $x = \phi_i(t)$, $t \rightarrow 0$ 时产生 x 轴上特征线的起点。

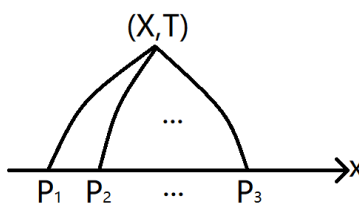


Figure 2.3: 一阶方程组的特征线

2.6.3 初值问题

(1) 双曲型二元一维线性方程组

Definition 2.6.6 ▶ 双曲型方程组

考虑一阶线性方程组

$$Au_t + Bu_x = C(x, t)u + D(x, t),$$

其中 A, B, C 为 n 阶方阵， D 为向量，且 $\det A \neq 0$ 。记 $\tilde{B} = A^{-1}B$ 。若矩阵 $A^{-1}B$ 存在 n 个线性无关的特征向量 $v_1, \dots, v_n$ ，满足

$$A^{-1}Bv_i = \lambda_i v_i,$$

且全部特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 均为实数，则称该方程组为双曲型。

Proposition 2.6.7 ▶ 双曲型方程组的对角化

双曲型二元线性方程组可化为

$$V_t + \Lambda V_x - \tilde{C}V = \tilde{D}$$

的形式, 其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为对角阵。

Proof. 由方程组为双曲型, $\det A \neq 0$, 则 $A^{-1}B$ 存在 n 个线性无关的特征向量, 故可对角化:

$$A^{-1}B = P\Lambda P^{-1}.$$

原方程左乘 A^{-1} 得

$$u_t + A^{-1}Bu_x = A^{-1}Cu + A^{-1}D.$$

记 $\tilde{C} = A^{-1}C$, $\tilde{D} = A^{-1}D$, $B^* = A^{-1}B$, 则

$$u_t + B^*u_x = \tilde{C}u + \tilde{D}.$$

由 $B^* = P\Lambda P^{-1}$, 令 $V = P^{-1}u$. 代入上式, 左乘 P^{-1} :

$$P^{-1}u_t + P^{-1}P\Lambda P^{-1}u_x = P^{-1}\tilde{C}u + P^{-1}\tilde{D}.$$

即

$$V_t + \Lambda V_x = P^{-1}\tilde{C}PV + P^{-1}\tilde{D}.$$

记 $\hat{C} = P^{-1}\tilde{C}P$, $\hat{D} = P^{-1}\tilde{D}$, 则得标准形式

$$V_t + \Lambda V_x = \hat{C}V + \hat{D}.$$

□

(2) 使用迭代法求解

由于方程组是双曲型的, 可采用沿特征线积分的方法化为积分方程组, 再用迭代法求解。

· 步骤 1: 将原方程组化为标准型

$$V_t + \Lambda V_x - \hat{C}V - \hat{D} = 0,$$

其中 $V = P^{-1}u$. 代入初值条件: 由 $u(x, 0) = f(x)$, 得

$$V(x, 0) = P^{-1}u(x, 0) = P^{-1}f(x) := F(x).$$

· 步骤 2: 写出特征线上的常微分方程。对方程组的第 k 个分量:

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + \lambda_k(x, t) \frac{\partial V_k}{\partial x} = \sum_j \hat{C}_{kj} V_j + \hat{D}_k,$$

其特征线由 $\frac{dx}{dt} = \lambda_k(x, t)$ 确定。沿该特征线，全导数为

$$\frac{d}{dt} V_k = \frac{\partial V_k}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial V_k}{\partial x} = \frac{\partial V_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial x}.$$

因此沿特征线有

$$\frac{dV_k}{dt} = \sum_j \hat{C}_{kj} V_j + \hat{D}_k.$$

· 步骤 3: 求过点 (X, T) 的特征线。解常微分方程初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k(x, t), \quad x(T) = X,$$

得特征线

$$x = x_k(t | X, T).$$

· 步骤 4: 沿特征线积分。将 $\frac{dV_k}{dt} = \sum_j \hat{C}_{kj} V_j + \hat{D}_k$ 沿特征线 $x_k(t | X, T)$ 从 $t = 0$ 到 $t = T$ 积分，并利用初值 $V_k(x_k(0), 0) = F_k(x_k(0))$ ，得积分方程组

$$V_k(X, T) = \int_0^T \left(\sum_j \hat{C}_{kj}(x_k(t), t) V_j(x_k(t), t) + \hat{D}_k(x_k(t), t) \right) dt + F_k(x_k(0)).$$

其中 $x_k(t) = x_k(t | X, T)$, $x_k(0) = x_k(0 | X, T)$ 是特征线在初始时刻的出发点。将各分量合并写为向量形式，即得

$$V(X, T) = \int_0^T \left(\hat{C}(x(t), t) V(x(t), t) + \hat{D}(x(t), t) \right) dt + F(x(0)).$$

记

$$W(X, T) = \int_0^T \hat{D}(x(t), t) dt + F(x(0)),$$

$$(SV)(X, T) = \int_0^T \hat{C}(x(t), t) V(x(t), t) dt,$$

则积分方程组可写为

$$V = W + SV.$$

· 步骤 5: 采用迭代法求解: 取初始近似 $V^{(0)}$ (例如 $V^{(0)} = W$), 逐次迭代

$$V^{(m+1)} = W + \mathcal{S}V^{(m)}.$$

在一定条件下, $\mathcal{S}$ 为压缩映射, 当 $m \rightarrow \infty$ 时 $V^{(m)} \rightarrow V$, 极限函数 $V = W + \mathcal{S}V$ 即为积分方程的唯一解。得到 V 后, 由 $u = PV$ 即得原方程组的解。

Example 2.6.8 ▶ 一维波动方程化为一阶方程组求解

将 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 化为一阶方程组并推导 D'Alembert 公式。

令

$$u_1 = u_t, \quad u_2 = u_x,$$

则

$$\begin{cases} (u_1)_t - c^2 (u_2)_x = 0, \\ (u_2)_t - (u_1)_x = 0. \end{cases}$$

写为矩阵形式

$$AU_t + BU_x = 0,$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

左乘 $A^{-1} = I$, 得 $U_t + BU_x = 0$ 。求 B 的特征值:

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda & c^2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - c^2 = 0,$$

得 $\lambda_1 = -c$, $\lambda_2 = c$, 均为实数且互异, 故为双曲型。

将 B 对角化: $B = P\Lambda P^{-1}$, 其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} c & c \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

令 $V = P^{-1}U$, 则

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} u_t + cu_x \\ u_t - cu_x \end{pmatrix}.$$

方程组化为

$$V_t + \Lambda V_x = 0, \quad \text{即} \quad \begin{cases} (v_1)_t - c(v_1)_x = 0, \\ (v_2)_t + c(v_2)_x = 0. \end{cases}$$

特征线分别为 $\frac{dx}{dt} = -c$ 和 $\frac{dx}{dt} = c$ 。

初始条件 $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$ 给出 $u_2(x, 0) = f'(x)$, $u_1(x, 0) = g(x)$, 故

$$V(x, 0) = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} g(x) + cf'(x) \\ g(x) - cf'(x) \end{pmatrix}.$$

沿特征线积分: v_1 沿 $\frac{dx}{dt} = -c$ 为常数, 故

$$v_1(X, T) = v_1(X + cT, 0) = \frac{1}{2c}(g(X + cT) + cf'(X + cT));$$

v_2 沿 $\frac{dx}{dt} = c$ 为常数, 故

$$v_2(X, T) = v_2(X - cT, 0) = \frac{1}{2c}(g(X - cT) - cf'(X - cT)).$$

回代 $U = PV$, 得

$$u_t = c(v_1 + v_2), \quad u_x = v_1 - v_2.$$

由 u_x 积分:

$$u(X, T) = \int_0^T u_t(X, t) dt + u(X, 0) = \int_0^T c(v_1(X, t) + v_2(X, t)) dt + f(X).$$

将 v_1, v_2 的表达式代入, 经过计算化简即得 D'Alembert 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

2.6.4 初边值问题

对于半无界区域 $x > 0, t > 0$ 上的双曲型方程组, 设已化为标准型。

1. 条件:

(a) 初始条件: 初始数据在 $t = 0, x > 0$ 上给定:

$$V(x, 0) = g(x).$$

(b) 边界条件: 边界数据在 $x = 0, t > 0$ 上给定, 形式为

$$V_k(0, t) = \sum_{i=1}^m g_{ki}(t) V_i(0, t), \quad k = r+1, \dots, n.$$

(即对进入区域的特征变量分量给定边界条件。)

(c) 特征值正负性条件: 特征值按大小排列为

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0 > \lambda_{r+1} > \dots > \lambda_n.$$

- 特征线分类: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 为正, 对应的特征线称为左行特征线 (当 t 增加时 x 增加); $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ 为负, 对应的特征线称为右行特征线 (当 t 增加时 x 减小)。
- 边界条件的个数: 设正特征值的个数为 r , 则需在边界 $x = 0$ 上给出 $n - r$ 个边界条件; 对于负特征值对应的分量, 其特征线从区域内部出发到达边界, 故不需要在 $x = 0$ 处给定边界条件。
- 解的积分表达式: 沿特征线积分, 对于不同的分量:

$$V_i(X, T) = \int_0^T \sum_{k=1}^n \hat{C}_{ik}(x_i(t), t) V_k(x_i(t), t) dt + \int_0^T \hat{D}_i(x_i(t), t) dt$$

$$+ \begin{cases} g_i(x_i(0)), & \text{若 } x_i(0) > 0, \\ \sum_{j=1}^m g_{ij}(t^*) V_j(0, t^*), & \text{若特征线交于 } x = 0 \text{ 于时刻 } t^*. \end{cases}$$

其中 $x_i(t) = x_i(t | X, T)$ 为过 (X, T) 的第 i 族特征线。当特征线向后延伸与 $x = 0$ 相交时, 该处的值由边界条件给出。

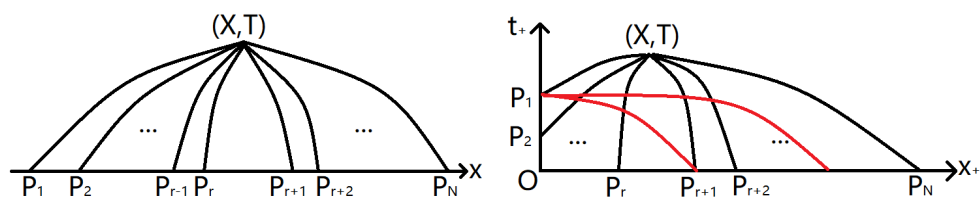


Figure 2.4: 初边值问题的特征线

Laplace 方程

接下来的三章将是微分方程全局解的相关内容，知识风格将与前两章有所不同：后面的内容将几乎没有计算类的内容。请你务必将 PDE 课程从狭义的解方程中解放出来。在接下来的章节里，请你务必牢记：本课程研究的内容是各类微分方程的解的存在性、唯一性、正则性、求解方法，从这个角度去构建知识结构将对你的理解大有裨益。

3.1 Green 恒等式

3.1.1 散度定理

Definition 3.1.1 ▶ 散度

定义散度 $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$ ，其中 F 为向量场，则

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

记 $\vec{n}$ 为单位法向量。

Theorem 3.1.2 ▶ 散度定理

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dv = \iint_{\partial\Omega} F \cdot \vec{n} \, ds,$$

其中 F 为 Ω 上的向量场。

Proposition 3.1.3

按散度定义：

$$\operatorname{div}(fF) = \nabla \cdot (fF) = (\nabla f) \cdot F + f(\nabla \cdot F) = (\nabla f) \cdot F + f \operatorname{div} F,$$

其中 f 为标量场， F 为向量场。

Definition 3.1.4 ▶ Laplace 算子

$$\Delta f := \nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\nabla f), \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

其中 f 为标量场, Δ 为算子。

Definition 3.1.5 ▶ 德尔算子

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Definition 3.1.6 ▶ 旋度

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Theorem 3.1.7 ▶ 旋度定理 (Stokes 公式)

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{s},$$

其中 S 是曲面, Γ 是 S 的边界曲线, $d\vec{s}$ 为有向面元。

3.1.2 Green 恒等式**Theorem 3.1.8** ▶ Green 恒等式

对标量场 $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, 有:

Green 第一恒等式:

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Green 第二恒等式:

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, ds.$$

Proof. 由散度定理的变形 $\operatorname{div}(v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$, 得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v\Delta u \, dx &= \int_{\Omega} v \cdot \nabla \cdot (\nabla u) \, dx = \int_{\Omega} [\operatorname{div}(v\nabla u) - (\nabla v) \cdot (\nabla u)] \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (v\nabla u) \cdot \vec{n} \, ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, dx. \quad (\text{I})\end{aligned}$$

移项后即得 Green 第一恒等式。

交换 u, v 位置, 同理可得

$$\int_{\Omega} u\Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) \, dx. \quad (\text{II})$$

将 (I) 减去 (II) 即得 Green 第二恒等式。 $\square$

Corollary 3.1.9

1. 令 $v = 1$, 则 $\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$ (散度定理中令 $F = \nabla u$ 即得)。
2. 令 $v = u$, 则 $\int_{\Omega} u\Delta u \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$ (Green 第一恒等式中令 $u = v$ 即得)。

3.1.3 莱布尼茨公式

Theorem 3.1.10 ▶ 莱布尼茨公式

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} fg \cdot \vec{n}_i \, ds.$$

此为 Gauss 公式的特殊情况。

Proof.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} fg_{x_i} \, dx + \int_{\Omega} gf_{x_i} \, dx &= \int_{\Omega} (fg)_{x_i} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (fg e_i) \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} fg e_i \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} fg \cdot \vec{n}_i \, ds.\end{aligned}$$

$\square$

3.2 基本解

3.2.1 边值问题与唯一性

Laplace 方程为 $\Delta u = f$, 常用的边值问题有两类:

Definition 3.2.1 ▶ Dirichlet 问题

$$\Delta u = f, x \in \Omega, u = \varphi, x \in \partial\Omega.$$

Definition 3.2.2 ▶ Neumann 问题

$$\Delta u = f, x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi, x \in \partial\Omega.$$

Theorem 3.2.3 ▶ 非齐次 Laplace 方程解的唯一性

设 $u \in C^2(\overline{\Omega})$ 。若 Dirichlet 问题或 Neumann 问题的解存在, 则 Dirichlet 问题的解唯一, Neumann 问题的解在相差一个常数的意义下唯一。

Proof. 由 Green 第一恒等式,

$$\int_{\Omega} u \Delta u \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

设 u_1, u_2 同为某边值问题的解, 令 $u = u_1 - u_2$, 则 $\Delta u = 0$ 。对 Dirichlet 问题, 在边界上 $u = 0$; 对 Neumann 问题, 在边界上 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 。代入上式得 $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = 0$, 故 $\nabla u \equiv 0$, 即 u 在 Ω 上为常数。对 Dirichlet 问题, 由齐次边界条件得 $u \equiv 0$, 解唯一; 对 Neumann 问题, $u \equiv \text{const}$, 即任意两个解至多相差一个常数。□

3.2.2 齐次 Laplace 方程的基本解

Theorem 3.2.4 ▶ 齐次 Laplace 方程的径向解

Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 具有球对称性, 考虑仅依赖于半径的径向解 $u(x) = v(r)$, 其中 $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ 。则在 $r \neq 0$ 处有 $\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$ 。

Proof. 在 $r \neq 0$ 处,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad \nabla r = \frac{x}{r}.$$

于是

$$\nabla u = v'(r) \nabla r = v'(r) \frac{x}{r},$$

$$\Delta u = \nabla \cdot \left(v'(r) \frac{x}{r} \right) = \nabla v'(r) \cdot \frac{x}{r} + v'(r) \nabla \cdot \left(\frac{x}{r} \right).$$

由于 $\nabla v'(r) = v''(r) \frac{x}{r}$, 且

$$\nabla \cdot \left(\frac{x}{r} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) = \frac{n}{r} - \frac{1}{r} = \frac{n-1}{r},$$

代入得

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

□

Laplace 方程在径向解类中化为

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0 \iff \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} (r^{n-1} v'(r)) = 0.$$

积分一次得到 $r^{n-1} v'(r) = C$ (C 为常数)。再积分便得径向解的一般形式:

$$v(r) = \begin{cases} C \ln r, & n = 2, \\ \frac{C}{r^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 3.2.5 ▶ Laplace 方程的基本解

取定适当的常数, 使得 $\Delta \Phi = \delta_0$ (在分布意义下), 得到

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

其中 $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ 为 n 维单位球面的面积。称 Laplace 方程的基本解。

3.2.3 基本解的积分表示

Theorem 3.2.6 ▶ Green 表示公式

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 且 $\Delta u = f \in C(\Omega)$ 。记 $r = |x - y|$, 令

$$K(x, y) = \Phi(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln r, & n = 2, \\ \frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

为 Laplace 方程的基本解, 则对任意 $x \in \Omega$ 有

$$u(y) = \int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} \left(K(x, y) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} - u(x) \frac{\partial K(x, y)}{\partial n_x} \right) dS_x.$$

Proof. 令

$$v(x) = \Phi(|x - y|) = \Phi(r) = \begin{cases} C \ln r, & n = 2, \\ \frac{Cr^{2-n}}{(2-n)}, & n \geq 3, \end{cases}$$

$r > 0$ 即 $x \neq y$ 时 $\Delta v = 0$; $r \rightarrow 0$ 时有奇点. $r \rightarrow 0^+$ 时即 $x \rightarrow y$ 时有

$$\Delta v = \Phi''(r) + \frac{n-1}{r} \Phi'(r) \rightarrow \infty.$$

从而考虑 $\Omega = B(y, \rho) \cup \Omega_\rho$, 其中 $\Omega_\rho = \Omega \setminus B(y, \rho)$. 在 Ω_ρ 和 $B(y, \rho)$ 上分别讨论.

1. 在 Ω_ρ 上进行计算: 由格林第二恒等式,

$$\int_{\Omega_\rho} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{S(y, \rho)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

从而应当处理下列三部分:

(a) $\int_{\Omega_\rho} u \Delta v dx$:

由于在 Ω_ρ 上 $r > 0$, 则 $\Delta v = 0$, 而 u 连续, 则

$$\int_{\Omega_\rho} u \Delta v dx = 0.$$

(b) $\int_{S(y, \rho)} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$:

由 $v = \Phi(\rho)$, 则

$$\int_{S(y,\rho)} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \Phi(\rho) \int_{S(y,\rho)} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \Phi(\rho) \int_{B(y,\rho)} \Delta u dx.$$

由 u 连续知 Δu 在 $B(y, \rho)$ 上有界, 从而存在常数 M 使得

$$\int_{B(y,\rho)} \Delta u dx \leq M \rho^n.$$

从而 $n \geq 3$ 且 $\rho \rightarrow 0^+$ 时有

$$\left| \int_{S(y,\rho)} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \leq M \rho^n \left| \frac{C \rho^{2-n}}{(2-n)} \right| \leq M' \rho^2 \rightarrow 0.$$

$n = 2$ 且 $\rho \rightarrow 0^+$ 时有

$$\left| \int_{S(y,\rho)} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \leq M \rho^2 |C \ln \rho| \leq M'' |\rho^2 \ln \rho| \rightarrow 0.$$

总之

$$\int_{S(y,\rho)} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \rightarrow 0.$$

(c) $\int_{S(y,\rho)} u \frac{\partial v}{\partial n} ds$:

由于 $S(y, \rho)$ 上 n 是朝向 y 的法向量, 从而 $S(y, \rho)$ 上有 $\frac{\partial v}{\partial n} = -\Phi'(\rho)$. 由此有

$$\int_{S(y,\rho)} u \frac{\partial v}{\partial n} ds = -\Phi'(\rho) \int_{S(y,\rho)} u ds = -\frac{C}{\rho^{n-1}} \int_{S(y,\rho)} u ds.$$

当 $\rho \rightarrow 0^+$ 时有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(-\frac{C}{\rho^{n-1}} \int_{S(y,\rho)} u ds \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left(-\frac{C}{\rho^{n-1}} u(y) \omega_n \rho^{n-1} \right) = -C \omega_n u(y).$$

从而

$$\int_{S(y,\rho)} u \frac{\partial v}{\partial n} ds = -C \omega_n u(y).$$

2. 接下来在 $B(y, \rho)$ 上进行计算, 处理 $\int_{B(y, \rho)} v \Delta u dx$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega \setminus \epsilon_1} \Phi \Delta u dx - \int_{\Omega \setminus \epsilon_2} \Phi \Delta u dx \right| &= \left| \int_{B(y, \epsilon_2) \setminus B(y, \epsilon_1)} \Phi \Delta u dx \right| \\ &\leq \int_{B(y, \epsilon_2) \setminus B(y, \epsilon_1)} |\Phi| |\Delta u| dx. \end{aligned}$$

由于 Δu 的连续性, 记 $|\Delta u|$ 上界为 M , 则 $n=2$ 时, 令 $\xi = x - y$ 并让 $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow \rho, \rho \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{B(y, \epsilon_2) \setminus B(y, \epsilon_1)} |\Phi| |\Delta u| dx &\leq M \int_{B(y, \epsilon_2) \setminus B(y, \epsilon_1)} |C \ln r| dx \\ &= CM \int_{B(0, \epsilon_2) \setminus B(0, \epsilon_1)} |\ln |\xi|| d\xi \\ &= CM \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} r \ln r dr \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$n \geq 3$ 时, 令 $\xi = x - y$ 并让 $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow \rho, \rho \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{B(y, \epsilon_2) \setminus B(y, \epsilon_1)} |\Phi| |\Delta u| dx &\leq \frac{C}{n-2} \int_{B(y, \epsilon_2) \setminus B(y, \epsilon_1)} |\Delta u| r^{2-n} dx \\ &\leq \frac{CM}{n-2} \int_{B(0, \epsilon_2) \setminus B(0, \epsilon_1)} |\xi|^{2-n} d\xi \\ &= \frac{CM}{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} r^{2-n} r^{n-1} dr \\ &= \frac{\pi CM (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{n-2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

这意味着对于 $n \geq 2$, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时有

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_{B(y, \rho)} v \Delta u dx \right) \rightarrow 0.$$

3. 最后整理上述极限, 完成证明。

$\frac{\partial}{\partial \rho} (\int_{B(y, \rho)} v \Delta u dx) \rightarrow 0$ 意味着当 $\rho \rightarrow 0$ 时有 $\int_{\Omega_\rho} v \Delta u dx \rightarrow \int_{\Omega} v \Delta u dx$. 回顾

$$\int_{\Omega_\rho} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{S(y, \rho)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时将各个极限代入有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v \Delta u dx &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_{\rho}} v \Delta u dx \\ &= \int_{\Omega_{\rho}} u \Delta v dx + \int_{\partial \Omega} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds + \int_{S(y, \rho)} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds \\ &= \int_{\partial \Omega} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds + C \omega_n u(y).\end{aligned}$$

将 $v = \Phi(r) = K(x, y)$ 代入并取 $C = \omega_n^{-1}$ 便有

$$u(y) = \int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(x) dx - \int_{\partial \Omega} \left(K(x, y) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} - u(x) \frac{\partial K(x, y)}{\partial n_x} \right) dS_x.$$

□

Corollary 3.2.7 ▶ 调和函数的边界积分表示

若 $\Delta u = 0$ 在 Ω 上成立, 则

$$u(x) = - \int_{\partial \Omega} \left(K(|x - y|) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial K}{\partial n_y} \right) dS_y, \quad x \in \Omega.$$

由此, 调和函数在区域内完全由其边界上的 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 决定。

3.2.4 调和函数的解析性

Theorem 3.2.8 ▶ 调和函数的实解析性

设 $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u = 0$, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$ 且 u 在 Ω 内实解析。称 u 为 Ω 上的调和函数。

Proof. 任取 $x_0 \in \Omega$, 存在 $R > 0$ 使得 $B(x_0, R) \subset \Omega$ 。在球内 u 调和, 由推论 3.2.3,

$$u(x) = - \int_{\partial B(x_0, R)} \left(K(|x - y|) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial K}{\partial n_y} \right) dS_y, \quad |x - x_0| < R.$$

当 $x \in B(x_0, R)$ 时, 对每个固定的 $y \in \partial B(x_0, R)$, 基本解 $K(|x - y|)$ 关于 x 是实解析函数。积分号下求导可与积分交换, 从而 $u(x)$ 在 $B(x_0, R)$ 内实解析。由 x_0 的任意性知 u 在整个 Ω 内实解析。 □

3.3 Cauchy 问题与 Poisson 公式

3.3.1 Laplace 方程 Cauchy 问题的可解性

Laplace 方程的 Cauchy 问题一般是不适定的，即使解存在也未必稳定。

Theorem 3.3.1 ▶ Cauchy 问题解的必要条件

考虑半空间 $x_n > 0$ 中的 Laplace 方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u = 0, & x_n = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = g(x_1, \dots, x_{n-1}), & x_n = 0. \end{cases}$$

若在平面 $\Sigma = \{x_n = 0\}$ 的某邻域内存在 C^2 解，则 g 在该邻域内必为实解析函数。从而只有解析的初始数据才可能有局部解。

Proof. 任取 $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ ，设局部解存在。取球 $B = B(x_0, r)$ 使得 $B \cap \{x_n = 0\} \subset \Omega$ 。记 $B^+ = B \cap \{x_n \geq 0\}$ ， $B^- = B \cap \{x_n \leq 0\}$ 。在 B^+ 上 $u \in C^2$ 且 $\Delta u = 0$ ，在 $\partial B \cap \{x_n = 0\}$ 上 $u = 0$ ， $\frac{\partial u}{\partial x_n} = g$ 。

定义奇延拓

$$u^*(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, \dots, x_n), & x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \dots, -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

下证 $u^* \in C^2(B)$ ：

1. 连续性：在 $x_n = 0$ 处， $u(x_1, \dots, 0) = 0$ ，从而 $u^*(x_1, \dots, 0^-) = -u(x_1, \dots, 0) = 0$ ，连续。
2. 一阶导数：对 $i = 1, \dots, n-1$ ，

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}, & x_n > 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

因为 u 在 $x_n = 0$ 上恒为零，有 $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ ($x_n = 0$)，故 $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ 在 $x_n = 0$ 处连续。

对法向导数,

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_n} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n}, & x_n > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, 0)$ 未必为零, 但由边界条件 $\frac{\partial u}{\partial x_n} = g$, 该极限一致, 故连续。

3. 二阶导数: 对 $i, j = 1, \dots, n-1$,

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, & x_n > 0, \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

混合导数类似, 在 $x_n = 0$ 处由调和性质可验连续。对于 $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_n^2}$, 在 B^- 中

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_n^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x_1, \dots, -x_n),$$

而由 $\Delta u = 0$ 知 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, 故

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, -x_n).$$

在 $x_n = 0$ 上该表达式等于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, 连续。因此所有二阶导数连续, $u^* \in C^2(B)$ 。

再者, 在 B 内 $\Delta u^* = 0$: 在 B^+ 显然, 在 B^- 中

$$\Delta u^*(x) = -\Delta u(x_1, \dots, -x_n) = 0,$$

在 $x_n = 0$ 上由连续性也得零。故 u^* 在 B 内调和。

由前一节结论, 调和函数实解析, 所以 u^* 在 B 内实解析, 特别在 $x_n = 0$ 附近实解析。

从而 $g = \frac{\partial u}{\partial x_n}|_{x_n=0}$ 作为 u^* 的法向导数, 亦在 ξ 附近实解析。□

3.3.2 基本解的推广与平均值定理

由于基本解不是唯一的, 我们可以加上一个调和函数得到新的基本解。这在构造满足特定边界条件的 Green 函数时有用。

Theorem 3.3.2 ▶ 基本解的修正

设 $K(x, y)$ 为 Laplace 方程的基本解, $w(x, y)$ 关于 x 调和 ($\Delta_x w = 0$)。令

$$G(x, y) = K(x, y) + w(x, y),$$

则 G 也是基本解, 且对 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 有

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial G}{\partial n_y} \right) dS_y.$$

Proof. 由上节 Green 表示公式,

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(K(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial K}{\partial n_y} \right) dS_y. \quad (\text{I})$$

对 w 与 u 应用 Green 第二恒等式, 因 $\Delta_x w = 0$, 得

$$\int_{\Omega} (u \Delta w - w \Delta u) dy = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial w}{\partial n_y} - w \frac{\partial u}{\partial n_y} \right) dS_y.$$

即

$$\int_{\Omega} w \Delta u dy = \int_{\partial\Omega} \left(w \frac{\partial u}{\partial n_y} - u \frac{\partial w}{\partial n_y} \right) dS_y. \quad (\text{II})$$

(I) 式与 (II) 式相加, 得到

$$u(x) = \int_{\Omega} (K(x, y) + w(x, y)) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left((K(x, y) + w(x, y)) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial (K + w)}{\partial n_y} \right) dS_y.$$

这正是所要的公式。 □

Corollary 3.3.3 ▶ Gauss 算数平均值定理

设 u 在 Ω 内调和, 则对任意球 $B(x, r) \subset \Omega$ 有

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y.$$

即球心值等于球面值的平均值。

Proof. 在定理中选择修正函数 w 使得 Green 函数 G 在球面 $\partial B(x, r)$ 上为零, 且其法向导数为常数。对于球对称情形, 这样的 G 是存在的 (例如用镜像法), 并可算得

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n_y} \right|_{y \in \partial B(x, r)} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}.$$

在表示公式中令 $\Delta u = 0$, 体积分消失, 并利用 $G|_{\partial B} = 0$, 即得

$$u(x) = - \int_{\partial B(x, r)} u(y) \frac{\partial G}{\partial n_y} dS_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y.$$

□

Corollary 3.3.4 ▶ 次平均与上平均性质

若 $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u \leq 0$, 则对任意 $B(x, r) \subset \Omega$,

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y.$$

若 $\Delta u \geq 0$, 则不等号反向。

Definition 3.3.5 ▶ 次调和函数

设 u 为 Ω 上的连续函数。若对任意 $y \in \Omega$ 及所有充分小的 $r > 0$ 满足 $B(y, r) \subset \Omega$ 时, 均有

$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y, r)} u(x) dS_x,$$

则称 u 是次调和函数。若反向不等式成立, 则称 u 是上调和函数。

Definition 3.3.6 ▶ 次调和函数的等价定义

设 u 为 Ω 上的连续函数。若对任意 $y \in \Omega$,

$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y, r)} u(x) dS_x,$$

对所有充分小的 $r > 0$ 都成立, 则称 u 是次调和函数。

C^2 函数若 $\Delta u \geq 0$, 则是次调和函数; 若 $\Delta u \leq 0$, 则是上调和函数。

Definition 3.3.7 ▶ 球面平均算子

称下式为球面平均算子:

$$\oint_{\partial B(x,r)} u \, dS = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS_y.$$

3.3.3 基本解的第二定义与 Poisson 公式**Definition 3.3.8** ▶ Dirac δ 函数

称满足以下性质的广义函数为 Dirac δ 函数:

1. 当 $x \neq 0$ 时 $\delta(x) = 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx = 1$;
3. 对任意试验函数 φ , 有 $\int \delta(x-y)\varphi(x) \, dx = \varphi(y)$ (筛选性)。

Proposition 3.3.9 ▶ 基本解的分布意义

设 $K(x, y)$ 为 Laplace 方程的基本解, 则在分布意义下

$$\Delta_x K(x, y) = \delta(x - y).$$

Proof. 由 Green 表示公式, 对任意的 $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$u(y) = \int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(x) \, dx - \int_{\partial \Omega} \left(K(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} - u(x) \frac{\partial K}{\partial n} \right) dS_x.$$

由于 u 在边界附近为零, 边界项消失, 故

$$u(y) = \int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(x) \, dx.$$

将 Green 第二恒等式用于 u 和 K (看作分布), 应有

$$\int_{\Omega} (u \Delta K - K \Delta u) \, dx = 0,$$

从而

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta_x K(x, y) dx = \int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(x) dx = u(y).$$

□

由此也可看出, 基本解在 $x \neq y$ 时满足 $\Delta K = 0$, 在 $x = y$ 处带有适当奇性, 使得其 Laplacian 恰为 δ 函数。

Definition 3.3.10 ▶ Laplace 方程基本解的第二定义

若 u 在 $\mathbb{R}^n$ 的任一有限区域可积, 且

$$\Delta u = \delta(x - \xi),$$

其中 $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, 则称 u 为 n 维 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的一个基本解, 这当且仅当对任意的光滑紧支撑函数 φ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \varphi dx = \varphi(\xi).$$

Theorem 3.3.11 ▶ Poisson 公式

对任意 $u \in C^2(\Omega)$, 在 Ω 内逐点成立如下公式:

$$u(y) = \Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) u(x) dx \right).$$

Proof. 首先对 $u \in C_0^2(\Omega)$ 的情况进行证明.

引理: 对于 $u \in C_0^2(\Omega) = \left\{ u \in C^2 : u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$, 令

$$\omega(y) = \int_{\Omega} K(x, y) u(x) dx,$$

则 u 满足非齐次 Laplace 方程 (称 Poisson 微分方程):

$$\Delta_y \omega(y) = u(y).$$

由基本解的分布意义, 对任意的 $u \in C_0^2(\Omega)$, 结合格林第二恒等式与 $\partial\Omega$ 上 $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ 都为 0 有

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Delta_x \Phi(|x - y|) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x - y|) \Delta_x u(x) dx.$$

从而令 $t = x - y$ 有

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x - y|) \Delta_x u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|t|) \Delta_t u(t + y) d(t + y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|t|) \Delta_y u(t + y) d(t + y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|t|) \Delta_y u(t + y) dt \\ &= \Delta_y \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|t|) u(t + y) dt \right) = \Delta_y \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|t|) u(t + y) d(t + y) \right) \\ &= \Delta_y \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|t|) u(x) dx \right) = \Delta_y \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x - y|) u(x) dx \right). \end{aligned}$$

再由 Ω 外 u 恒为零得

$$u(y) = \Delta_y \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x - y|) u(x) dx \right) = \Delta_y \left(\int_{\Omega} \Phi(|x - y|) u(x) dx \right).$$

下面将结论推广到 $u \in C^2(\Omega)$ 上. 设 $u \in C^2(\Omega)$, b 为满足 $\bar{b} \subset \Omega$ 的子集的球, 则可找到 b 的同心球 B , 使得 $\bar{b} \subset B \subset \bar{B} \subset \Omega$. 现构造截断函数

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}), & t > 0, \\ 0 & t \leq 0, \end{cases} \in C^\infty, \quad h(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + \varphi(-t)},$$

则 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上光滑, 且可产生截断函数

$$\eta(x) = h\left(\frac{R - |x - y|}{R - \rho_B}\right) \in C_0^2(\Omega).$$

截断函数满足:

$$\eta|_B \equiv 1, \quad u = \eta + u + (1 - \eta)u, \quad \eta u \in C_0^2(\Omega), \quad ((1 - \eta)u)|_B = 0.$$

对于任意的 $y \in b$, 由引理有

$$\Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) \eta(x) u(x) dx \right) = \eta(y) u(y) = u(y).$$

又 $1 - \eta$ 在 B 上恒取 0, 且 $(1 - \eta)uK$ 在 $\Omega \setminus B$ 上满足正则性 (使得求导与积分可交换顺序), 且 $K(x, y)$ 在 $\Omega \setminus B$ 上关于 y 调和, 从而

$$\Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) (1 - \eta(x)) u(x) dx \right) = \Delta_y \left(\int_{\Omega \setminus B} K(x, y) (1 - \eta(x)) u(x) dx \right) = 0.$$

从而两式相加便得

$$\begin{aligned} \Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) u(x) dx \right) &= \Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) \eta(x) u(x) dx \right) + \Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) (1 - \eta(x)) u(x) dx \right) \\ &= u(y). \end{aligned}$$

再由 Ω 是开集, 则对任意的 $y \in \Omega$ 总可构造出 b , 从而得证. □

Corollary 3.3.12 ▶ 位势表示

Poisson 公式对 $y \in (\bar{\Omega})^c$ 且 $u \in C_0^2(\bar{\Omega})$ 也成立, 即 $y \in (\bar{\Omega})^c$ 且 $u \in C_0^2(\bar{\Omega})$ 时总有

$$u(y) = \Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) u(x) dx \right).$$

Proof. 令

$$\omega(y) = \int_{\Omega} K(x, y) u(x) dx$$

, 直接用 laplace 算子作用有

$$\Delta_y \omega(y) = \Delta_y \left(\int_{\Omega} K(x, y) u(x) dx \right) = \int_{\Omega} \Delta_y (K(x, y)) u(x) dx = 0.$$

而在 $(\bar{\Omega})^c$ 上当 $u \in C_0^2(\bar{\Omega})$ 时有 $u \equiv 0$, 从而

$$\Delta_y \omega(y) = 0 = u(y).$$

□

3.4 极值原理

3.4.1 弱极值原理

Theorem 3.4.1 ▶ 弱极值原理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开连通集, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 。若在 Ω 内 $\Delta u \geq 0$, 则

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

即最大值必在边界上取到 (内部点不能取到比边界更大的值)。

Proof. 先假设 $\Delta u > 0$ 。若存在 $x_0 \in \Omega$ 使 $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, 则由极值必要条件, $\nabla u(x_0) = 0$ 且 Hesse 矩阵 $\nabla^2 u(x_0) \leq 0$ (半负定), 从而 $\Delta u(x_0) = \text{tr}(\nabla^2 u(x_0)) \leq 0$, 与 $\Delta u > 0$ 矛盾。故当 $\Delta u > 0$ 时最大值只能在边界取到。

对一般情形 $\Delta u \geq 0$, 任取 $\varepsilon > 0$, 令

$$v(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2.$$

则 $\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon \geq 2n\varepsilon > 0$, 由已证情形知

$$\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v.$$

现任取最大值点 $x_0 \in \overline{\Omega}$ 使 $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, 则

$$v(x_0) = u(x_0) + \varepsilon|x_0|^2 \geq \max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} |x|^2.$$

另一方面,

$$\max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2.$$

结合 $\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$ 得到

$$\max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} |x|^2 \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 得 $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$ 。而反向不等式显然成立, 故二者相等。 $\square$

Corollary 3.4.2 ▶ 最小值原理

若 $\Delta u = 0$, 则 $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$ 。

Proof. 对 $-u$ 应用弱极值原理即得。 □

Corollary 3.4.3 ▶ 绝对值极值原理

若 $\Delta u = 0$, 则 $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$ 。特别地, 若 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 则 $u \equiv 0$ 。

Proof. 注意到 $|u| = \max(u, -u)$, 而 u 与 $-u$ 均为调和函数, 由弱极值原理,

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \max_{\overline{\Omega}} (-u) = \max_{\partial\Omega} (-u).$$

因此

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max\left(\max_{\overline{\Omega}} u, \max_{\overline{\Omega}} (-u)\right) = \max\left(\max_{\partial\Omega} u, \max_{\partial\Omega} (-u)\right) = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

若在边界上 $u \equiv 0$, 则 $\max_{\overline{\Omega}} |u| = 0$, 故 $u \equiv 0$ 。 □

Corollary 3.4.4 ▶ Dirichlet 问题的唯一性

设 $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 满足

$$\Delta u_1 = \Delta u_2 = f, \quad u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = g,$$

则 $u_1 \equiv u_2$ 。

Proof. 令 $u = u_1 - u_2$, 则 $\Delta u = 0$ 且 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 。由极值原理得 $u \equiv 0$, 即 $u_1 \equiv u_2$ 。 □

3.4.2 强极值原理**Theorem 3.4.5** ▶ 强极值原理 (次调和函数)

设 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内满足 $\Delta u \geq 0$, Ω 连通。若 u 在 Ω 内某点达到其在 $\overline{\Omega}$ 上的上确界 $M = \sup_{\overline{\Omega}} u$, 则 u 恒为常数。换言之, 若 u 不是常数, 则对一切 $x \in \Omega$ 有 $u(x) < \sup_{\partial\Omega} u$ 。

Proof. 设存在 $\xi \in \Omega$ 使得 $u(\xi) = M$ 。任取球 $B(\xi, \rho) \subset\subset \Omega$ 。由次调和函数的平均值性质（见上节），

$$u(\xi) \leq \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(\xi, \rho)} u(y) dS_y.$$

因 $u \leq M$ ，且 $u(\xi) = M$ ，故上式实际为等式，从而在 $\partial B(\xi, \rho)$ 上几乎处处有 $u = M$ 。由连续性，在 $\partial B(\xi, \rho)$ 上恒有 $u = M$ 。由 ρ 的任意小性，存在一个邻域使得 $u \equiv M$ 。现证使 $u = M$ 的点集在 Ω 中既开又闭（相对于 Ω ），由连通性知该点集为整个 Ω ，即 u 恒等于 M 。因此若 u 不为常数，则任何内点处的值严格小于 M ，从而 $u(x) < M = \sup_{\partial\Omega} u$ 对所有 $x \in \Omega$ 成立。 $\square$

对于调和函数，自然也有相应的强极值原理。

Corollary 3.4.6

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 内调和，且 Ω 连通。则 u 为常数，或者对任意 $x \in \Omega$ 有 $u(x) < \max_{\partial\Omega} u$ （及 $u(x) > \min_{\partial\Omega} u$ ）。

3.4.3 带有低阶项的弱极值原理

Proposition 3.4.7

考虑算子 $Lu = -\Delta u + c(x)u$ ，其中 $c(x) \leq 0$ 且在 $\overline{\Omega}$ 上有界。设 $c(x) \leq 0$ ， $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 内满足 $-\Delta u + c(x)u \leq 0$ ，则 u 不能在 Ω 内部达到非负极大值。

Proof. 若否，存在 $x_0 \in \Omega$ 使 $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u = M \geq 0$ 。在该点处 $\nabla u(x_0) = 0$ ，Hesse 矩阵半负定，故 $\Delta u(x_0) \leq 0$ 。又 $c(x_0) \leq 0$ ，从而

$$-\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq 0 + c(x_0)M \geq 0.$$

这与 $-\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \leq 0$ 矛盾，除非所有不等号均为等式。但即使为等式，由强极值原理进一步讨论仍可推出矛盾（细节略）。因此引理成立。 $\square$

Theorem 3.4.8 ▶ 一般弱极值原理

设 $c(x) \leq 0$ 且在 $\overline{\Omega}$ 上有界， $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 满足

$$-\Delta u + c(x)u \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

则 u 的非负最大值必在边界上取到, 即

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+, \quad u^+ = \max(u, 0).$$

Proof. 任取 $\varepsilon > 0$, 作辅助函数

$$w(x) = u(x) + \varepsilon e^{\alpha x_1},$$

其中 $\alpha > 0$ 待定。计算

$$-\Delta w + cw = (-\Delta u + cu) + \varepsilon e^{\alpha x_1}(-\alpha^2 + c).$$

因 c 有界, 可取 α 充分大使 $-\alpha^2 + c(x) \leq -1$ 对一切 $x \in \overline{\Omega}$ 成立。再由 $-\Delta u + cu \leq 0$, 得

$$-\Delta w + cw \leq -\varepsilon e^{\alpha x_1} < 0 \quad \text{in } \Omega.$$

由引理, w 的非负最大值只能在边界取到, 即

$$\sup_{\overline{\Omega}} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

于是

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\overline{\Omega}} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \sup_{\partial\Omega} e^{\alpha x_1}.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即得 $\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$ 。由于 u 连续且 $\overline{\Omega}$ 紧, 上确界即最大值, 故结论成立。 $\square$

3.5 Dirichlet 问题的求解与 Poisson 核公式

3.5.1 Dirichlet 问题的求解思路

对于 Laplace 方程的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \forall x \in \Omega \\ u = \varphi, & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

1. $\Delta u = 0$ 的基本解: $K(x, y) = k(x, y) + w(x, y)$, 其中

$$\Delta w = 0, \quad k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n r^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

2. 由 Cauchy 数据表示 $u(x)$:

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) \Delta u dy - \int_{\partial\Omega} \left(k(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial k}{\partial n} \right) dS, \quad \forall x \in \Omega.$$

由 $\Delta u = 0$, 则

$$\int_{\Omega} k(x, y) \Delta u dy = 0.$$

已知 Dirichlet 边界条件 $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, 从而为避免求 $\frac{\partial u}{\partial n}$, 仅需通过函数 $w(x)$ 使得 $(k(x, y) + w(x, y))|_{\partial\Omega} = 0$.

3.5.2 Green 函数

Definition 3.5.1 ▶ Green 函数

设 $k(x, y) = \Phi(|x - y|)$, $\psi(x, y)$ 是对 $\forall y \in \Omega$ 的 $\Delta_x \psi = 0$ 的解 (即边界上是已知的), 若对 $\forall x \in \Omega, \forall y \in \partial\Omega$, 在 $x \neq y$ 时满足

$$k(x, y) = \Phi(|x - y|),$$

且对 $\forall x \in \partial\Omega$ 和 $\forall y \in \Omega$ 有 $k(x, y) = 0$, 则称以 $k(x, y)$ 为极点的基本解 $G(x, y)$ 是区域的 Laplace 方程的 Green 函数。

· 求 $G(x, y)$ 等价于求解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta_x G = 0 \\ G = -k(x, y). \end{cases}$$

· 在某些情况下可以显式写出 $G(x, y)$, 如半空间或球上的 Green 函数利用镜像法得到, 即 Poisson 求和公式.

· 当 $n = 2$ 时, Laplace 方程在共形映射下不变, 故此性质可用于多连通域的共形变换获得其 Green 函数.

3.5.3 Poisson 核公式 (给出了 Dirichlet 问题的解)

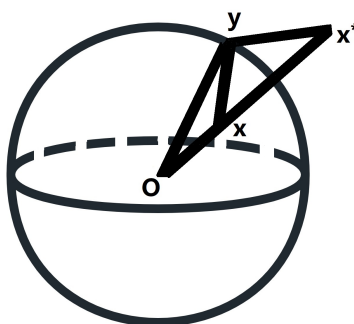


Figure 3.1: 三角形相似

Theorem 3.5.2 ▶ Poisson 核公式

若 $u \in C^2(\overline{B(0, a)})$ 中的 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 满足边界条件即 $u|_{S(0, a)} = \partial B(0, a)$ 上的 u , 则当 $x \in B(0, a)$ 时方程的解 $u(x)$ 满足 Poisson 核公式:

$$u(x) = \int_{S(0, a)} \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \varphi(y) dS_y, \forall x \in B(0, a).$$

Proof. 记 $\Omega = B(0, a)$, $\overline{\Omega} = \overline{B(0, a)}$. 设 $x \in B(0, a)$, 令 $x^* = \frac{a^2}{|x|^2}x$, 则 $|x^*| = \frac{a^2}{|x|}$, 从而 $|x^*| > a$. 于是根据三角形相似导致的三边成比例, 有

$$\frac{|x - y|}{|x^* - y|} = \frac{|x|}{a}, \quad \forall y \in \partial B(0, a),$$

即

$$|x^* - y| = \frac{a}{|x|} |x - y|, \quad \forall y \in S(0, a).$$

因此

$$\frac{1}{|x^* - y|^{n-2}} = \frac{a^{n-2}}{|x|^{n-2}} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}.$$

又 $k(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x - y|^{2-n}$, 故

$$k(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x - y|^{2-n}, \quad k(x^*, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x^* - y|^{2-n}.$$

令 $G(x, y) = k(x, y) - \left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} k(x^*, y)$, 代入得

$$G(x, y) = k(x, y) - \left(\frac{a^{n-2}}{|x|^{n-2}}\right) \left(\frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{a^{n-2}}{|x|^{n-2}} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}\right).$$

由于 $\Delta_x K(x, y^*) = 0$ 对任意 $x, y^* \in B(0, a)$ 成立, 所以

$$G(x, y) = K(x, y) - \left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} K(x^*, y),$$

这是以 y^* 为极点的基本解。从而 $G(x, y)$ 在 ∂B 上满足 $G = 0$, 且 $G(x, y) - K(x, y)$ 在 $B(0, a)$ 内调和。这样便构造出边界上为零、具有所需奇性的格林函数。

将 $G(x, y)$ 代入 $u(x)$ 的格林表示公式:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u \, dy - \int_{\partial \Omega} \left(G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \right) dS \\ &= \int_{\partial B(0, a)} u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} dS_y, \quad \partial \Omega = \partial B(0, a). \end{aligned}$$

定义 Poisson 核 $H(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial n}$, 展开计算:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{\partial}{\partial n} \left(K(x, y) - \left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} K(x^*, y) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{(2-n)\omega_n} |x - y|^{2-n} - \left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x^* - y|^{2-n} \right). \end{aligned}$$

在 ∂B 上, 外法向导数 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ 且 $r = a$, 于是

$$H(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \left(\frac{a}{|x|} \right)^{n-2} \frac{1}{|x^* - y|^{n-2}} \right].$$

利用几何关系 $|x^* - y|^2 = \frac{a^2}{|x|^2} |x - y|^2$, 可得

$$H(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \left[(2 - n) |x - y|^{n-2} - \left(\frac{a}{|x|} \right)^{n-2} |x^* - y|^{n-2} \right],$$

整理为

$$H(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \left[|x - y|^{2-n} - \left(\frac{a}{|x|} \right)^2 |x^* - y|^{2-n} \right] \frac{1}{r^{n-2}}.$$

再结合 $|x - y|^{n-2} = \frac{a^2}{|x|^2} |x^* - y|^{n-2}$, 进一步推导:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{1}{a\omega_n} \left(|x - y|^{2-n} - \left(\frac{a}{|x|} \right)^n |x^* - y|^{2-n} \right) \\ &= \frac{1}{a\omega_n |x - y|^n} (a^2 - |x|^2) = \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - y|^n}. \end{aligned}$$

因此,

$$u(x) = \int_{S(0,a)} \frac{a^2 - |x|^2}{a\omega_n |x - y|^n} u(y) dS_y = \int_{S(0,a)} \frac{a^2 - |x|^2}{a\omega_n |x - y|^n} \varphi(y) dS_y.$$

□

Definition 3.5.3 ► Poisson 核

令

$$H(x, y) = \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - y|^n},$$

则 Poisson 核公式化为

$$u(x) = \int_{S(0,a)} H(x, y) \varphi(y) dS_y.$$

称 H 为 Poisson 核.

- 本定理不能保证解的唯一性, 只能保证依据球域上构造的 Green 函数所得的解的存在性。
- 对于 $n=2$, 可给出相同公式, 这只需将

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a|x - \xi|}{|\xi||x - \xi^*|} \quad \Delta_x G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x - \xi}{|x - \xi|^2} - \frac{x - \xi^*}{|x - \xi^*|^2} \right)$$

代入计算即可。

- 对于非球状区域, 可做共形映射, 此类性质与结论仍成立。

Proposition 3.5.4 ▶ Poisson 核的性质

Poisson 核 $H(x, y) = \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - y|^n}$ 有如下性质:

- $H(x, y) \in C^\infty, \forall x \neq y, x \in B(0, a), y \in S(0, a)$ 。
- $\Delta_x H(x, y) = 0, \forall x \neq y, x \in B(0, a), y \in S(0, a)$ 。
- $\int_{S(0, a)} H(x, y) dS_y = 1, \forall x \in B(0, a)$ 。
- $H(x, y) > 0, \forall x \neq y, x \in B(0, a), y \in S(0, a)$ 。
- 当 $|y| = a$ 时, 对 $\forall |x| < a, \lim_{x \rightarrow x_0 \in \partial B} H(x, y) = 0$ 且该收敛是一致收敛的。

Proof. (a) 因为 $x \neq y$, 所以 $|x - y| \neq 0$, 而 Poisson 核的表达式中分母非零且分子关于 x 光滑, 故 $H(x, y) \in C^\infty$ 。

(b) 由定义,

$$H(x, y) = \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) = \frac{\partial}{\partial n} \left(K(x, y) - \left(\frac{a}{|x|} \right)^{n-2} K(x^*, y) \right).$$

这里 $K(x, y)$ 是基本解, 而 $K(x^*, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x^* - y|^{n-2}$ 。注意到 $-\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} K(x^*, y)$ 作为 x 的函数在 $B(0, a)$ 内是调和的。事实上, 利用反演点的几何关系:

$$\begin{aligned} |x^* - y|^2 &= \left| \frac{a^2}{|x|^2} x - y \right|^2 = \frac{a^4}{|x|^4} |x|^2 - 2 \frac{a^2}{|x|^2} x \cdot y + |y|^2 \\ &= \frac{a^2}{|x|^2} (|x|^2 - 2x \cdot y + a^2) = \frac{a^2}{|x|^2} (|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2) = \left(\frac{a}{|x|} \right)^2 |x - y|^2, \end{aligned}$$

其中用到了 $|y| = a$ 。从而

$$|x^* - y| = \frac{a}{|x|} |x - y|.$$

因此 $K(x^*, y)$ 在 $x \neq y$ 时关于 x 调和, 进而 $G(x, y)$ 作为两项的线性组合, 当 $x \neq y$ 时也调和, 即 $\Delta_x G(x, y) = 0$ 。因为 H 是 G 的外法向导数, Δ_x 与 $\frac{\partial}{\partial n}$ 在光滑区域上可交

换, 所以

$$\Delta_x H(x, y) = 0, \quad \forall x \neq y, x \in B(0, a), y \in S(0, a).$$

(c) 取 $u \equiv 1$, 则 $\Delta u = 0$ 且边界值恒为 1. 代入 Poisson 核公式得

$$1 = u(x) = \int_{S(0, a)} \frac{a^2 - |x|^2}{a\omega_n |x - y|^n} dS_y = \int_{S(0, a)} H(x, y) dS_y.$$

所以 $\int_{S(0, a)} H(x, y) dS_y = 1$ 对一切 $x \in B(0, a)$ 成立。

(d) 当 $|x| < a$ 且 $|y| = a$ 时, $a^2 - |x|^2 > 0$, 而 $|x - y|^n > 0$, 故 $H(x, y) > 0$.

(e) 设 $|x - y| \geq \varepsilon > 0$. 当 $|x| < a$ 时,

$$H(x, y) = \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \leq \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{\varepsilon^n}.$$

令 $x \rightarrow x_0 \in \partial B$ (即 $|x| \rightarrow a$), 则分子 $a^2 - |x|^2 \rightarrow 0$, 于是上式右端趋于 0. 由于估计式对满足 $|x - y| \geq \varepsilon$ 的一切 y 一致成立, 当 x 充分靠近边界时 $H(x, y)$ 在该区域上一致收敛于 0. □

Theorem 3.5.5 ▶ Dirichlet 问题解的连续性

令 f 在 $S(0, a)$ 上连续, 则函数 $u(x)$ 由 $f(y)$ 在 $|y| = a$ 上给出, 由 Poisson 核公式 $u(x) = \int_{S(0, a)} H(x, y) f(y) dS_y$ 在 $|y| = a$ 上给出, 从而 $u(x)$ 在 $|x| < a$ 连续, 当 $|x| < a$ 时 u 是 C^∞ 调和函数。

Proof. 先证 $u \in C^\infty$ 且调和. 由于 $H \in C^\infty$ 且 $\Delta_x H = 0$, 积分号下求导可得 $u \in C^\infty$ 且 $\Delta u = 0$.

再证 u 在边界 $|y| = a$ 上连续. 任取 $\xi \in \partial B(0, a)$, 需证 $\lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = f(\xi)$. 由性质 (c), 对任意 $x \in B(0, a)$ 有

$$f(\xi) = \int_{S(0, a)} H(x, y) f(\xi) dS_y.$$

因此

$$u(x) - f(\xi) = \int_{S(0, a)} H(x, y) (f(y) - f(\xi)) dS_y.$$

将球面分为两部分：对给定的 $\delta > 0$ ，记

$$I_1 = \int_{|y-\xi|<\delta} H(x,y)(f(y) - f(\xi)) dS_y, \quad I_2 = \int_{|y-\xi|\geq\delta} H(x,y)(f(y) - f(\xi)) dS_y,$$

则 $u(x) - f(\xi) = I_1 + I_2$ 。

对 I_1 ：任给 $\varepsilon > 0$ ，由 f 的连续性，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使得当 $y \in S(0, a)$ 且 $|y - \xi| < \delta$ 时， $|f(y) - f(\xi)| < \varepsilon$ 。利用性质 (c) 与 (d)，

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{|y-\xi|<\delta} H(x,y) |f(y) - f(\xi)| dS_y \\ &< \varepsilon \int_{|y-\xi|<\delta} H(x,y) dS_y \leq \varepsilon \int_{S(0,a)} H(x,y) dS_y = \varepsilon. \end{aligned}$$

对 I_2 ：记 $M = \sup_{\partial B(0,a)} |f|$ 。由性质 (e)，当 $x \rightarrow \xi$ 时， $H(x,y)$ 在区域 $|y - \xi| \geq \delta$ 上一致趋于 0。故对于上述 ε ，存在 $\eta > 0$ ，使得当 $|x - \xi| < \eta$ 且 $x \in B(0, a)$ 时，

$$\sup_{|y-\xi|\geq\delta} H(x,y) < \frac{\varepsilon}{2M \omega_n a^{n-1}}.$$

于是

$$|I_2| \leq 2M \int_{|y-\xi|\geq\delta} H(x,y) dS_y < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M \omega_n a^{n-1}} \cdot \omega_n a^{n-1} = \varepsilon.$$

结合两部分的估计，当 $|x - \xi| < \eta$ 时，

$$|u(x) - f(\xi)| \leq |I_1| + |I_2| < 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，得 $\lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = f(\xi)$ ，即 u 在边界点 ξ 处连续。由 ξ 的任意性， u 在整个边界上连续。 □

3.5.4 应用：根据极值原理推导调和函数的估计

Proposition 3.5.6 ▶ 调和函数的一阶导数估计（球）

设 $\Omega = B(0, a)$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ，且在 Ω 中有 $\Delta u = 0$ ，则 $\max_{\bar{\Omega}} |u_{x_i}| \leq \frac{n}{a} \max_{\partial\Omega} |u|$ 。

Proof. 由 Poisson 核公式，

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{S(0,a)} \frac{a^2 - |x|^2}{a\omega_n |x-y|^n} u(y) dS_y \right) = \frac{1}{a\omega_n} \int_{S(0,a)} u(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \right) dS_y,$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \right) &= \frac{-2x_i}{|x-y|^n} - \frac{n(a^2 - |x|^2)}{|x-y|^{n+2}} (x_i - y_i) \\ &= \frac{-2x_i |x-y|^n + n(a^2 - |x|^2)(x_i - y_i)}{|x-y|^{n+2}}, \end{aligned}$$

从而代入有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \frac{1}{a\omega_n} \int_{S(0,a)} u(y) \left(\frac{-2x_i}{|x-y|^n} - \frac{n(a^2 - |x|^2)(x_i - y_i)}{|x-y|^{n+2}} \right) dS_y \\ &\leq \frac{n}{a\omega_n a} \max_{\partial\Omega} |u| \int_{S(0,a)} \frac{1}{|x-y|^n} dS_y. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.5.7 ▶ 调和函数的一阶导数估计（一般区域）

对任意开集 Ω , $\Delta u = 0, \forall x \in \Omega$, 取球心为 x 半径为 $d(x) = d(x, \partial\Omega)$, 则 $\max_{\Omega} |u_x| \leq \frac{n}{d(x, \partial\Omega)} \max_{\bar{\Omega}} |u|$.

Proof. 考虑 $d(x)$ 的球 $B(x, d)$, 令 $a \rightarrow d(x)$ 并应用上一命题的结论立得。 □

注: u 的一阶导数在 Ω 中有界, 则 u 的高阶导数有界, 利用极值原理可进一步证明 u 的各阶导数在紧集上有界, 从而有界函数有界。

Proposition 3.5.8 ▶ 调和函数序列的一致收敛

调和函数的一致收敛极限仍是调和的。

Proof. 设 $\{u_n\} \subset C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 满足 $\Delta u_n = 0$ 在 Ω 内, 且 u_n 在 Ω 上一致收敛于 u 。则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in \Omega, |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

考虑差函数 $v_{nm} = u_n - u_m$ 。由线性性, v_{nm} 亦为调和函数。根据极值原理, v_{nm} 在

$\bar{\Omega}$ 上的最大值必在边界 $\partial\Omega$ 上取到, 即

$$\sup_{\Omega} |v_{nm}| = \max_{\partial\Omega} |v_{nm}|.$$

由 u_n 的一致收敛性, $\{u_n\}$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的 Cauchy 列, 故 $\max_{\partial\Omega} |v_{nm}| \rightarrow 0$ 当 $n, m \rightarrow \infty$ 。因而 $\{u_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于某个连续函数 u 。

再利用调和函数的导数内估计 (见应用部分), 对任意紧子集 $\omega \subset \Omega$,

$$\sup_{\omega} |\nabla v_{nm}| \leq \frac{C}{d(\omega, \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |v_{nm}| \rightarrow 0.$$

因此 $\{\nabla u_n\}$ 在紧子集上一致收敛, 其极限必为 ∇u 。类似地, 二阶导数序列也收敛, 故 $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u = \lim \Delta u_n = 0$. □

推广: 若对 $\forall x \in \Omega, u_k < M$, 则在紧集 ω 中 u_k 及其一阶偏导有公共上界。

由 Arzela-Ascoli 定理, 存在 u_k 子列在 ω 中一致收敛于 u , 类似上定理可知 u 的导数也收敛。

Example 3.5.9 ▶ 课后练习: 调和函数常数优化与高阶导数估计

设 $\Omega = B(0, a) \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u = 0$ 在 Ω 中。

(a) 证明

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{2n\omega_{n-1}}{a(n-1)\omega_n} \max_{|x|=a} |u(x)|,$$

且该上界是最优的。

(b) 设 $\Delta u = 0$ 且 $|u(x)| < M$ 对一切 $|x - \xi| < a$ 成立。记

$$\gamma_n = \frac{2n\omega_{n-1}}{(n-1)\omega_n}.$$

证明:

(i) $|D^\alpha u(\xi)| < \left(\frac{m\gamma_n}{a}\right)^m M$ 对一切 $|\alpha| = m$ 成立;

(ii) $u(x)$ 在其关于 $x - \xi$ 的幂级数表示下, 收敛域包含

$$|x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n| \leq \frac{a}{e\gamma_n}.$$

Proof.

(a) 最优导数估计: 对 $B(0, a)$ 上的调和函数 u , 由均值公式

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n a^{n-1}} \int_{|y|=a} u(y) dS_y,$$

对其求偏导可得

$$u_{x_i}(0) = \frac{n}{\omega_n a^{n+1}} \int_{|y|=a} y_i u(y) dS_y. \quad (1)$$

其中 ω_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积, ω_{n-1} 为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中单位球面的面积。

由 (1) 式直接取绝对值,

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{n}{\omega_n a^{n+1}} \int_{|y|=a} |y_i| |u(y)| dS_y \leq \frac{n}{\omega_n a^{n+1}} \max_{|y|=a} |u(y)| \int_{|y|=a} |y_i| dS_y.$$

计算球面积分 $I = \int_{|y|=a} |y_i| dS_y$ 。由对称性不妨设 $i = n$, 引入球坐标:

$$y_n = a \cos \theta_1, \quad dS_y = a^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 d\omega_{n-1},$$

其中 $\theta_1 \in [0, \pi]$, $d\omega_{n-1}$ 为 $(n-1)$ 维单位球面的面积元, 总面积为 ω_{n-1} 。于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{|y|=a} |y_n| dS_y = a^n \omega_{n-1} \int_0^\pi |\cos \theta_1| \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \\ &= a^n \omega_{n-1} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta_1 \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

令 $t = \sin \theta_1$, 则 $dt = \cos \theta_1 d\theta_1$,

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta_1 \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 = \int_0^1 t^{n-2} dt = \frac{1}{n-1}.$$

因此

$$I = \frac{2a^n \omega_{n-1}}{n-1}.$$

代入原估计式得

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{n}{\omega_n a^{n+1}} \cdot \max_{|y|=a} |u(y)| \cdot \frac{2a^n \omega_{n-1}}{n-1} = \frac{2n\omega_{n-1}}{(n-1)\omega_n} \frac{\max_{|y|=a} |u(y)|}{a}. \quad (2)$$

记 $\gamma_n = \frac{2n\omega_{n-1}}{(n-1)\omega_n}$, 即得

$$|u_{x_i}(0)| \leq \frac{\gamma_n}{a} \max_{|y|=a} |u(y)|.$$

最优性: 考虑边值函数 $v(x) = \text{sgn}(x_n)$ 在 $|x| = a$ 上, 令 u 为 $B(0, a)$ 内的 Poisson 积分。此时 u 在 $\overline{B(0, a)}$ 上连续 (赤道附近无影响), 且 $\max |u| = 1$ 。代入 (1) 式:

$$u_{x_n}(0) = \frac{n}{\omega_n a^{n+1}} \int_{|y|=a} y_n \text{sgn}(y_n) dS_y = \frac{n}{\omega_n a^{n+1}} \int_{|y|=a} |y_n| dS_y = \frac{\gamma_n}{a}.$$

因此常数 $\frac{\gamma_n}{a}$ 确实可以达到, 无法再小, 故所给上界是最优的。

(b) 高阶导数的估计与解析性: 现在设 $\Delta u = 0$ 且 $|u(x)| < M$ 当 $|x - \xi| < a$ 。记 $\gamma_n = \frac{2n\omega_{n-1}}{(n-1)\omega_n}$ 。由 (a) 已证: 若 v 在 $B(x_0, R)$ 中调和, 则

$$|\nabla v(x_0)| \leq \frac{\gamma_n}{R} \max_{\partial B(x_0, R)} |v|. \quad (3)$$

(i) m 阶导数估计 设 α 为多重指标且 $|\alpha| = m$ 。对阶数 m 归纳证明

$$|D^\alpha u(\xi)| < \left(\frac{m\gamma_n}{a}\right)^m M. \quad (4)$$

取一串同心球, 半径依次为 $r_k = \frac{k}{m}a, k = 1, 2, \dots, m$ 。已知 $|u| < M$ 在 $B(\xi, a) = B(\xi, r_m)$ 中成立。对 $k = 1, \dots, m$, 设 $|\beta| = k - 1$, 则 $D^\beta u$ 在 $B(\xi, r_{m-k+1})$ 中调和 (该球半径大于 $a - \frac{k-1}{m}a$)。由 (3) 式, 对任意 $|\alpha| = k$, 存在 i 及 $|\beta| = k - 1$ 使得 $D^\alpha u = \partial_i(D^\beta u)$, 在球 $B(\xi, r_1) = B(\xi, \frac{a}{m})$ 上应用 (3):

$$|D^\alpha u(\xi)| \leq \frac{\gamma_n}{a/m} \max_{\partial B(\xi, a/m)} |D^\beta u| = \frac{m\gamma_n}{a} \max_{|x-\xi|=a/m} |D^\beta u(x)|.$$

由于 $\partial B(\xi, a/m) \subset B(\xi, r_{m-k+1})$, 该最大值不超过该球内的上确界。递推地令

$$M_k := \sup_{|\alpha|=k} \sup_{B(\xi, \frac{m-k}{m}a)} |D^\alpha u|,$$

则 $M_0 < M$, 且上述推理给出

$$M_k \leq \frac{m\gamma_n}{a} M_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m.$$

迭代得到

$$M_m \leq \left(\frac{m\gamma_n}{a}\right)^m M_0 < \left(\frac{m\gamma_n}{a}\right)^m M.$$

特别地, 对任意 $|\alpha| = m$ 有 $|D^\alpha u(\xi)| \leq M_m < \left(\frac{m\gamma_n}{a}\right)^m M$, 即 (4) 式。

(ii) 幂级数表示的区域因为 u 在 $|x - \xi| < a$ 上调和, 故在 ξ 处实解析, 可展为 Taylor 级数

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(\xi)}{\alpha!} (x - \xi)^\alpha,$$

其中 $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $(x - \xi)^\alpha = \prod_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^{\alpha_i}$ 。

利用 (i) 的估计, 对 m 阶所有项求绝对值和:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} \left| \frac{D^\alpha u(\xi)}{\alpha!} (x - \xi)^\alpha \right| &\leq M \left(\frac{m\gamma_n}{a}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \prod_{i=1}^n |x_i - \xi_i|^{\alpha_i} \\ &= M \left(\frac{m\gamma_n}{a}\right)^m \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \prod_{i=1}^n |x_i - \xi_i|^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

由多项式定理,

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \prod_{i=1}^n |x_i - \xi_i|^{\alpha_i} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - \xi_i| \right)^m =: \rho^m,$$

其中 $\rho = |x_1 - \xi_1| + \cdots + |x_n - \xi_n|$ 。于是该项和

$$S_m := \sum_{|\alpha|=m} \left| \frac{D^\alpha u(\xi)}{\alpha!} (x - \xi)^\alpha \right| \leq M \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\gamma_n \rho}{a} \right)^m.$$

运用不等式 $m! \geq (m/e)^m$, 得 $\frac{m^m}{m!} \leq e^m$, 从而 $S_m \leq M \left(\frac{e\gamma_n \rho}{a} \right)^m$. 当 $\rho < \frac{a}{e\gamma_n}$ 时, $\sum S_m$ 被公比小于 1 的几何级数控制, 故整个 Taylor 级数绝对收敛; 在紧子集 $\rho \leq \frac{a}{e\gamma_n}$ 上一致收敛。由解析函数的唯一性, 该级数在所述区域内必等于 $u(x)$ 。因此 $u(x)$ 在区域

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i - \xi_i| \leq \frac{a}{e\gamma_n} \right\}$$

内由其关于 $x - \xi$ 的幂级数表示。证毕。 □

3.6 Perron 方法：一般区域 Dirichlet 问题解的存在性

在上一节中，我们利用 Poisson 核公式给出了球上 Dirichlet 问题解的显式表达式。本节通过 Perron 方法将该结论推广到一般区域，证明任意有界区域上 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u = f, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

解的存在性，其中 $f \in C(\partial\Omega)$ ， $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集。

基本思路：构造一个次调和函数类，取其上确界，证明该上确界即为所求的调和函数，且连续取到边界值。

Definition 3.6.1 ▶ 下函数类

设 $f \in C(\partial\Omega)$ 。定义如下 $\sigma_f(\overline{\Omega})$ 中的函数称为下函数：

$$\sigma_f(\overline{\Omega}) := \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega) \mid u \leq f \text{ 在 } \partial\Omega\}.$$

由极值原理，任意 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$ 满足

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} f, \quad \forall x \in \Omega.$$

又常数函数 $m := \min_{\partial\Omega} f$ 属于 $\sigma_f(\overline{\Omega})$ ，故 $\sigma_f(\overline{\Omega})$ 非空且有上界。于是可定义

$$w_f(x) = \sup_{u \in \sigma_f(\overline{\Omega})} u(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.2)$$

目标是证明 w_f 在 Ω 内调和，且可以连续延拓到边界上并满足 $w_f|_{\partial\Omega} = f$ 。

Definition 3.6.2 ▶ 障碍函数

设 $\eta \in \partial\Omega$ 。若存在函数 $Q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega)$ 满足

$$Q_\eta(\eta) = 0, \quad Q_\eta(x) < 0 \quad (\forall x \in \partial\Omega, x \neq \eta),$$

则称 Q_η 为 Ω 在点 η 处的障碍函数。

Example 3.6.3 ▶ 外球条件与障碍假设

若开集 Ω 满足：对任意的 $\eta \in \partial\Omega$ ，总存在开球 $B(\zeta, \rho)$ ，使得 $\overline{B(\zeta, \rho)} \cap \overline{\Omega} = \{\eta\}$ ，则 Ω 满足障碍假设。

由外球条件，可取球心 ζ 及半径 $\rho > 0$ 使得 $\overline{\Omega} \cap \overline{B(\zeta, \rho)} = \{\eta\}$ ，且对一切 $x \in \overline{\Omega}$ 有 $|x - \zeta| \geq \rho$ ，等号仅当 $x = \eta$ 。令

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

为 Laplace 方程的基本解（不计符号）。因 Φ 在 $r > 0$ 时严格递减，且当 $|x - \zeta| > 0$ 时调和，定义

$$Q_\eta(x) = \Phi(|x - \zeta|) - \Phi(\rho), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

则 $Q_\eta(\eta) = \Phi(\rho) - \Phi(\rho) = 0$ 。对 $x \in \overline{\Omega} \setminus \{\eta\}$ ，有 $|x - \zeta| > \rho$ ，故 $\Phi(|x - \zeta|) < \Phi(\rho)$ ，从而 $Q_\eta(x) < 0$ 。在 Ω 内 $|x - \zeta| > 0$ ，故 $\Delta Q_\eta = 0$ ， $Q_\eta \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \subset \sigma(\Omega)$ 。此即符合要求的障碍函数。

为处理边界值，需要引入障碍函数。障碍函数的存在性依赖于区域的几何性质。以下假设 Ω 的每一边界点均存在障碍函数（后文将利用该假设证明边界值的连续性）。

Definition 3.6.4 ▶ 升函数（Poisson 提升）

设 $u \in C^0(\overline{\Omega})$ ，开球 $B(\xi, \rho)$ 满足 $\overline{B(\xi, \rho)} \subset \Omega$ 。定义 u 在 $B(\xi, \rho)$ 上的提升 $u_{\xi, \rho}$ 为

$$u_{\xi, \rho}(x) = \begin{cases} \text{在 } B(\xi, \rho) \text{ 内等于与 } u \text{ 在 } S(\xi, \rho) \text{ 上相同的调和函数,} \\ u(x), \end{cases} \quad x \in \overline{\Omega} \setminus B(\xi, \rho).$$

合理性：由 Poisson 公式，存在唯一的在 $B(\xi, \rho)$ 内调和、在 $\overline{B(\xi, \rho)}$ 上连续且在 $S(\xi, \rho)$ 上等于 u 的函数，故 $u_{\xi, \rho}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续。

下面的引理给出了升函数的基本性质。

Proposition 3.6.5 ▶ Lemma 2 (提升的性质)

设 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, 开球 $B(\xi, \rho)$ 满足 $\overline{B(\xi, \rho)} \subset \Omega$ 。则

$$(i) u(x) \leq u_{\xi, \rho}(x) \quad (\forall x \in \Omega), \quad (ii) u_{\xi, \rho} \in \sigma_f(\overline{\Omega}).$$

Proof. (i) 在 $\Omega \setminus B(\xi, \rho)$ 上 $u_{\xi, \rho} = u$ 。在球 $B(\xi, \rho)$ 内, u 次调和, $u_{\xi, \rho}$ 调和, 故 $u - u_{\xi, \rho}$ 在 B 内次调和。该差在 $\overline{B}$ 上连续且在 $S(\xi, \rho)$ 上为零, 由极值原理得 $u - u_{\xi, \rho} \leq 0$ 在 B 内, 即 $u \leq u_{\xi, \rho}$ 。

(ii) 连续性已知。在 $\partial\Omega$ 上 $u_{\xi, \rho} = u \leq f$, 边界条件满足。下证 $u_{\xi, \rho} \in \sigma(\Omega)$: 需对任意 $\zeta \in \Omega$ 及充分小 $\tau > 0$ 验证 $u_{\xi, \rho}(\zeta) \leq M_{u_{\xi, \rho}}(\zeta, \tau)$ 。

- 若 $\zeta \notin \overline{B(\xi, \rho)}$, 则在 ζ 附近 $u_{\xi, \rho} = u$, 由 $u \in \sigma(\Omega)$ 得证。
- 若 $\zeta \in B(\xi, \rho)$, 则 $u_{\xi, \rho}$ 在 ζ 附近调和, 由平均值等式知成立。
- 若 $\zeta \in S(\xi, \rho)$, 则

$$u_{\xi, \rho}(\zeta) = u(\zeta) \leq M_u(\zeta, \tau) \leq M_{u_{\xi, \rho}}(\zeta, \tau),$$

其中第一步用 $u \in \sigma(\Omega)$, 第二步用 (i) 及平均值的单调性。

故 $u_{\xi, \rho} \in \sigma(\Omega)$, 从而 $u_{\xi, \rho} \in \sigma_f(\overline{\Omega})$ 。 □

Proposition 3.6.6 ▶ Lemma 3 (次调和函数与提升的比较)

设 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, $B(\xi, \rho)$ 同上。若 u 在 $B(\xi, \rho)$ 内不是调和函数, 则存在 $x \in B(\xi, \rho)$ 使得 $u(x) < u_{\xi, \rho}(x)$ 。

Proof. 由 Lemma 2 (i) 已有 $u \leq u_{\xi, \rho}$ 在 Ω 上。若对一切 $x \in B(\xi, \rho)$ 均有 $u(x) = u_{\xi, \rho}(x)$, 则 u 在 B 内等于调和函数 $u_{\xi, \rho}$, 从而自身在该球内调和, 与假设矛盾。故存在 $x \in B(\xi, \rho)$ 使严格不等式成立。 □

Proposition 3.6.7 ▶ Lemma 4 (调和函数的不动点性质)

设 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, $B(\xi, \rho)$ 同上。若 u 在 $B(\xi, \rho)$ 内已是调和函数, 则 $u_{\xi, \rho} = u$ 。

Proof. 在 $S(\xi, \rho)$ 上 $u_{\xi, \rho} = u$, 且二者在 B 内均调和, 由 Dirichlet 问题解的唯一性得在 B 内 $u_{\xi, \rho} = u$; 在 B 外二者显然相等。故整体 $u_{\xi, \rho} = u$ 。 □

Proposition 3.6.8 ▶ Lemma 5 (有限个下函数的最大值仍为下函数)

若 $u_1, \dots, u_k \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, 则 $v(x) := \max\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}$ 也属于 $\sigma_f(\overline{\Omega})$ 。

Proof. v 连续显然。对任意 $\xi \in \Omega$ 及充分小 $\tau > 0$, 设 $v(\xi) = u_j(\xi)$, 则

$$v(\xi) = u_j(\xi) \leq M_{u_j}(\xi, \tau) \leq M_v(\xi, \tau),$$

故 $v \in \sigma(\Omega)$ 。在边界上 $v \leq f$ 由每个 $u_j \leq f$ 保证。因此 $v \in \sigma_f(\overline{\Omega})$ 。 □

Theorem 3.6.9 ▶ Lemma 6 (w_f 的调和性)

由 (3.2) 定义的 w_f 在 Ω 内调和。

Proof. 任取开球 $B(\xi, \rho)$ 使得 $\overline{B(\xi, \rho)} \subset \Omega$, 取定 $\rho' \in (0, \rho)$. 下证 w_f 在 $B(\xi, \rho')$ 内调和。

1. 构造逼近序列: 在 $B(\xi, \rho')$ 中取一个稠密点列 $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ 。对每个 k , 由 $w_f(x^k) = \sup\{u(x^k) : u \in \sigma_f(\overline{\Omega})\}$, 存在序列 $\{u_k^j\}_{j=1}^\infty \subset \sigma_f(\overline{\Omega})$ 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_k^j(x^k) = w_f(x^k).$$

令

$$u^j(x) := \max\{u_1^j(x), u_2^j(x), \dots, u_j^j(x)\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

由 Lemma 5, $u^j \in \sigma_f(\overline{\Omega})$ 。对任意固定的 k , 当 $j \geq k$ 时 $u^j \geq u_k^j$, 于是

$$u_k^j(x^k) \leq u^j(x^k) \leq w_f(x^k),$$

故 $\lim_{j \rightarrow \infty} u^j(x^k) = w_f(x^k)$ 。记 $m = \min_{\partial\Omega} f$, $M = \max_{\partial\Omega} f$ 。若有必要, 将 u^j 替换为 $\max\{u^j, m\}$, 可保证

$$m \leq u^j(x) \leq M \quad (\forall x \in \Omega).$$

这是因为 $u^j \geq m$, 且由极值原理 $u^j \leq \max_{\partial\Omega} u^j \leq M$ 。

2. 提升至调和函数: 对每个 u^j 在 $B(\xi, \rho)$ 上作提升, 记 $U^j := (u^j)_{\xi, \rho}$ 。由 Lemma 2, $U^j \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, $U^j \geq u^j$, 且 U^j 在 $B(\xi, \rho)$ 内调和。因为 $U^j \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, 有 $U^j \leq w_f$ 。于是

$$u^j(x^k) \leq U^j(x^k) \leq w_f(x^k),$$

从而 $\lim_{j \rightarrow \infty} U^j(x^k) = w_f(x^k)$ 对所有 k 成立。序列 $\{U^j\}$ 在 $B(\xi, \rho)$ 内一致有界 ($m \leq U^j \leq M$) 且每个调和。

3. 取收敛子列:

由调和函数的紧致性质 (一致有界的调和函数族为正规族), 存在子列 $\{U^{j_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ 在 $B(\xi, \rho')$ 的紧子集上一致收敛于一个在 $B(\xi, \rho')$ 内调和的函数 W 。

4. 证明 $w_f = W$ 在 $B(\xi, \rho')$ 上:

对稠密点列中的点 x^k , 由 $U^{j_\ell} \rightarrow W$ 一致收敛及 $U^j(x^k) \rightarrow w_f(x^k)$, 得

$$W(x^k) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} U^{j_\ell}(x^k) = w_f(x^k).$$

现对任意 $x \in B(\xi, \rho')$, 取 $\{x^{k_i}\} \subset \{x^k\}$ 使得 $x^{k_i} \rightarrow x$ 。由 W 的连续性,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} w_f(x^{k_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} W(x^{k_i}) = W(x).$$

由于 w_f 是一族连续函数的上确界, 它是下半连续的, 故对任何 $y \in B(\xi, \rho')$ 及 $y_n \rightarrow y$, 有

$$w_f(y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} w_f(y_n).$$

特别取 $y = x$, $y_n = x^{k_i}$, 得 $w_f(x) \leq \liminf w_f(x^{k_i}) = W(x)$ 。另一方面, 因每个 $U^{j_\ell} \in \sigma_f(\bar{\Omega})$, 故 $U^{j_\ell}(x) \leq w_f(x)$, 取极限得 $W(x) \leq w_f(x)$ 。因此 $w_f(x) = W(x)$ 对所有 $x \in B(\xi, \rho')$ 成立。故 w_f 在 $B(\xi, \rho')$ 内等于调和函数 W , 从而是调和的。

由球 $B(\xi, \rho)$ 的任意性, w_f 在整个 Ω 内调和。 $\square$

现在证明 w_f 可以连续地达到边界值 f 。设 $\eta \in \partial\Omega$, 我们将证明

$$\lim_{x \rightarrow \eta, x \in \Omega} w_f(x) = f(\eta).$$

这需要借助障碍函数。

Proposition 3.6.10 ▶ Lemma 7 (边界下极限)

对任意 $\eta \in \partial\Omega$ 及任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对所有 $x \in \Omega \cap B(\eta, \delta)$ 有

$$w_f(x) \geq f(\eta) - \varepsilon.$$

特别地, $\liminf_{x \rightarrow \eta} w_f(x) \geq f(\eta)$ 。

Proof. 由 f 在 $\partial\Omega$ 上连续, 存在 $\delta_1 > 0$ 使当 $y \in \partial\Omega$ 且 $|y - \eta| < \delta_1$ 时 $f(y) > f(\eta) - \varepsilon$ 。设 Q_η 为 η 处的障碍函数, 即 $Q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega)$, $Q_\eta(\eta) = 0$, 且对 $y \in \partial\Omega \setminus \{\eta\}$ 有 $Q_\eta(y) < 0$ 。因 $\{y \in \partial\Omega : |y - \eta| \geq \delta_1\}$ 为紧集, Q_η 在其上有负的最大值, 故存在常数 $c > 0$ 使 $Q_\eta(y) \leq -c$ 对所有满足 $|y - \eta| \geq \delta_1$ 的边界点成立。取 $K > 0$ 充分大, 使得

$$Kc \geq M - m + \varepsilon, \quad \text{其中 } M = \max_{\partial\Omega} f, \quad m = \min_{\partial\Omega} f.$$

定义

$$u(x) = f(\eta) - \varepsilon + KQ_\eta(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

显然 $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega)$ 。下证 $u \leq f$ 在 $\partial\Omega$ 上。

- 若 $y \in \partial\Omega$ 且 $|y - \eta| < \delta_1$, 则 $Q_\eta(y) \leq 0$, 故 $u(y) \leq f(\eta) - \varepsilon < f(y)$ 。
- 若 $y \in \partial\Omega$ 且 $|y - \eta| \geq \delta_1$, 则 $Q_\eta(y) \leq -c$, 于是

$$u(y) \leq f(\eta) - \varepsilon - Kc \leq f(\eta) - \varepsilon - (M - m + \varepsilon) \leq m \leq f(y).$$

因此 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, 从而 $u \leq w_f$ 在 Ω 上。由 Q_η 在 η 处连续且 $Q_\eta(\eta) = 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \Omega \cap B(\eta, \delta)$ 时 $KQ_\eta(x) > -\varepsilon$, 于是

$$w_f(x) \geq u(x) = f(\eta) - \varepsilon + KQ_\eta(x) > f(\eta) - 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性即得 $\liminf_{x \rightarrow \eta} w_f(x) \geq f(\eta)$ 。

□

Proposition 3.6.11 ▶ Lemma 8 (边界上极限)

对任意 $\eta \in \partial\Omega$ 及任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对所有 $x \in \Omega \cap B(\eta, \delta)$ 有

$$w_f(x) \leq f(\eta) + \varepsilon.$$

特别地, $\limsup_{x \rightarrow \eta} w_f(x) \leq f(\eta)$ 。

Proof. 考虑上调和下函数类。对连续边界值 $-f$, 类似定义 $\sigma_{-f}(\overline{\Omega})$ 及 w_{-f} 。注意到若 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$ 且 U 满足 $-U \in \sigma(\Omega)$, $U \geq f$ 在 $\partial\Omega$ 上, 则 $u - U$ 次调和且在边界上 ≤ 0 , 由极值原理 $u \leq U$ 。因而 $w_f \leq U$ 。特别地, 取 $U = -w_{-f}$ (可验证 $-w_{-f} \geq f$ 在边界

上, 且 w_{-f} 是下函数类上确界, 其负为上调和), 可得

$$w_f(x) \leq -w_{-f}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

现对 w_{-f} 应用 Lemma 7 (以 $-f$ 代替 f), 得

$$\liminf_{x \rightarrow \eta} w_{-f}(x) \geq -f(\eta).$$

于是

$$\limsup_{x \rightarrow \eta} w_f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \eta} (-w_{-f}(x)) = -\liminf_{x \rightarrow \eta} w_{-f}(x) \leq f(\eta).$$

此即所证。 □

结合 Lemma 7 与 Lemma 8, 立即得到对任意 $\eta \in \partial\Omega$,

$$\lim_{x \rightarrow \eta} w_f(x) = f(\eta).$$

因此若定义 $w_f|_{\partial\Omega} = f$, 则 $w_f \in C(\overline{\Omega})$, 且在 Ω 内调和。这就给出了 Dirichlet 问题 (3.1) 的一个解。

解的唯一性由极值原理立即得到: 若 u_1, u_2 均为解, 则差 $u_1 - u_2$ 在 Ω 内调和且在边界上为零, 故恒为零。

综上, 我们有:

Theorem 3.6.12 ▶ Perron 存在唯一性定理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集, 对每一边界点均存在障碍函数 (例如 Ω 满足外球条件), $f \in C(\partial\Omega)$ 。则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u = f, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

存在唯一解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 。

Example 3.6.13 ▶ 课后练习：次调和函数两种定义的等价性

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $u \in C(\Omega)$ 。考虑以下两种次调和函数的定义:

Def 1. (课本定义) 对任意 $x \in \Omega$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < r < \delta$ 时,

$$u(x) \leq M_u(x, r) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y.$$

Def 2. 对任意球 $B(x, r)$ 满足 $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, 均有

$$u(x) \leq M_u(x, r) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y.$$

则 Def 1 与 Def 2 等价。

Proof.

1. Def 2 $\Rightarrow$ Def 1.:

设 u 满足 Def 2. 任取 $x \in \Omega$, 因 Ω 是开集, 存在 $\rho > 0$ 使得 $\overline{B(x, \rho)} \subset \Omega$. 对任意 $0 < r \leq \rho$, 有 $\overline{B(x, r)} \subset \overline{B(x, \rho)} \subset \Omega$. 由 Def 2 即得 $u(x) \leq M_u(x, r)$. 取 $\delta = \rho$, 即知 Def 1 成立。

2. Def 1 $\Rightarrow$ Def 2.:

设 u 满足 Def 1. 任取一球 $B(x_0, \rho)$ 使得 $\overline{B(x_0, \rho)} \subset \Omega$. 令 $U := u_{x_0, \rho}$ 为 u 在 $B(x_0, \rho)$ 上的 Poisson 提升。由提升的构造知 $U \in C(\overline{\Omega})$, 在 $B(x_0, \rho)$ 内调和, 且在 $\partial B(x_0, \rho)$ 上 $U = u$. 考虑函数 $v := u - U$. 下面证明 $v \leq 0$ 在 $B(x_0, \rho)$ 内成立。

首先, v 在 $\overline{B(x_0, \rho)}$ 上连续, 且在边界 $\partial B(x_0, \rho)$ 上 $v = 0$.

其次, 证明 v 在 $B(x_0, \rho)$ 内满足 Def 1 (即局部次调和)。为此, 需验证 u 与 $-U$ 均满足 Def 1.

- 由假设, u 在 Ω 上满足 Def 1, 特别在 $B(x_0, \rho)$ 内亦然。
- 因 U 在 $B(x_0, \rho)$ 内调和, 对任意 $y \in B(x_0, \rho)$ 及充分小的 r , 有平均值等式

$$U(y) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y, r)} U dS,$$

故 $-U(y) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y, r)} (-U) dS$, 等号成立, 因此 $-U$ 亦满足 Def 1.

次调和函数对加法封闭: 若 f, g 在点 y 处对充分小的 r 满足 $f(y) \leq M_f(y, r)$, $g(y) \leq M_g(y, r)$, 则相加得 $(f+g)(y) \leq M_{f+g}(y, r)$. 因此 $v = u + (-U)$ 在 $B(x_0, \rho)$ 内也满足 Def 1.

现在对 v 应用次调和函数的极值原理 (引理 I)。因 $v \in C(\overline{B(x_0, \rho)})$ 且在 $B(x_0, \rho)$ 内次调和, 有

$$\max_{\overline{B(x_0, \rho)}} v \leq \max_{\partial B(x_0, \rho)} v = 0.$$

于是在 $B(x_0, \rho)$ 内 $v(x) \leq 0$, 即 $u(x) \leq U(x)$ 。

特别取 $x = x_0$, 得 $u(x_0) \leq U(x_0)$ 。利用 U 在 $B(x_0, \rho)$ 内的调和性及边界条件,

$$U(x_0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, \rho)} U \, dS = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, \rho)} u \, dS = M_u(x_0, \rho).$$

因此 $u(x_0) \leq M_u(x_0, \rho)$ 。由球 $B(x_0, \rho)$ 的任意性, Def 2 成立。

综上所述, Def 1 与 Def 2 等价。

□

3.7 极值原理的应用：最大模估计与能量模估计

3.7.1 三种边值问题的最大模估计

Theorem 3.7.1 ▶ Dirichlet 问题的最大模估计

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解，则存在仅依赖于区域 Ω 的直径的常数 C ，使得

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

Proof. 不失一般性，取坐标原点在 Ω 内部。设 Ω 包含在球 $B(0, R)$ 中，令

$$w(x) = u(x) + \frac{1}{2n} \left(\max_{\overline{\Omega}} |f| \right) |x|^2.$$

直接计算得

$$-\Delta w = -\Delta u - \left(\max_{\overline{\Omega}} |f| \right) = f(x) - \max_{\overline{\Omega}} |f| \leq 0,$$

即 w 满足 $-\Delta w \leq 0$ ，等价于 $\Delta w \geq 0$ 。由弱极值原理， w 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值必在边界上达到，故

$$w(x) \leq \max_{\partial\Omega} w \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + \frac{R^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|, \quad \forall x \in \Omega.$$

同理，考虑 $-u$ 可得反向估计。因此

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + \frac{R^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|,$$

取 $C = R^2/(2n)$ 即得

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

□

Theorem 3.7.2 ▶ 第三边值问题的最大模估计

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 是第三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + d(x)u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解，其中 $c(x) \geq 0$, $d(x) \geq d_0 > 0$ (d_0 为常数)。则存在仅依赖于 Ω 和 d_0 的常数 C ，使得

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq C \left(\max_{\overline{\Omega}} |f| + \max_{\partial\Omega} |\varphi| \right).$$

Proof. 不妨设区域包含坐标原点 $x = 0$ 。令

$$\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi|, \quad F = \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

引入辅助函数

$$z(x) = \frac{F}{2n} \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x|^2 \right), \quad w(x) = z(x) + \frac{\Phi}{\alpha_0} \pm u(x).$$

记边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量为 $n = (\beta_1(x), \dots, \beta_n(x))$ ，则 $\sum_{i=1}^n \beta_i^2(x) = 1$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。首先验证 z 满足

$$-\Delta z + c(x)z \geq F, \quad x \in \Omega. \quad (3.3)$$

由于 $\Delta z = -\frac{F}{2n} \cdot 2n = -F$ ，且 $c(x) \geq 0$, $z(x) \geq 0$ ，故

$$-\Delta z + c(x)z = F + c(x)z \geq F.$$

其次验证边界条件：

$$\left[\frac{\partial z}{\partial n} + \alpha(x)z \right]_{\partial\Omega} = \frac{F}{2n} \left[-2 \sum_{i=1}^n x_i \beta_i(x) + \alpha(x) \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x|^2 \right) \right]_{\partial\Omega}.$$

由于 $2ab \leq a^2 + b^2$ ，则

$$-2 \sum x_i \beta_i(x) \geq -|x|^2 - \sum \beta_i^2 = -|x|^2 - 1,$$

且边界上 $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, $|x|^2 \leq d^2$, 于是

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial z}{\partial n} + \alpha(x)z \right]_{\partial\Omega} &\geq \frac{F}{2n} \left[-|x|^2 - 1 + \alpha_0 \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x|^2 \right) \right]_{\partial\Omega} \\ &= \frac{F}{2n} \left[-|x|^2 - 1 + 1 + d^2 + \alpha_0(d^2 - |x|^2) \right]_{\partial\Omega} \\ &\geq \frac{F}{2n} (d^2 - |x|^2)(1 + \alpha_0) \geq 0. \end{aligned}$$

现在估计 w 。利用 (3.3) 及 $c(x) \geq 0$ 得

$$-\Delta w + c(x)w = (-\Delta z + c(x)z) + c(x)\frac{\Phi}{\alpha_0} \pm (-\Delta u + c(x)u) \geq F + 0 \pm f(x) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

在边界上,

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n} + \alpha(x)w \right]_{\partial\Omega} = \left[\frac{\partial z}{\partial n} + \alpha(x)z \right]_{\partial\Omega} + \alpha(x)\frac{\Phi}{\alpha_0} \pm \varphi(x) \geq 0 + \alpha_0\frac{\Phi}{\alpha_0} - \Phi = 0.$$

由弱极值原理 (对算子 $-\Delta + c$ 且 $c \geq 0$), 函数 w 的负最小值必在边界 $\partial\Omega$ 上达到。若该负最小值在点 $x^0 \in \partial\Omega$ 达到, 则因 n 是外法向, 有 $\frac{\partial w}{\partial n}(x^0) \leq 0$, 从而

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n} + \alpha(x)w \right]_{x=x^0} \leq \alpha(x^0)w(x^0) < 0,$$

这与上面已证的边界条件非负矛盾。故 w 在整个 $\bar{\Omega}$ 上没有负最小值, 即 $w(x) \geq 0$ 处处成立。由此得到

$$|u(x)| \leq z(x) + \frac{\Phi}{\alpha_0} \leq \max_{\bar{\Omega}} z + \frac{\Phi}{\alpha_0}, \quad \forall x \in \Omega.$$

因为 $z(x) \leq \frac{F}{2n} \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 \right)$, 取

$$C = \max \left\{ \frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{2n} \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 \right) \right\}$$

即得证。 □

Corollary 3.7.3

作为上述定理的直接推论, 第三边值问题当 $c(x) \geq 0$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ 时, 解是唯一的, 且在最大模的意义下连续地依赖于边界数据 φ 与方程的非齐次项 f 。

如果仅仅是为了证明解的唯一性，条件 $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ 可以减弱，但边界需附加一些条件，且 $c(x)$ 与 $\alpha(x)$ 中至少有一个不恒为零。

如果 $c(x) \equiv 0$, $\alpha(x) \equiv 0$ ，则问题化为 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

若 $u(x)$ 是该问题的解，则对任意常数 C ， $u(x) + C$ 也是解，解不唯一。但利用强极值原理可以证明，当区域 Ω 的边界满足适当条件时，属于 $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 的任意两个解至多相差一个常数。

3.7.2 能量模估计

Theorem 3.7.4 ▶ Dirichlet 问题的能量不等式

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解，则存在仅依赖于 Ω 的常数 C ，使得为能量不等式成立：

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \varphi^2 dx.$$

Proof. 用 u 乘以方程并在 Ω 上积分，由 Green 第一恒等式及边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} \varphi u dx.$$

右端应用 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\int_{\Omega} \varphi u dx \leq \left(\int_{\Omega} \varphi^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2}.$$

由 Poincaré 不等式（仅依赖于 Ω 的常数 C_P ），有 $\int_{\Omega} u^2 dx \leq C_P \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$. 代入得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \left(\int_{\Omega} \varphi^2 dx \right)^{1/2} \left(C_P \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

消去一个因子后即得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C_P \int_{\Omega} \varphi^2 dx,$$

取 $C = C_P$ 即可。 □

Theorem 3.7.5 ▶ Dirichlet 问题带低阶项的能量估计

设 $c(x) \geq 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解，则存在常数 M （仅依赖于 Ω 和 c 的下界）使得

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x)u^2 dx \leq M \int_{\Omega} f^2 dx.$$

特别地，当 $f \equiv 0$ 时， $u \equiv 0$ ，解唯一。

Proof. 以 u 乘方程并积分：

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx = \int_{\Omega} fu dx.$$

对右端用带 ε 的 Young 不等式： $fu \leq \frac{1}{2\varepsilon} f^2 + \frac{\varepsilon}{2} u^2$. 取 $\varepsilon = 1$ 则得

$$\int_{\Omega} fu dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx.$$

结合 Poincaré 不等式（齐次 Dirichlet 边界）得 $\int_{\Omega} u^2 \leq C_P \int_{\Omega} |\nabla u|^2$ ，因此

$$\int_{\Omega} fu dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx + \frac{C_P}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

代入能量等式，

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} cu^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx + \frac{C_P}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

若 $C_P < 2$ ，可直接移项得 $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2$ 的估计；否则通过进一步放缩或迭代仍可得形如 $M \int f^2$ 的估计，其中 M 依赖于 C_P 及 c 的下界。更精细地，利用 $c(x) \geq c_0 \geq 0$ 并选取适当的 ε 即可得到所断言的不等式。 $\square$

Theorem 3.7.6 ▶ 第三边值问题的能量估计

设 $c(x) \geq 0$, $d(x) \geq 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 是第三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + d(x)u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解，则

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx + \int_{\partial\Omega} d(x)u^2 dS \leq M \int_{\Omega} f^2 dx,$$

其中 M 为仅依赖于 Ω 的常数。若 $f \equiv 0$ ，则 $u \equiv 0$ ；若 $c \equiv 0$ 且 $d \equiv 0$ ，则解在相差一个常数的意义下唯一。

Proof. 以 u 乘方程并积分，应用 Green 第一恒等式：

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx = \int_{\Omega} fu dx.$$

利用边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = -d(x)u$ ，边界项化为 $\int_{\partial\Omega} d(x)u^2 dS$ ，于是

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx + \int_{\partial\Omega} d(x)u^2 dS = \int_{\Omega} fu dx.$$

右端可用 Young 不等式及 Poincaré 型不等式（针对 Robin 边界条件）控制为 $M \int f^2$ 加上左端项的一部分，从而得到所需估计。唯一性结论由 $f \equiv 0$ 时左端各项为零推出；若 $c \equiv d \equiv 0$ ，则仅得 $|\nabla u| \equiv 0$ ，故 u 为常数。 $\square$

高维双曲方程

本章讨论 n 维空间中的波动方程，主要工具为球面平均法。重点给出 $n = 3$ 时初值问题的显式解（Kirchhoff 公式），并讨论解的唯一性与奇性。

4.1 球平均法

4.1.1 波动方程的 Cauchy 问题

Definition 4.1.1 ▶ 波动方程

设 $u = u(x, t)$ 定义在 $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上，其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 。波动方程为

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad c > 0.$$

Definition 4.1.2 ▶ 达朗贝尔算子

$$\square u := u_{tt} - c^2 \Delta u.$$

方程 $\square u = 0$ 的物理意义随空间维数而异： $n = 1$ 描述弦振动， $n = 2$ 描述薄膜振动（水面波）， $n = 3$ 描述声波或电磁波。

Definition 4.1.3 ▶ 初值问题（Cauchy 问题）

求函数 $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ 满足

$$\begin{cases} \square u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

其中 $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 为给定的初值函数。

Definition 4.1.4 ▶ 球面平均

对函数 $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 定义其以 x 为中心、 $r \geq 0$ 为半径的球面平均

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi.$$

通过变量代换可将该定义延拓到 $r < 0$, 且 $M_h(x, r)$ 为 r 的偶函数。

Theorem 4.1.5 ▶ Darboux 方程

设 $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 则球面平均 $M_h(x, r)$ 满足 Darboux 方程

$$\Delta_x M_h(x, r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x, r),$$

且 $M_h(x, 0) = h(x)$, $\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r)|_{r=0} = 0$ 。

Proof. 球面平均的定义为

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi, \quad r > 0.$$

利用上式右端的表达式可将其定义域延拓至 $r \leq 0$ 。将 r 换为 $-r$, 并作变量代换 $\xi \mapsto -\xi$, 即得

$$M_h(x, -r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x - r\xi) dS_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi = M_h(x, r),$$

故 $M_h(x, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数。由 $h \in C^2$ 可知 $M_h \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ 。

以下推导 $r > 0$ 时 M_h 所满足的方程。首先对 r 求一阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \nabla_x h(x + r\xi) \cdot \xi dS_\xi.$$

对向量场 $\mathbf{F}(\xi) = \nabla_x h(x + r\xi)$ 应用散度定理, 得

$$\int_{|\xi|=1} \nabla_x h(x + r\xi) \cdot \xi dS_\xi = \int_{|\xi|<1} \nabla_\xi \cdot (\nabla_x h(x + r\xi)) d\xi.$$

计算散度:

$$\nabla_{\xi} \cdot (\nabla_x h(x + r\xi)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} h_{x_i}(x + r\xi) = r \sum_{i=1}^n h_{x_i x_i}(x + r\xi) = r \Delta_x h(x + r\xi).$$

代入得

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = \frac{r}{\omega_n} \int_{|\xi| < 1} \Delta_x h(x + r\xi) d\xi.$$

令 $y = x + r\xi$, 则 $\xi = (y - x)/r$, $d\xi = r^{-n} dy$, 积分区域 $\{|\xi| < 1\}$ 变为 $\{|y - x| < r\}$, 故

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = \frac{r}{\omega_n} \int_{|y-x| < r} \Delta_x h(y) r^{-n} dy = \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|y-x| < r} \Delta_x h(y) dy.$$

由于 $h \in C^2$, 积分与 Δ_x 可交换次序, 得

$$\int_{|y-x| < r} \Delta_x h(y) dy = \Delta_x \int_{|y-x| < r} h(y) dy,$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_{|y-x| < r} h(y) dy. \quad (4.1)$$

将体积分用球面平均表示:

$$\int_{|y-x| < r} h(y) dy = \int_0^r \left(\int_{|y-x|=\rho} h(y) dS_y \right) d\rho = \omega_n \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho.$$

代入 (4.1) 得到

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = r^{1-n} \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho. \quad (4.2)$$

将 (4.2) 两边同乘 r^{n-1} , 得

$$r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho.$$

对 r 再求一次导数。左端导数为 $\frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h)$ 。右端交换 Δ_x 与 $\frac{\partial}{\partial r}$, 并利用含参变量积分的求导法则 (上限求导), 得到

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho = \Delta_x \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \rho^{n-1} M_h(x, \rho) d\rho = \Delta_x (r^{n-1} M_h(x, r)).$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) \right) = \Delta_x (r^{n-1} M_h(x, r)). \quad (4.3)$$

将左端展开:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h \right) = (n-1)r^{n-2} \frac{\partial M_h}{\partial r} + r^{n-1} \frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2}.$$

右端因为 r 与 x 无关, $\Delta_x(r^{n-1}M_h) = r^{n-1}\Delta_x M_h$. 代入 (4.3) 得

$$r^{n-1} \frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2} + (n-1)r^{n-2} \frac{\partial M_h}{\partial r} = r^{n-1} \Delta_x M_h.$$

对于 $r > 0$, 两边约去 r^{n-1} , 即得 Darboux 方程

$$\frac{\partial^2 M_h}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial M_h}{\partial r} = \Delta_x M_h.$$

最后验证初始条件。由定义,

$$M_h(x, 0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x) dS_\xi = h(x).$$

对 r 的偏导数, 可从前面的计算出发: 在 $r = 0$ 处,

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, 0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \nabla h(x) \cdot \xi dS_\xi.$$

被积函数关于 ξ 是奇函数, 而积分区域 (单位球面) 关于原点对称, 故该积分为零, 即

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, 0) = 0.$$

亦可通过偶函数性质得到: 因 $M_h(x, r) = M_h(x, -r)$, 两边对 r 求导并令 $r = 0$ 得

$$\partial_r M_h(x, 0) = -\partial_r M_h(x, 0),$$

故导数为零。证毕。 □

Definition 4.1.6 ▶ 关于空间变量的球面平均

设 $u(x, t)$ 是波动方程初值问题的 C^2 解。对固定的 x , 定义 u 关于空间变量的球面平均

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi.$$

Theorem 4.1.7 ▶ Euler-Poisson-Darboux 方程

$M_u(x, r, t)$ 作为 r, t 的函数满足 Euler-Poisson-Darboux 方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u,$$

且初始条件为

$$M_u(x, r, 0) = M_f(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, 0) = M_g(x, r).$$

Proof. 由 Darboux 方程, $\Delta_x M_u = (\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r) M_u$. 另一方面, 由波动方程 $\square u = 0$ 可得

$$\Delta_x M_u = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x + r\xi, t) dS_\xi = \frac{1}{c^2 \omega_n} \int_{|\xi|=1} u_{tt}(x + r\xi, t) dS_\xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}.$$

比较两式即得 Euler-Poisson-Darboux 方程。初始条件由 $t = 0$ 时的初值直接给出。 $\square$

注意到 $M_u(x, 0, t) = u(x, t)$, 因此若能解出 M_u , 令 $r \rightarrow 0$ 即得原问题的解。

4.1.2 三维波动方程的初值问题 (Kirchhoff 公式)

现专门讨论 $n = 3$ 的情形。

Theorem 4.1.8 ▶ 三维波动方程初值问题的解

设 $f \in C^3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, 则初值问题 $\square u = 0, u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x)$ 的解由如下的 Kirchhoff 公式表出, 且它是 $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ 的:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right).$$

Proof.

1. 化为一维波动方程

当 $n = 3$ 时, Euler-Poisson-Darboux 方程写为

$$\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_u}{\partial r} \right). \quad (1)$$

观察到

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_u) = \frac{\partial}{\partial r}(M_u + rM_{u,r}) = 2M_{u,r} + rM_{u,rr} = r\left(M_{u,rr} + \frac{2}{r}M_{u,r}\right).$$

因此令

$$V(x, r, t) := rM_u(x, r, t),$$

则

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = r\left(\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_u}{\partial r}\right).$$

另一方面,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}.$$

将 (1) 代入, 得到

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 r\left(\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_u}{\partial r}\right) = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}.$$

故 V 关于变量 r 和 t 满足一维波动方程

$$V_{tt} = c^2 V_{rr},$$

其中 x 只作为参数出现。

在 $t = 0$ 时, 由 M_u 的初值可知

$$V(x, r, 0) = rM_u(x, r, 0) = rM_f(x, r),$$

$$V_t(x, r, 0) = rM_{u_t}(x, r, 0) = rM_g(x, r).$$

这里 M_f, M_g 分别是初值 f, g 的球面平均, 由 Darboux 方程的结论, 它们都是 r 的偶函数。

问题转化为求解一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} V_{tt} = c^2 V_{rr}, \\ V(x, r, 0) = rM_u(x, r, 0) = rM_f(x, r), \\ V_t(x, r, 0) = rM_{u_t}(x, r, 0) = rM_g(x, r). \end{cases}$$

这需要结合第二章的 d'Alembert 公式。

2. d'Alembert 公式与极限过程

一维波动方程 $V_{tt} = c^2 V_{rr}$ 的初值问题的解由 d'Alembert 公式给出:

$$V(x, r, t) = \frac{1}{2} [V(x, r+ct, 0) + V(x, r-ct, 0)] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} V_t(x, \xi, 0) d\xi.$$

将初值代入, 得到

$$V(x, r, t) = \frac{1}{2} [(r+ct)M_f(x, r+ct) + (r-ct)M_f(x, r-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \xi M_g(x, \xi) d\xi. \quad (4.4)$$

由于 $u(x, t) = M_u(x, 0, t)$, 而 $M_u = V/r$, 故

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{V(x, r, t)}{r}.$$

因为 $r=0$ 时分子也为零 (利用 M_f 是偶函数, $V(x, 0, t) = 0$), 这个极限等于 V 对 r 的偏导数在 $r=0$ 处的值:

$$u(x, t) = \frac{\partial V}{\partial r}(x, 0, t).$$

现在计算 $\frac{\partial V}{\partial r}$ 。将 (4.4) 对 r 求偏导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r}(x, r, t) &= \frac{1}{2} [M_f(x, r+ct) + (r+ct)M_{f,r}(x, r+ct) \\ &\quad + M_f(x, r-ct) + (r-ct)M_{f,r}(x, r-ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} [(r+ct)M_g(x, r+ct) \cdot 1 - (r-ct)M_g(x, r-ct) \cdot 1] \\ &= \frac{1}{2} [M_f(x, r+ct) + M_f(x, r-ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(r+ct)M_{f,r}(x, r+ct) + (r-ct)M_{f,r}(x, r-ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} [(r+ct)M_g(x, r+ct) - (r-ct)M_g(x, r-ct)]. \end{aligned}$$

代入 $r=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r}(x, 0, t) &= \frac{1}{2} [M_f(x, ct) + M_f(x, -ct)] + \frac{1}{2} [ctM_{f,r}(x, ct) + (-ct)M_{f,r}(x, -ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} [ctM_g(x, ct) - (-ct)M_g(x, -ct)]. \end{aligned}$$

因为 M_f 是 r 的偶函数, 故 $M_f(x, -ct) = M_f(x, ct)$; 其偏导数 $M_{f,r}$ 是奇函数, 故 $M_{f,r}(x, -ct) = -M_{f,r}(x, ct)$ 。同理 M_g 是偶函数, $M_g(x, -ct) = M_g(x, ct)$ 。利用这些性质:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[M_f(x, ct) + M_f(x, -ct)] &= M_f(x, ct), \\ \frac{1}{2}[ctM_{f,r}(x, ct) + (-ct)M_{f,r}(x, -ct)] &= \frac{1}{2}[ctM_{f,r}(x, ct) - ct(-M_{f,r}(x, ct))] \\ &= ctM_{f,r}(x, ct), \\ \frac{1}{2c}[ctM_g(x, ct) - (-ct)M_g(x, -ct)] &= \frac{1}{2c}[ctM_g(x, ct) + ctM_g(x, ct)] = tM_g(x, ct).\end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = M_f(x, ct) + ctM_{f,r}(x, ct) + tM_g(x, ct).$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}[tM_f(x, ct)] = M_f(x, ct) + t \cdot cM_{f,r}(x, ct) = M_f(x, ct) + ctM_{f,r}(x, ct).$$

于是我们得到简洁的表达式

$$u(x, t) = tM_g(x, ct) + \frac{\partial}{\partial t}[tM_f(x, ct)]. \quad (2)$$

现在将球面平均的定义代入。当 $n = 3$ 时, $\omega_3 = 4\pi$, 故

$$M_f(x, ct) = \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y,$$

同理

$$M_g(x, ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y.$$

代入 (2) 即得 **Kirchhoff** 公式:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right).$$

□

注: Kirchhoff 公式表出了一个解, 这只需带入验证即可, 过程略。

4.1.3 解的性质

Proposition 4.1.9 ▶ 存在唯一性

对 $f, g \in C^2$, 三维波动方程 Cauchy 问题的解是存在唯一的。

Proof. 存在性: Kirchhoff 公式给出了初值问题的一个显式解, 因此存在性得证。

唯一性: 由能量方法 (见第四章能量模估计的思想, 是本章的后续课程内容) 或直接由公式的推导过程得到。任何 C^2 解必满足球面平均满足的方程, 从而唯一地由初值确定。这里从略。 $\square$

Proposition 4.1.10 ▶ 惠更斯公式

三维波动方程的解具有如下等价形式, 称为惠更斯公式:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} (t g(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x)) dS_y.$$

Proof. 由 Kirchhoff 公式的等价形式

$$u(x, t) = t M_g(x, ct) + \frac{\partial}{\partial t} (t M_f(x, ct))$$

可知, 当 $t \geq 0$ 且 $r \rightarrow 0$ 时, $u(x, t)$ 的可微性完全取决于 $M_g(x, t)$ 与 $M_f(x, t)$ 的可微性。因为

$$M_f(x, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y = \frac{1}{4\pi} \iint_{|\xi|=1} f(x + t\xi) dS_\xi,$$

这是将 $f(y)$ 用 $f(x + t\xi)$ 表达的结果。因此 $u(x, t)$ 的奇性来源于 ∇f 或 ∇g 在球面上积分时可能产生的奇性。将球面平均的表达式代入 (为简化记号, 以下取波速 $c = 1$, 如需恢复 c 只需将 t 替换为 ct 并调整系数):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= t \cdot \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(t \cdot \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iint_{|y-x|=t} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y \right). \end{aligned}$$

对第二项求导:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y \right) = -\frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y + \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y.$$

为了计算 $\frac{\partial}{\partial t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y$, 做变量代换 $y = x + t\xi$, $|\xi| = 1$, 则 $dS_y = t^2 dS_\xi$ (在 $\mathbb{R}^3$ 中), 于是

$$\iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y = t^2 \iint_{|\xi|=1} f(x + t\xi) dS_\xi.$$

对 t 求导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y &= 2t \iint_{|\xi|=1} f(x + t\xi) dS_\xi + t^2 \iint_{|\xi|=1} \nabla f(x + t\xi) \cdot \xi dS_\xi \\ &= \frac{2}{t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y + \frac{1}{t} \iint_{|y-x|=t} \nabla f(y) \cdot (y - x) dS_y. \end{aligned}$$

代回原式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y \right) &= -\frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y \\ &\quad + \frac{1}{4\pi t} \left[\frac{2}{t} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y + \frac{1}{t} \iint_{|y-x|=t} \nabla f(y) \cdot (y - x) dS_y \right] \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y + \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} \nabla f(y) \cdot (y - x) dS_y. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi t} \iint_{|y-x|=t} g(y) dS_y + \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} f(y) dS_y \\ &\quad + \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} \nabla f(y) \cdot (y - x) dS_y. \end{aligned}$$

整理为一个积分:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|y-x|=t} (t g(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y - x)) dS_y.$$

□

Corollary 4.1.11 ▶ 解的奇性（惠更斯原理）

由惠更斯公式可以清楚地看出：

- 积分中只涉及 f 、 ∇f 和 g 在球面 $|y - x| = t$ 上的值。如果初值 f, g 在某个区域外光滑，而在某点附近有奇性，那么该奇性只沿着球面 $|y - x| = t$ 向外传播，球面内部和外部都不受影响。这就是 **Huygens** 原理（在三维空间中，声音信号以清晰波前传播，无后效残余）的体现。
- 解 u 的光滑性比初值降低一阶：若 $f \in C^k$ ， $g \in C^{k-1}$ ，则上述公式表明 u 一般只有 C^{k-1} 的光滑性，因为表达式中出现了 ∇f 。如果 f 或 g 不够光滑，积分在球面上可能产生奇性。
- 即使初值在某点有奇性，该奇性也不会停留在原处，而是随时间沿特征锥面扩散出去。三维情形下信号传播无后效，即“波前”过后区域恢复平静。

Example 4.1.12 ▶ 课后练习：波动方程的能量衰减估计

设 $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ 满足 $\square u = u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ ，初值 $u(x, 0) = f(x)$ ， $u_t(x, 0) = g(x)$ 。记

$$U(t) = \sum_{|s| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} |D^s u(x, t)| dx,$$

且已知 $U(0) < \infty$ 。

- (a) 证明存在不依赖于 u 的常数 K ，使得对所有 $t > 0$ 及 $x \in \mathbb{R}^3$ ，

$$|u(x, t)| \leq \frac{K}{t} U(0).$$

- (b) 证明若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = 0$ ，则 $u \equiv 0$ 。

Proof. (a) 由三维波动方程柯西问题的 Kirchhoff 公式，

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right). \quad (1)$$

记球面 $S(x, ct) = \{y : |y - x| = ct\}$ ，球体 $B(x, ct) = \{y : |y - x| \leq ct\}$ 。为展开第二项，令

$$J(t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S(x, ct)} f(y) dS_y.$$

作变量代换 $y = x + ct\xi$, $|\xi| = 1$, 则 $dS_y = c^2 t^2 dS_\xi$, 于是

$$J(t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) c^2 t^2 dS_\xi = \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) dS_\xi.$$

对 t 求导:

$$\begin{aligned} J'(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) dS_\xi + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} c \nabla f(x + ct\xi) \cdot \xi dS_\xi \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S(x, ct)} f(y) dS_y + \frac{ct}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \nabla f(x + ct\xi) \cdot \xi dS_\xi. \end{aligned}$$

将 $\xi = (y - x)/(ct)$ 及 $dS_\xi = dS_y/(c^2 t^2)$ 代入第二项:

$$\frac{ct}{4\pi} \int_{S(x, ct)} \nabla f(y) \cdot \frac{y - x}{ct} \frac{dS_y}{c^2 t^2} = \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{S(x, ct)} \nabla f(y) \cdot (y - x) dS_y.$$

因此

$$J'(t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S(x, ct)} f(y) dS_y + \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{S(x, ct)} \nabla f(y) \cdot (y - x) dS_y.$$

将 (1) 中的第一项写成 $\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_S g dS = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \cdot t \int_S g dS$, 于是

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \left[t \int_S g dS + \int_S f dS + c \int_S \nabla f \cdot (y - x) dS \right] \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S(x, ct)} [tg(y) + f(y) + c \nabla f(y) \cdot (y - x)] dS_y. \end{aligned} \quad (2)$$

引入单位外法向 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 其中 $\xi_i = \frac{y_i - x_i}{ct}$. 注意到

$$c \nabla f(y) \cdot (y - x) = c \sum_{i=1}^3 f_{y_i}(y) (y_i - x_i) = ct \sum_{i=1}^3 f_{y_i}(y) \xi_i.$$

定义向量场

$$F_i(y) = \frac{1}{ct} (tg(y) + f(y))(y_i - x_i) + ct f_{y_i}(y), \quad i = 1, 2, 3.$$

在球面 $S(x, ct)$ 上, 计算

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 F_i(y) \xi_i &= \sum_{i=1}^3 \left[\frac{tg(y) + f(y)}{ct} (y_i - x_i) \xi_i + ct f_{y_i}(y) \xi_i \right] \\ &= \frac{tg(y) + f(y)}{ct} \sum_{i=1}^3 (y_i - x_i) \xi_i + ct \sum_{i=1}^3 f_{y_i}(y) \xi_i.\end{aligned}$$

由于 $\sum (y_i - x_i) \xi_i = \sum (y_i - x_i) \frac{y_i - x_i}{ct} = \frac{|y-x|^2}{ct} = ct$, 且 $\sum f_{y_i} \xi_i = \nabla f \cdot \xi$, 故

$$\sum_{i=1}^3 F_i \xi_i = tg(y) + f(y) + ct \nabla f \cdot \xi = tg(y) + f(y) + c \nabla f \cdot (y - x).$$

这正是 (2) 中的被积函数。因此

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S(x, ct)} \left(\sum_{i=1}^3 F_i(y) \xi_i \right) dS_y. \quad (3)$$

由散度定理, $\int_S F \cdot n dS = \int_B \operatorname{div} F dy$, 其中 $n = \xi$ 是单位外法向。于是

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{B(x, ct)} \operatorname{div} F(y) dy. \quad (4)$$

计算散度:

$$\operatorname{div} F(y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{tg(y) + f(y)}{ct} (y_i - x_i) + ct f_{y_i}(y) \right].$$

逐项求导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{tg + f}{ct} (y_i - x_i) \right] &= \frac{tg_{y_i} + f_{y_i}}{ct} (y_i - x_i) + \frac{tg + f}{ct}, \\ \frac{\partial}{\partial y_i} (ct f_{y_i}) &= ct f_{y_i y_i}.\end{aligned}$$

求和得

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{ct} \sum_{i=1}^3 (tg_{y_i} + f_{y_i})(y_i - x_i) + \frac{3}{ct} (tg + f) + ct \Delta f.$$

在球体 $B(x, ct)$ 内 $|y - x| \leq ct$, 故

$$\begin{aligned} |\operatorname{div} F| &\leq \frac{1}{ct} (t|\nabla g| + |\nabla f|)|y - x| + \frac{3}{ct} (t|g| + |f|) + ct|\Delta f| \\ &\leq t|\nabla g| + |\nabla f| + \frac{3}{c}|g| + \frac{3}{ct}|f| + ct|\Delta f|. \end{aligned}$$

将上式代入 (4) 并取绝对值:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{B(x, ct)} \left(t|\nabla g| + |\nabla f| + \frac{3}{c}|g| + \frac{3}{ct}|f| + ct|\Delta f| \right) dy \\ &\leq \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \left[t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla g| dy + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f| dy + \frac{3}{c} \int_{\mathbb{R}^3} |g| dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{ct} \int_{\mathbb{R}^3} |f| dy + ct \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta f| dy \right]. \end{aligned}$$

由 $U(0)$ 的定义,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f|, \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|, \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta f|, \int_{\mathbb{R}^3} |g|, \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla g| \leq U(0).$$

因此存在只依赖于 c 的常数 $C_1, \dots$ 使得

$$|u(x, t)| \leq \frac{U(0)}{4\pi c^2 t^2} \left(t + 1 + \frac{3}{c} + \frac{3}{ct} + ct \right) = \frac{U(0)}{4\pi c^2 t} \left(1 + c + \frac{1}{t} + \frac{3}{ct} + \frac{3}{c^2 t} \right).$$

对于 $t > 0$, 取 K 足够大 (例如 $K = \frac{1}{4\pi c^2} \max\{1 + c + 4, \frac{3}{c} + \frac{3}{c^2} + 1\}$), 即可保证对所有 $t > 0$ 有

$$|u(x, t)| \leq \frac{K}{t} U(0).$$

这就证明了 (a)。

(b) 假设 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = 0$ 。固定 $T > 0$, 考虑函数

$$v(x, t) = u(x, T - t), \quad x \in \mathbb{R}^3, 0 \leq t \leq T.$$

直接计算: $v_t = -u_t$, $v_{tt} = u_{tt}$, $\Delta v = \Delta u$, 因此 $v_{tt} - c^2 \Delta v = 0$, 即 v 也是波动方程在 $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ 上的 C^2 解。其初值为

$$v(x, 0) = u(x, T), \quad v_t(x, 0) = -u_t(x, T).$$

定义

$$V(0) = \sum_{|s| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} |D^s v(x, 0)| dx = \sum_{|s| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} |D^s u(x, T)| dx = U(T).$$

对 v 应用 (a) 的结论: 对所有 $t \in (0, T]$,

$$|v(x, t)| \leq \frac{K}{t} V(0) = \frac{K}{t} U(T).$$

取 $t = T/2$, 则

$$|u(x, T/2)| = |v(x, T/2)| \leq \frac{K}{T/2} U(T) = \frac{2K}{T} U(T).$$

由假设 $\lim_{T \rightarrow \infty} U(T)/T = 0$, 得 $\lim_{T \rightarrow \infty} u(x, T/2) = 0$ 。但对任意固定的 $t > 0$, 可取 $T = 2t$, 得到

$$|u(x, t)| \leq \frac{2K}{2t} U(2t) = 2K \cdot \frac{U(2t)}{2t} \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

因此 $u(x, t) = 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}^3$ 和 $t > 0$ 成立。由连续性, $u \equiv 0$ 。这就证明了 (b)。 $\square$

4.2 Hadamard 降维法与二维 Poisson 公式

4.2.1 Hadamard 降维法

Definition 4.2.1 ▶ Hadamard 降维法

低维、少变量的问题可转化为高维、多变量问题的解来求解，这称为 Hadamard 降维法。

例如，二维波动方程柯西问题的解可由三维波动方程的解通过降维得到。

Example 4.2.2 ▶ 二维波动方程柯西问题的 Hadamard 降维法求解

考虑三维波动方程柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & t = 0, \\ u_t(x, 0) = g(x), & t = 0, \end{cases}$$

其中初值 f, g 均不依赖于第三个空间变量 x_3 ，即 $f(x) = f(x_1, x_2)$ ， $g(x) = g(x_1, x_2)$ 。由唯一性，此时的解 u 也不依赖于 x_3 ，从而 u 作为 (x_1, x_2, t) 的函数恰好满足二维波动方程

$$u_{tt} - c^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0,$$

且 $u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2)$ ， $u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$ 。因此二维问题的解可直接由三维问题的已知解给出。

4.2.2 二维 Poisson 公式

下面利用 Hadamard 降维法从三维 Kirchhoff 公式导出二维 Poisson 公式。

Theorem 4.2.3 ▶ 二维 Poisson 公式

二维空间中的波动方程初值问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2), & t = 0, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2), & t = 0. \end{cases}$$

令 $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, 则其解由 **Poisson** 公式给出:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right).$$

Proof. 由三维 Kirchhoff 公式, 解 $u(x_1, x_2, x_3, t)$ 可表为

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right). \quad (1)$$

因 f, g 不依赖于 y_3 , 故解 u 也不依赖于 x_3 , 可取 $x_3 = 0$. 记 $x = (x_1, x_2, 0)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. 此时球面 $|y - x| = ct$ 的方程为

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2} = ct,$$

即

$$y_3^2 = c^2 t^2 - [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2] = c^2 t^2 - r^2,$$

其中 $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$. 此球面在 (y_1, y_2) 平面上的投影区域为圆盘 $r < ct$, 对每个 (y_1, y_2) 在圆盘内, $y_3 = \pm \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$.

计算球面的面积微元。考虑上半球面 $y_3 = \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$, 其偏导数为

$$\frac{\partial y_3}{\partial y_1} = -\frac{y_1 - x_1}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial y_2} = -\frac{y_2 - x_2}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}.$$

于是

$$1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2} \right)^2 = 1 + \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}{c^2 t^2 - r^2} = \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - r^2}.$$

因此上半球面的面积元为

$$dS_y = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2} \right)^2} dy_1 dy_2 = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2.$$

由于被积函数 $f(y_1, y_2)$ 、 $g(y_1, y_2)$ 与 y_3 无关, 整个球面上的积分等于上半球面与下半球面积分之和, 即上半球面积分的两倍。故对任意仅依赖于 (y_1, y_2) 的函数 h ,

$$\iint_{|y-x|=ct} h(y_1, y_2) dS_y = 2 \iint_{r < ct} h(y_1, y_2) \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2. \quad (2)$$

将 (2) 代入 (1) 的第一项:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \cdot 2 \iint_{r<ct} g(y_1, y_2) \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{2\pi c} \iint_{r<ct} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2.\end{aligned}$$

第二项类似,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \cdot 2 \iint_{r<ct} f(y_1, y_2) \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \iint_{r<ct} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right).\end{aligned}$$

将以上两项相加即得二维 Poisson 公式。 □

Corollary 4.2.4 ▶ 二维空间中波传播的“拖尾”现象

Poisson 公式表明, 二维波动方程的解在点 (x_1, x_2) 处、 $t > 0$ 时刻的值, 依赖于初值在圆盘 $r < ct$ 上的全部信息, 而不仅仅是圆周 $r = ct$ 上的值。这与三维情形不同, 三维解只依赖于球面上的初值 (Huygens 原理)。

因此, 在二维空间中, 波的传播有“拖尾”现象: 初始扰动产生的波经过后, 介质不会立刻恢复平静, 而是会持续振动, 波尾不消失。换言之, 二维波动方程的初值紧支集并不导致解的紧支集传播, 这是偶数维空间的典型特征。

Example 4.2.5 ▶ 降维法的一般原理

设 $v(x_1, x_2, x_3, t)$ 是三维波动方程柯西问题

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 \Delta_3 v = 0, & \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ v(x_1, x_2, x_3, 0) = f(x_1, x_2), \\ v_t(x_1, x_2, x_3, 0) = g(x_1, x_2) \end{cases}$$

的解, 且初值 f, g 不依赖于 x_3 。由唯一性, 解 v 实际上也不依赖于 x_3 , 因此 $v_{x_3} = 0$, $v_{x_3 x_3} = 0$ 。代入三维波动方程得

$$v_{tt} - c^2(v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2}) = 0,$$

且 $v(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2)$, $v_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$ 。由二维柯西问题解的唯一性（也可由能量法得到），二维解 u 与 v 相同。因此二维问题的解可通过三维解表达式（Kirchhoff 公式）降维得到。这正是上面推导 Poisson 公式的本质。

Corollary 4.2.6 ▶ 波动方程解公式的物理意义与维数对比

三维情形，初始扰动局限在区域 Ω ，在时刻 $t > 0$ ，扰动传播到球面 $|y - x| = ct$ 上，球面外部和内部均不受影响，波前清晰。二维情形，初始扰动局限在区域 Ω ，在时刻 $t > 0$ ，扰动影响范围是半径为 ct 的圆盘，波前过后区域内部仍留有波动，波尾不消失。

- $n = 3$ （三维）：Kirchhoff 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right).$$

解在 (x, t) 处的值只依赖于球面 $|y - x| = ct$ 上的初值。初值的奇性以波速 c 沿特征锥面传播，波前清晰，波前过后该点恢复静止（无尾波）。这就是 Huygens 原理在三维的严格成立。

- $n = 2$ （二维）：Poisson 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \iint_{r < ct} \frac{f(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy \right).$$

解依赖于整个圆盘 $r < ct$ 内的初值。即使是紧支集的初始扰动，影响也将永远持续，波前通过后仍有“余波”（后效）。这说明在偶数维空间中，Huygens 原理不成立，波动会产生弥散。

4.3 Duhamel 原理与非齐次 Cauchy 问题

考虑非齐次波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \square u \equiv u_{tt} - c^2 \Delta u = w(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (4.5)$$

由线性叠加原理，若记 u_1 为齐次方程带原初值的解， u_2 为带零初值、右端 w 的解，则 $u = u_1 + u_2$ 。 u_1 已由 Kirchhoff 公式给出，因此只需处理

$$\begin{cases} \square u = w(x, t), \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

4.3.1 Duhamel 原理（常数变易法）

与常微分方程中的常数变易法类似，我们希望将非齐次问题的解表示为某个齐次问题解的积分。

Theorem 4.3.1 ▶ Duhamel 原理

设对于每一个固定的参数 $s \geq 0$ ，函数 $\bar{u}(x, t; s)$ 满足齐次波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \square \bar{u}(x, t; s) = 0, & t > s, \\ \bar{u}(x, s; s) = 0, \\ \bar{u}_t(x, s; s) = w(x, s). \end{cases} \quad (4.7)$$

则函数

$$u(x, t) = \int_0^t \bar{u}(x, t; s) ds$$

是非齐次问题 (4.6) 的解。

Proof. 第一步：验证初始条件。当 $t = 0$ 时，

$$u(x, 0) = \int_0^0 \bar{u}(x, t; s) ds = 0.$$

对 t 求导，

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \bar{u}(x, t; s) ds = \bar{u}(x, t; t) + \int_0^t \bar{u}_t(x, t; s) ds.$$

由 $\bar{u}$ 的初始条件 (4.7), $\bar{u}(x, s; s) = 0$, 令 $s = t$ 即得 $\bar{u}(x, t; t) = 0$ 。故

$$u_t(x, t) = \int_0^t \bar{u}_t(x, t; s) ds.$$

当 $t = 0$ 时, $u_t(x, 0) = \int_0^0 \dots = 0$ 。初始条件验证完毕。

第二步：验证方程。对 u_t 再求一次导：

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \bar{u}_t(x, t; s) ds \right) \\ &= \bar{u}_{tt}(x, t; t) + \int_0^t \bar{u}_{tt}(x, t; s) ds. \end{aligned}$$

由 (4.7) 的初值条件, $\bar{u}_t(x, s; s) = w(x, s)$, 取 $s = t$ 得 $\bar{u}_{tt}(x, t; t) = w(x, t)$ 。因此

$$u_{tt}(x, t) = w(x, t) + \int_0^t \bar{u}_{tt}(x, t; s) ds.$$

对空间变量, 积分与求导可交换, 故

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \Delta \bar{u}(x, t; s) ds.$$

于是

$$\begin{aligned} \square u &= u_{tt} - c^2 \Delta u \\ &= w(x, t) + \int_0^t (\bar{u}_{tt}(x, t; s) - c^2 \Delta \bar{u}(x, t; s)) ds \\ &= w(x, t) + \int_0^t \square \bar{u}(x, t; s) ds. \end{aligned}$$

因为 $\bar{u}$ 在 $t > s$ 时满足 $\square \bar{u} = 0$, 上式积分项为零, 故 $\square u = w(x, t)$ 。证毕。 $\square$

Corollary 4.3.2 ▶ 时间平移

$V(x, t; s) = \bar{u}(x, t + s; s)$, 则 $V(x, t; s)$ 满足

$$\begin{cases} \square V(x, t; s) = 0, & t > 0, \\ V(x, 0; s) = 0, \\ V_t(x, 0; s) = w(x, s). \end{cases}$$

从而 $\bar{u}(x, t; s) = V(x, t - s; s)$, 于是

$$u(x, t) = \int_0^t V(x, t - s; s) ds.$$

Corollary 4.3.3 ▶ 三维非齐次波动方程的解

$n = 3$, $w \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ 时零初值非齐次问题 (4.6) 的解为

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \iint_{|y-x|=c(t-s)} w(y, s) dS_y ds.$$

Proof. 根据 Kirchhoff 公式, 齐次问题 $\square V = 0$, $V(x, 0) = 0$, $V_t(x, 0) = w(x, s)$ 的解为

$$V(x, t; s) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} w(y, s) dS_y.$$

将 t 替换为 $t - s$, 得

$$\bar{u}(x, t; s) = V(x, t - s; s) = \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \iint_{|y-x|=c(t-s)} w(y, s) dS_y.$$

再由 Duhamel 原理, 零初值非齐次问题 (4.6) 的解为

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \iint_{|y-x|=c(t-s)} w(y, s) dS_y ds.$$

交换积分次序, 并令 $\tau = t - s$, 也可写成

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \iint_{|y-x|=c\tau} \frac{w(y, t-\tau)}{\tau} dS_y d\tau.$$

□

Corollary 4.3.4 ▶ 一般三维非齐次波动方程初值问题的解

齐次初值的 Kirchhoff 公式与上述零初值非齐次解叠加, 即得一般问题 (4.5) 的解:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \iint_{|y-x|=c(t-s)} \frac{w(y, s)}{t-s} dS_y ds.$$

4.3.2 常数变易法的推导动机

上述 Duhamel 原理并非凭空想象, 其思路来源于常微分方程中常数变易法的推广。考虑零初值问题 (4.6), 假设解可表为

$$u(x, t) = \int_0^t \bar{u}(x, t; s) ds,$$

其中 $\bar{u}$ 待定。为使 u 满足零初值, 自然要求 $\bar{u}(x, t; t) = 0$, 否则在求导时会出现边界项。将 u 代入方程, 利用积分号下求导, 得到

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{u}(x, t; t) + \int_0^t \bar{u}_t ds \right) - c^2 \int_0^t \Delta \bar{u} ds.$$

令 $\bar{u}(x, t; t) = 0$ 则简化为

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = \bar{u}_t(x, t; t) + \int_0^t (\bar{u}_{tt} - c^2 \Delta \bar{u}) ds.$$

若进一步要求 $\bar{u}$ 本身满足齐次方程 $\square \bar{u} = 0$, 则积分项消失, 同时令边界项等于右端 w , 即

$$\bar{u}_t(x, t; t) = w(x, t).$$

联合 $\bar{u}(x, t; t) = 0$, 这恰是 $\bar{u}$ 在 $t = s$ 处的初始条件。于是 $\bar{u}(x, t; s)$ 应是齐次方程以 $t = s$ 为初始时刻、初值为 0、初速为 $w(x, s)$ 的解。此即定理中给出的构造, 反过去验证即可证明其正确性。

4.4 能量不等式与 Cauchy 问题解的唯一性

Definition 4.4.1 ▶ 依赖域

$n = 3$ 时非齐次 Cauchy 问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \iint_{|y-x|=c(t-s)} \frac{w(y, s)}{t-s} dS_y ds,$$

则解在 (x, t) 处的值仅依赖于初值 f, g 在球面 $|y - x| = ct$ 上的值, 以及非齐次项 w 在特征锥面 $|y - x| = c(t - s)$, $0 \leq s \leq t$ 上的值。这个区域称为点 (x, t) 的依赖域, 它是四维时空中的后向特征锥。

Proposition 4.4.2 ▶ n 维波动方程的依赖域

一般地, 对 n 维波动方程, 依赖域是以 (x, t) 为顶点的向后特征锥

$$K_{(x,t)} = \{(y, s) : |y - x| \leq c(t - s), 0 \leq s \leq t\}.$$

取 $x = 0$, 考虑截锥

$$K_T = \{(x, t) : |x| \leq c(T - t), t \in [0, T]\}.$$

它的下底为 $\Sigma_0 = \{(x, 0) : |x| \leq cT\}$, 侧锥面为 $\Sigma_E = \{(x, t) : |x| = c(T - t), 0 < t < T\}$, 上底 Σ_T 退化为原点。

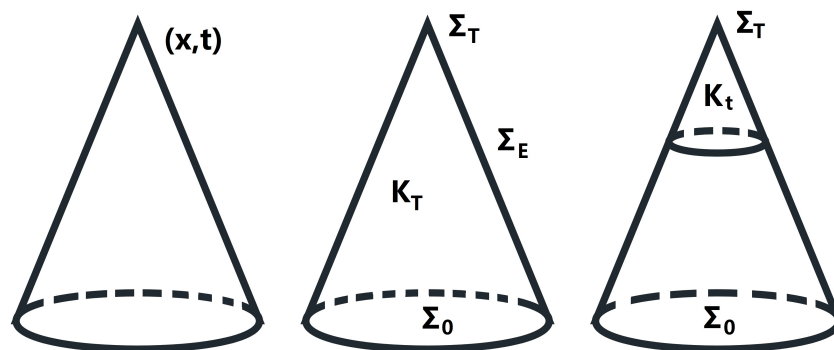


Figure 4.1: 波动方程的依赖域

Theorem 4.4.3 ▶ 能量不等式

设 $u \in C^2$ 是 n 维非齐次波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = w(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

的解。则对任意 $T > 0$ 有

$$\int_{K_T} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx dt \leq e^T \int_{\Sigma_0} (g^2 + c^2 |\nabla f|^2) dx + \int_{K_T} w^2 dx dt.$$

Proof.

1. 用 u_t 乘方程并分部积分

方程两端同乘 u_t 并在截锥 K_T 上积分:

$$\int_{K_T} (u_{tt} - c^2 \Delta u) u_t dx dt = \int_{K_T} w u_t dx dt.$$

注意到

$$u_t u_{tt} = \frac{1}{2} (u_t^2)_t, \quad u_t \Delta u = \nabla \cdot (u_t \nabla u) - \nabla u_t \cdot \nabla u = \nabla \cdot (u_t \nabla u) - \frac{1}{2} (|\nabla u|^2)_t.$$

因此

$$(u_{tt} - c^2 \Delta u) u_t = \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2)_t - c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u).$$

记 $E = u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2$ 。将上式在 K_T 上积分, 利用散度定理得

$$\int_{K_T} w u_t = \int_{\partial K_T} \left[\frac{1}{2} E n_t - c^2 u_t (\nabla u \cdot \vec{n}_x) \right] dS,$$

其中 $(\vec{n}_x, n_t)$ 是 ∂K_T 的单位外法向量。

边界 ∂K_T 由三部分组成:

- 下底 $\Sigma_0 = \{(x, 0) : |x| \leq cT\}$, 外法向为 $(0, -1)$, 故 $n_t = -1$, $\vec{n}_x = 0$;
- 上底 Σ_T 退化为原点, 面积为 0, 贡献为零;
- 侧锥面 $\Sigma_E = \{(x, t) : |x| = c(T - t), 0 < t < T\}$ 。

2. 计算侧锥面 Σ_E 上的积分

侧锥面方程为 $|x| = c(T - t)$ 。其单位外法向量 (指向锥外) 可通过梯度得到。令

$F(x, t) = |x| + ct$, 则 Σ_E 是 $F(x, t) = cT$ 的等值面。梯度 $\nabla_{(x,t)} F = (\frac{x}{|x|}, c)$, 方向指向 F 增加方向 (即锥外)。因此外法向为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left(\frac{x}{|x|}, c \right).$$

于是

$$\vec{n}_x = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \frac{x}{|x|}, \quad n_t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

代入被积函数, 记 $\xi = \frac{x}{|x|}$ ($|\xi| = 1$), 则 Σ_E 上的边界积分为

$$\begin{aligned} J_E &:= \frac{1}{2} E n_t - c^2 u_t (\nabla u \cdot \vec{n}_x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left[\frac{c}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) - c^2 u_t (\nabla u \cdot \xi) \right]. \end{aligned}$$

配方得

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) - c^2 u_t (\nabla u \cdot \xi) &= \frac{c}{2} [u_t^2 - 2c u_t (\nabla u \cdot \xi) + c^2 |\nabla u|^2] \\ &= \frac{c}{2} [(u_t - c \nabla u \cdot \xi)^2 + c^2 (|\nabla u|^2 - (\nabla u \cdot \xi)^2)]. \end{aligned}$$

由于 $|\xi| = 1$, 有 $|\nabla u \cdot \xi| \leq |\nabla u|$, 故 $|\nabla u|^2 - (\nabla u \cdot \xi)^2 \geq 0$. 从而方括号内两项均非负, 所以

$$J_E \geq 0.$$

因此侧锥面上的积分非负:

$$\int_{\Sigma_E} \left[\frac{1}{2} E n_t - c^2 u_t (\nabla u \cdot \vec{n}_x) \right] dS \geq 0.$$

3. 得到积分不等式

将散度定理的结果按边界各部分写出。对固定的 $t \in (0, T]$, 在区域 K_t 上应用散度定理, 得

$$\int_{K_t} w u_t dx dt = \int_{\partial K_t} \left[\frac{1}{2} E n_t - c^2 u_t (\nabla u \cdot \vec{n}_x) \right] dS.$$

边界 ∂K_t 由三部分组成:

- 下底 Σ_0 , 外法向为 $(0, -1)$, $n_t = -1$, $\vec{n}_x = 0$;

- 上底 Σ_t , 外法向为 $(0, 1)$, $n_t = 1$, $\vec{n}_x = 0$;
- 侧锥面 $\Sigma_{E,t}$, 外法向同前, 其上的被积函数已在第 2 步中证明非负。

因此

$$\begin{aligned}\int_{K_t} w u_t &= \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} E \cdot 1 \, dx + \int_{\Sigma_0} \frac{1}{2} E \cdot (-1) \, dx + \int_{\Sigma_{E,t}} \left[\frac{1}{2} E n_t - c^2 u_t (\nabla u \cdot \vec{n}_x) \right] dS \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} (g^2 + c^2 |\nabla f|^2) \, dx + \int_{\Sigma_{E,t}} (\dots).\end{aligned}$$

由于侧锥面上的积分非负, 得到

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} E \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} (g^2 + c^2 |\nabla f|^2) \, dx + \int_{K_t} w u_t \, dx dt.$$

利用不等式 $w u_t \leq \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} u_t^2$, 代入右端:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} E \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} E_0 \, dx + \frac{1}{2} \int_{K_t} w^2 \, dx dt + \frac{1}{2} \int_{K_t} u_t^2 \, dx dt,$$

其中 $E_0 = g^2 + c^2 |\nabla f|^2$ 。两边乘以 2, 并注意到 $u_t^2 \leq E$, 从而 $\int_{K_t} u_t^2 \leq \int_{K_t} E$, 可得

$$\int_{\Sigma_t} E \, dx \leq \int_{\Sigma_0} E_0 \, dx + \int_{K_t} w^2 \, dx dt + \int_{K_t} E \, dx dt.$$

4. 应用 Gronwall 不等式

令

$$F(t) = \int_{K_t} E \, dx d\tau = \int_0^t \int_{\Sigma_\tau} E \, dx d\tau.$$

则 $F(0) = 0$, 且

$$F'(t) = \int_{\Sigma_t} E \, dx \leq \int_{\Sigma_0} E_0 \, dx + \int_{K_t} w^2 \, dx d\tau + F(t).$$

记常数 $G_0 = \int_{\Sigma_0} E_0 \, dx$, $H(t) = \int_{K_t} w^2 \, dx d\tau$ (单调不减)。则

$$F'(t) \leq F(t) + G_0 + H(t).$$

乘以积分因子 e^{-t} :

$$\frac{d}{dt}(e^{-t} F(t)) \leq e^{-t}(G_0 + H(t)).$$

从 0 到 t 积分 ($F(0) = 0$):

$$e^{-t}F(t) \leq \int_0^t e^{-s}G_0 \, ds + \int_0^t e^{-s}H(s) \, ds.$$

由于 $H(s) \leq H(t)$, 且 $\int_0^t e^{-s} \, ds = 1 - e^{-t} \leq 1$, 故

$$e^{-t}F(t) \leq G_0 + H(t) \int_0^t e^{-s} \, ds \leq G_0 + H(t).$$

因此

$$F(t) \leq e^t(G_0 + H(t)).$$

这正是所要证明的能量不等式。

□

Corollary 4.4.4 ▶ Cauchy 问题解的唯一性

波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = w(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

的 C^2 解是唯一的。

Proof. 设 u_1, u_2 是两个解, 令 $v = u_1 - u_2$, 则 v 满足

$$\square v = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

对充分大的 R , 考虑截锥 $K_T = \{|x| \leq R + c(T - t), t \in [0, T]\}$, 其下底包含初值的支撑集。由能量不等式 (取 $w = 0$) 得

$$\int_{K_T} (v_t^2 + c^2 |\nabla v|^2) \leq e^T \int_{\Sigma_0} (v_t^2 + c^2 |\nabla v|^2) \Big|_{t=0} = 0.$$

故在 K_T 内 $v_t \equiv 0$, $\nabla v \equiv 0$, 从而 v 为常数。由 $v(x, 0) = 0$ 得 $v \equiv 0$, 即 $u_1 \equiv u_2$ 。由 T 的任意性, 唯一性得证。

□

Proposition 4.4.5 ▶ Gronwall 不等式

设 $G(t)$ 在 $[0, T]$ 上非负连续可微, 且满足

$$\frac{dG}{dt} \leq CG(t) + F(t), \quad t \in [0, T],$$

其中 $C > 0$ 为常数, $F(t) \geq 0$ 且单调不减。则

$$G(t) \leq e^{Ct}G(0) + \frac{1}{C}(e^{Ct} - 1)F(t), \quad t \in [0, T].$$

Proof. 两边同乘 e^{-Ct} :

$$\frac{d}{dt}(e^{-Ct}G(t)) \leq e^{-Ct}F(t).$$

从 0 到 t 积分, 利用 F 单调不减得

$$e^{-Ct}G(t) - G(0) \leq \int_0^t e^{-Cs}F(s) ds \leq F(t) \int_0^t e^{-Cs} ds = \frac{F(t)}{C}(1 - e^{-Ct}).$$

移项整理即得。 □

Definition 4.4.6 ▶ 能量积分

在波动方程中,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx$$

称为能量积分。对弦振动 ($n = 1$), $\frac{1}{2} \int u_t^2 dx$ 代表动能, $\frac{1}{2} \int c^2 u_x^2 dx$ 代表弹性势能, 故 $E(t)$ 为总能量。

Corollary 4.4.7 ▶ 波动方程解的性质

波动方程的能量不等式表明, 解在依赖域中的能量可由初值能量及非齐次项控制, 由此导出唯一性和连续依赖性。在齐次情形 ($w = 0$), 能量守恒; 在非齐次情形, 能量增长受右端控制。

4.5 初边值问题（混合问题）

前面四节讨论的是全空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Cauchy 问题。本节将空间限制在一个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上，研究初边值问题（又称混合问题）。

4.5.1 初边值问题及其解的唯一性

Definition 4.5.1 ▶ 三类初边值问题

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集， $T > 0$ 。考虑波动方程

$$\square u \equiv u_{tt} - c^2 \Delta u = w(x, t), \quad x \in \Omega, t \in (0, T].$$

仅在 Ω 上给定方程和初始条件是不够的，还需在边界 $\partial\Omega$ 上附加边界条件。常见的有三类：

- 第一类（**Dirichlet** 边界）： $u(x, t) = \varphi(x, t)$, $x \in \partial\Omega$, $t \in [0, T]$.
- 第二类（**Neumann** 边界）： $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \psi(x, t)$, $x \in \partial\Omega$, $t \in [0, T]$.
- 第三类（**Robin** 边界）： $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \alpha(x, t)u(x, t) = \varphi(x, t)$, $x \in \partial\Omega$, $t \in [0, T]$.

完整的初边值问题由方程、初始条件和上述边界条件之一共同构成。

Theorem 4.5.2 ▶ 初边值问题解的唯一性

在适当正则性假设下，三类初边值问题在 $\omega(x, t)$ 在 Ω 上 $t > 0$ 时的值给定且在 Ω 上 $u(x, 0), u_t(x, 0)$ 的值也给定时解是唯一的。

Proof. 对于齐次方程齐次边界的情形，我们可以通过能量积分证明解的唯一性。

设 $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$ 是初边值问题的解。定义能量积分

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx.$$

对 t 求导：

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{\Omega} (u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t) dx = \int_{\Omega} (u_t (c^2 \Delta u + w) + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t) dx \\ &= \int_{\Omega} u_t w dx + c^2 \int_{\Omega} (u_t \Delta u + \nabla u \cdot \nabla u_t) dx. \end{aligned}$$

注意到

$$u_t \Delta u + \nabla u \cdot \nabla u_t = \nabla \cdot (u_t \nabla u),$$

由散度定理,

$$c^2 \int_{\Omega} \nabla \cdot (u_t \nabla u) dx = c^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

因此

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} u_t w dx + c^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

现设 u_1, u_2 是同一初边值问题的两个解, 令 $u = u_1 - u_2$, 则 u 满足齐次方程 $\square u = 0$, 齐次初值 $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$, 以及齐次边界条件。对 u 应用上述能量导数公式 ($w = 0$):

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

下面针对三类齐次边界条件分别讨论。

1. 第一类边界: $u|_{\partial\Omega} = 0$. 边界上 $u = 0$ 恒成立, 故 $u_t|_{\partial\Omega} = 0$, 从而边界积分为零。于是 $\frac{dE}{dt} = 0$, $E(t)$ 为常数。由初值条件 $E(0) = 0$, 得 $E(t) \equiv 0$. 故 $u_t \equiv 0$, $|\nabla u| \equiv 0$, 从而 u 为常数。由 $u|_{t=0} = 0$ 得 $u \equiv 0$. 唯一性得证。
2. 第二类边界: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. 边界积分为零, 同理得 $E(t) \equiv 0$, $u \equiv 0$.
3. 第三类边界: $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x, t)u = 0$, 其中 $\alpha \geq 0$. 代入边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u$, 得

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \int_{\partial\Omega} u_t (-\alpha u) dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(c^2 \int_{\partial\Omega} \alpha u^2 dS \right) + \frac{c^2}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} u^2 dS.$$

记 $B(t) = \frac{c^2}{2} \int_{\partial\Omega} \alpha u^2 dS$, 则

$$\frac{d}{dt} (E(t) + B(t)) = \frac{c^2}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} u^2 dS.$$

若 $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \leq 0$ (这是通常的假设, 例如 α 与 t 无关), 则右端 ≤ 0 , 从而 $E(t) + B(t)$ 单调不减。

由初值条件 $u|_{t=0} = 0$ 知 $B(0) = 0$, 而 $E(0) = 0$, 故 $E(0) + B(0) = 0$.

又因 $\alpha \geq 0$ 有 $B(t) \geq 0$, $E(t) \geq 0$, 故 $E(t) + B(t) \geq 0$. 结合单调性得 $E(t) + B(t) \equiv 0$, 从而 $E(t) \equiv 0$.

故 $u_t \equiv 0$, $|\nabla u| \equiv 0$, 由 $u|_{t=0} = 0$ 得 $u \equiv 0$.

综上, 三类边界条件下解均唯一。 □

Corollary 4.5.3 ▶ 初边值问题的能量不等式

设 $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$ 满足

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = w(x, t), & x \in \Omega, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

并在边界 $\partial\Omega$ 上满足三类齐次边界条件之一。则对任意 $t \in [0, T]$ 有

$$\int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx \leq e^t \left(\int_{\Omega} (g^2 + c^2 |\nabla f|^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} w^2 dx d\tau \right).$$

特别地, 若 $w \equiv 0$, 则能量不等式蕴含解的唯一性。

Proof. 令 $E(t) = \int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx$. 对 t 求导并利用方程 $u_{tt} = c^2 \Delta u + w$, 得

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 2 \int_{\Omega} u_t u_{tt} dx + 2c^2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx \\ &= 2 \int_{\Omega} u_t (c^2 \Delta u + w) dx + 2c^2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx \\ &= 2c^2 \int_{\Omega} (u_t \Delta u + \nabla u \cdot \nabla u_t) dx + 2 \int_{\Omega} u_t w dx. \end{aligned}$$

由于 $u_t \Delta u + \nabla u \cdot \nabla u_t = \nabla \cdot (u_t \nabla u)$, 应用散度定理得

$$\frac{dE}{dt} = 2c^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS + 2 \int_{\Omega} u_t w dx.$$

对最后一项用不等式 $2u_t w \leq u_t^2 + w^2$, 得到

$$2 \int_{\Omega} u_t w dx \leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} w^2 dx \leq E(t) + \int_{\Omega} w^2 dx.$$

因此

$$\frac{dE}{dt} \leq E(t) + \int_{\Omega} w^2 dx + 2c^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

对于齐次边界条件:

- 第一类边界 $u = 0$ 或第二类边界 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 直接导致边界项为零。
- 第三类边界由与上方唯一性定理完全相同的过程可知边界项也为零。

总之, 在各类齐次边界下, 总存在一个非负的能量泛函 $\mathcal{E}(t)$ (可取为 $E(t)$ 或 $E(t) + B(t)$),

满足 $\mathcal{E}(t) \geq E(t)$ 且

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \leq \mathcal{E}(t) + \int_{\Omega} w^2(x, t) dx.$$

两边同乘 e^{-t} , 得 $\frac{d}{dt}(e^{-t}\mathcal{E}(t)) \leq e^{-t} \int_{\Omega} w^2 dx$. 从 0 到 t 积分, 注意到 $\mathcal{E}(0) = E(0) = \int_{\Omega} (g^2 + c^2|\nabla f|^2) dx$, 于是

$$e^{-t}\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0) \leq \int_0^t e^{-s} \int_{\Omega} w^2(x, s) dx ds \leq \int_0^t \int_{\Omega} w^2 dx ds.$$

从而

$$\mathcal{E}(t) \leq e^t \left(\int_{\Omega} (g^2 + c^2|\nabla f|^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} w^2 dx ds \right).$$

由于 $E(t) \leq \mathcal{E}(t)$, 故原不等式得证。

当 $w \equiv 0$ 且初值为零时, 右端为零, 故 $E(t) \equiv 0$, 从而 $u_t \equiv 0$, $\nabla u \equiv 0$, 由初值 $u|_{t=0} = 0$ 得 $u \equiv 0$. 这给出了解的唯一性。 $\square$

能量不等式中取 $w \equiv 0$ 可以立即得到解的唯一性。

4.5.2 特征值问题与分离变量法

考虑混合问题

$$\begin{cases} \square u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

对于有限区域上的齐次方程齐次边值问题 (以第一类边界条件为例), 可以利用分离变量法转化为特征值问题。

设 $u(x, t) = a(t)v(x)$, 代入方程得

$$a''(t)v(x) - c^2 a(t)\Delta v(x) = 0,$$

即

$$\frac{a''(t)}{c^2 a(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} = -\lambda \quad (\text{常数}).$$

于是得到

$$a''(t) + c^2 \lambda a(t) = 0,$$

以及

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definition 4.5.4 ▶ 特征值问题

使

$$a''(t) + c^2 \lambda a(t) = 0,$$

以及

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

有非零解的 λ 称为特征值, 称该问题为特征值问题, 对应的非零解 v 称为特征函数。

Theorem 4.5.5 ▶ 特征值的存在性与完备性

Ω 满足适当的正则性假设时, 存在一系列特征值 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和对应的特征函数 $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, 满足:

1. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, 且 $\lambda_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$);
2. $\{v_k\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 的一组完备正交基, 即 $\int_{\Omega} v_k v_j \, dx = \delta_{kj}$ 。

Proposition 4.5.6

混合问题

$$\begin{cases} \square u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

的一个形式解由下式给出:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle f, v_k \rangle \cos(c\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{\langle g, v_k \rangle}{c\sqrt{\lambda_k}} \sin(c\sqrt{\lambda_k}t) \right) v_k(x).$$

Proof. 将解 $u(x, t)$ 按特征函数展开:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) v_k(x).$$

代入方程, 利用特征方程 $\Delta v_k = -\lambda_k v_k$, 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k''(t) + c^2 \lambda_k a_k(t)) v_k(x) = 0.$$

由 $\{v_k\}$ 的线性无关性, 对每个 k 有

$$a_k''(t) + c^2 \lambda_k a_k(t) = 0.$$

初始条件给出

$$a_k(0) = \int_{\Omega} f(x) v_k(x) dx, \quad a_k'(0) = \int_{\Omega} g(x) v_k(x) dx.$$

解此二阶常系数齐次 ODE, 得

$$a_k(t) = a_k(0) \cos(c\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{a_k'(0)}{c\sqrt{\lambda_k}} \sin(c\sqrt{\lambda_k}t).$$

因此混合问题的解为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle f, v_k \rangle \cos(c\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{\langle g, v_k \rangle}{c\sqrt{\lambda_k}} \sin(c\sqrt{\lambda_k}t) \right) v_k(x),$$

其中 $\langle f, v_k \rangle = \int_{\Omega} f v_k dx$.

□

4.5.3 半空间与反射法

考虑半空间 $\mathbb{R}_+^3 = \{x_3 > 0\}$ 上的初边值问题:

$$\begin{cases} \square u = w(x, t), & x_3 > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & x_3 > 0, \\ u(x_1, x_2, 0, t) = h(x_1, x_2, t), & x_3 = 0, t > 0. \end{cases}$$

反射法的思想：通过将初值和右端项适当地延拓到整个 $\mathbb{R}^3$ ，使得在全空间 Cauchy 问题的解自动满足半空间上的边界条件。

首先考虑齐次边界条件 $h \equiv 0$ 的情形。可将函数关于 $x_3 = 0$ 作奇延拓或偶延拓。

Definition 4.5.7 ▶ 奇延拓与偶延拓

对于 Dirichlet 边界 $u|_{x_3=0} = 0$ ，作奇延拓：定义

$$\tilde{w}(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} w(x_1, x_2, x_3, t), & x_3 > 0, \\ -w(x_1, x_2, -x_3, t), & x_3 < 0, \end{cases}$$

对 f, g 类似。延拓后全空间的解 U 满足 $U(x_1, x_2, 0, t) = 0$ ，限制回半空间即为原问题的解。

对于 Neumann 边界 $\frac{\partial u}{\partial x_3}|_{x_3=0} = 0$ ，作偶延拓：令

$$\tilde{w}(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} w(x_1, x_2, x_3, t), & x_3 > 0, \\ w(x_1, x_2, -x_3, t), & x_3 < 0. \end{cases}$$

则全空间解自动满足法向导数为零。

若 $h \neq 0$ ，可先将边界条件齐次化。

设我们可找到一个充分光滑的函数 $v(x, t)$ ，满足 $v|_{x_3=0} = h(x_1, x_2, t)$ 。令 $u = v + w$ ，则 w 满足齐次边界条件 $w|_{x_3=0} = 0$ 和相应的修正方程及初值。这便将非齐次边界问题化为齐次边界问题。在具体构造中，常取

$$v(x_1, x_2, x_3, t) = h(x_1, x_2, t) + a_1(x_1, x_2, t)x_3 + a_2(x_1, x_2, t)x_3^2 + \cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \dots$ 由方程和边界条件确定。

然后在半空间上用反射法处理 w 的 Dirichlet 问题。

热方程与抛物型方程

5.1 Fourier 变换^[3]

5.1.1 Fourier 变换与卷积的定义与基本性质

Definition 5.1.1 ▶ Fourier 变换

设 $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义其 Fourier 变换 $\hat{u} = \mathcal{F}u$ 为

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 5.1.2 ▶ Fourier 逆变换

设 $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义其 Fourier 逆变换 $\check{u} = \mathcal{F}^{-1}u$ 为

$$\check{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} u(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 5.1.3 ▶ 卷积

对 $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义其卷积为

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) v(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 5.1.4 ▶ 基本估计与对称性

设 $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{L^1}$ 且 $\hat{u}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续。

Proof. 由定义直接得

$$|\hat{u}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int |u(x)| dx.$$

(2) 对任意 ξ, η ,

$$|\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\eta)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int |e^{-ix \cdot \xi} - e^{-ix \cdot \eta}| |u(x)| dx.$$

被积函数受 $2|u|$ 控制且当 $\xi \rightarrow \eta$ 时趋于零, 由控制收敛定理知 $\hat{u}$ 一致连续。 $\square$

Proposition 5.1.5 ▶ 交换公式

若 $u, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) w(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{w}(x) dx.$$

Proof. 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} \int \hat{u}(x) w(x) dx &= (2\pi)^{-n/2} \iint e^{-ix \cdot y} u(y) w(x) dy dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \iint e^{-iy \cdot x} w(x) u(y) dx dy = \int \hat{w}(y) u(y) dy. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 5.1.6 ▶ Gauss 积分公式

设 $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax - bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{a^2}{4b}}.$$

特别地, $\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\pi/b}$, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-b|x|^2} dx = (\pi/b)^{n/2}$ 。

Proof. 令 $f(z) = e^{-bz^2}$, 它是整函数。取矩形围道 $[-R, R] \rightarrow -R + ia/(2b) \rightarrow R + ia/(2b) \rightarrow -R$, 由 Cauchy 积分定理及 $R \rightarrow \infty$ 时的衰减性, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x + i\frac{a}{2b})^2} dx.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax - bx^2} dx = e^{-\frac{a^2}{4b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x - i\frac{a}{2b})^2} dx = e^{-\frac{a^2}{4b}} \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

多维情形利用乘积积分即得。 $\square$

Proposition 5.1.7 ▶ Gauss 函数的 Fourier 变换

记 $G(x) = e^{-|x|^2/2}$, 则 $\widehat{G}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$. 更一般地, 令 $V_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n/2} e^{-|x|^2/\varepsilon}$, 则

$$\widehat{V}_\varepsilon(\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\varepsilon|\xi|^2/4}.$$

Proof. 由定义,

$$\widehat{V}_\varepsilon(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \varepsilon^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} e^{-|x|^2/\varepsilon} dx.$$

配方 $|x|^2/\varepsilon + ix \cdot \xi = \frac{1}{\varepsilon} |x + \frac{i\varepsilon\xi}{2}|^2 + \frac{\varepsilon|\xi|^2}{4}$, 利用平移不变性和 Gauss 积分即得。□

Proposition 5.1.8 ▶ 卷积的 Fourier 变换

设 $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\widehat{u * v}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\hat{\cdot}$ 是归一化的 Fourier 变换:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

此外, $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且一致连续 (从而连续), 并有

$$\|u * v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}.$$

Proof. 1. $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \|u * v\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |(u * v)(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| |v(y-x)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(y-x)| dy \right) dx = \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1} < \infty. \end{aligned}$$

故 $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2. $u * v$ 一致连续: 对任意 $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |(u * v)(x+h) - (u * v)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h-y) - u(x-y)| |v(y)| dy \\ &\stackrel{z=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |u(z+h) - u(z)| |v(x-z)| dz. \end{aligned}$$

由 L^1 平移连续性,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h u - u\|_{L^1} = 0,$$

其中 $\tau_h u(z) = u(z + h)$.

给定 $\varepsilon > 0$, 取 $v_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (连续紧支撑) 使得 $\|v - v_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon$, 并令 $M = \|v_\varepsilon\|_{L^\infty} < \infty$. 分解 $v = v_\varepsilon + (v - v_\varepsilon)$, 代入 $|(u * v)(x + h) - (u * v)(x)|$ 有:

$$\begin{aligned} |(u * v)(x + h) - (u * v)(x)| &\leq \int |u(z + h) - u(z)| |v_\varepsilon(x - z)| dz \\ &\quad + \int |u(z + h) - u(z)| |(v - v_\varepsilon)(x - z)| dz. \end{aligned}$$

第一项 $\leq M \|\tau_h u - u\|_{L^1}$; 第二项 $\leq \|\tau_h u - u\|_{L^1} \|v - v_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon \|\tau_h u - u\|_{L^1}$. 因此

$$|(u * v)(x + h) - (u * v)(x)| \leq (M + \varepsilon) \|\tau_h u - u\|_{L^1}.$$

由于 $\|\tau_h u - u\|_{L^1} \rightarrow 0$, 上式右端与 x 无关且趋于 0, 故 $u * v$ 一致连续。

3. 卷积的 Fourier 变换公式: 由 $u, v \in L^1$ 知 $\hat{u}, \hat{v}$ 有界连续, 且 $u * v \in L^1$, 故其 Fourier 变换存在. 利用 Fubini 定理 (被积函数绝对可积):

$$\begin{aligned} \widehat{u * v}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) v(y) dy \right) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y) \cdot \xi} u(x - y) e^{-iy \cdot \xi} v(y) dy dx \\ &\stackrel{z=x-y}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} v(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} u(z) dz \right) dy \\ &= (2\pi)^{n/2} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi). \end{aligned}$$

□

Proposition 5.1.9 ▶ Gauss 核的逼近性质

定义 Gauss 核

$$G_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \varepsilon^n} e^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

则

1. $\int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(x) dx = 1$ 对一切 $\varepsilon > 0$ 成立;

2. 对任意连续有界函数 $w \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(x) w(x) dx = w(0).$$

Proof. (1) 换元 $x = \varepsilon y$, 由多维 Gauss 积分直接得。(2) 令 $I_\varepsilon = \int G_\varepsilon(x) w(x) dx$, 则

$$I_\varepsilon - w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(x) (w(x) - w(0)) dx.$$

对给定的 $\eta > 0$, 取 $\delta > 0$ 使 $|x| < \delta$ 时 $|w(x) - w(0)| < \eta$ 。将积分分为 $|x| < \delta$ 与 $|x| \geq \delta$ 两部分:

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon - w(0)| &\leq \int_{|x| < \delta} G_\varepsilon(x) |w(x) - w(0)| dx + \int_{|x| \geq \delta} G_\varepsilon(x) |w(x) - w(0)| dx \\ &\leq \eta \int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(x) dx + 2\|w\|_{L^\infty} \int_{|x| \geq \delta} G_\varepsilon(x) dx \\ &= \eta + 2\|w\|_{L^\infty} \int_{|y| \geq \delta/\varepsilon} G_1(y) dy. \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\delta/\varepsilon \rightarrow \infty$, 故第二个积分趋于 0。因此可取 ε_0 充分小使得 $|I_\varepsilon - w(0)| \leq 2\eta$ 对所有 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 成立, 由 η 的任意性即得结论。 $\square$

5.1.2 L^2 理论与 Fourier 变换的性质

Theorem 5.1.10 ▶ Plancherel 定理

若 $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

因此 Fourier 变换可唯一地延拓为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的等距同构。

Proof. 记 $v(x) = \overline{u(-x)}$, 则 $v \in L^1 \cap L^2$, 且 $\hat{v}(\xi) = \overline{\hat{u}(\xi)}$ 。考虑卷积

$$w = u * v, \quad w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) \overline{u(-y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) \overline{u(y)} dy.$$

由卷积的 Fourier 变换公式 (Lemma 2),

$$\hat{w}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{u}(\xi)|^2.$$

显然 $w \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ (实际上 w 连续且 $w(0) = \int |u(y)|^2 dy = \|u\|_2^2$)。现在利用 Gauss 核逼近。对 w 应用 Lemma 3,

$$w(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) G_\varepsilon(x) dx.$$

另一方面, 由交换公式和 G_ε 的 Fourier 变换,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) G_\varepsilon(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(\xi) \widehat{G_\varepsilon}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \cdot (2\pi)^{-n/2} e^{-\varepsilon^2 |\xi|^2/4} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 e^{-\varepsilon^2 |\xi|^2/4} d\xi. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由单调收敛定理得

$$w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{u}\|_{L^2}^2.$$

而 $w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \overline{u(y)} dy = \|u\|_{L^2}^2$ 。故 $\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$ 。 □

Definition 5.1.11 ▶ L^2 中的 Fourier 变换

由于 $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 且 Plancherel 定理给出了等距性, 则可将 Fourier 变换的定义唯一地延拓到整个 L^2 上:

取一系列 $\{u_m\} \subset L^1 \cap L^2$ 使得在 L^2 中 $u_m \rightarrow u$, 定义 $\hat{u}$ 为 $\{\hat{u}_m\}$ 在 L^2 中的极限。

此极限不依赖于逼近序列的选取。

Proposition 5.1.12 ▶ Fourier 变换的运算性质

设 $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ (或更一般地 L^2 意义下), 则

$$1. \text{ 对称性: } \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{v}(x) dx;$$

2. 导数与多项式: 若 $D^\alpha u \in L^1 \cap L^2$, 则 $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$;
3. 卷积: $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v}$;
4. 反演公式: $u = \check{u}$, 即 $u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi$ 在 L^2 意义下成立。

Proof. (1) 即为前述交换公式, 已在 L^1 情形证明, 可通过逼近延拓至 L^2 。

(2) 对具有紧支集的光滑函数 u 分部积分即得:

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha u}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} D^\alpha u(x) dx = (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|\alpha|} \int D_x^\alpha (e^{-ix \cdot \xi}) u(x) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} (i\xi)^\alpha \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

对一般 $u \in L^1 \cap L^2$ 且弱导数存在时, 通过逼近可得。

(3) 即 Lemma 2, 已证。

(4) 由 Plancherel 定理的证明过程可知, 对 $u \in L^1 \cap L^2$,

$$\check{u}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi = u(x) \quad \text{a.e.}$$

因此 Fourier 变换及其逆变换在 L^2 中互逆。 □

5.2 热方程的初值问题

5.2.1 热方程

Definition 5.2.1 ▶ 热方程

热方程是形如

$$u_t - k\Delta u = 0$$

的抛物型方程，其中 $k > 0$ 为热导率。对 u 作适当的线性变换（缩放时间变量）后可化为

$$u_t - \Delta u = 0$$

的标准形式。

物理意义：该方程描述热传导过程中温度分布随时间的变化。 $n = 1$ 时即为一维杆上的热传导。

5.2.2 热方程的 Cauchy 问题

Definition 5.2.2 ▶ 热方程的纯初值问题（Cauchy 问题）

下列考虑纯初值问题（Cauchy 问题）称热方程的纯初值问题（Cauchy 问题）：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5.1)$$

· 初值问题(5.1)基本解的 Fourier 推导：

对初值问题 (5.1) 形式上关于空间变量作 Fourier 变换。由于 $\widehat{\Delta u}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi)$ ，方程化为

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

解此关于 t 的常微分方程得

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}.$$

作 Fourier 逆变换，

$$u(x, t) = (\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t})^\vee.$$

注意到 $e^{-|\xi|^2 t}$ 是某个函数的 Fourier 变换。计算：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t})(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-t|\xi|^2} d\xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi - \frac{ix}{2t}|^2} d\xi \quad (\text{配方}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\eta|^2} d\eta \quad (\eta = \xi - \frac{ix}{2t}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = K(x, t).\end{aligned}$$

因此 $e^{-|\xi|^2 t} = \widehat{K(\cdot, t)}(\xi)$ 。由卷积的 Fourier 变换公式，

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) \hat{K}(\xi, t)) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (f * K)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x - y, t) dy.$$

这就给出了热方程初值问题的卷积解形式。

Definition 5.2.3 ▶ 热方程 Cauchy 问题的基本解

定义函数

$$K(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

称 $K(x, t)$ 为热方程的基本解（或热核）。

Proposition 5.2.4 ▶ 热核的基本性质

热核 $K(x, t)$ 具有以下性质：

1. 对任意 $t > 0$, $K(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. 当 $t > 0$ 时, $K_t - \Delta K = 0$;
3. 当 $t > 0$ 时, $K(x, t) > 0$;
4. 对一切 $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) dx = 1$;
5. 对任意 $\varepsilon > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} K(x, t) dx = 0$, 并且对任意连续有界函数 w , 有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) w(y) dy = w(x).$$

Proof. 性质 (1) 和 (3) 由表达式直接可得。

性质 (2): 直接计算偏导数。

$$K_t = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right).$$

对 x_i 求导:

$$K_{x_i} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{x_i}{2t} \right),$$

$$K_{x_i x_i} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x_i^2}{4t^2} \right).$$

求和得

$$\Delta K = \sum_{i=1}^n K_{x_i x_i} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) = K_t.$$

故 $K_t - \Delta K = 0$ 。

性质 (4): 换元 $x = 2\sqrt{t}y$, 则 $dx = (4t)^{n/2}dy$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, t) dx = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy.$$

由 $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$, 得 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = \pi^{\frac{n}{2}}$, 故积分值为 1。

性质 (5): 对给定的 $\varepsilon > 0$, 令 $y - x = 2\sqrt{t}\eta$, 则 $dy = (4t)^{\frac{n}{2}}d\eta$, 且

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} K(x-y, t) dy = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{|\eta|>\frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}} e^{-|\eta|^2} d\eta.$$

当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}} \rightarrow \infty$, 且因为

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = \pi^{\frac{n}{2}} < +\infty,$$

从而

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\eta|>R} e^{-|\eta|^2} d\eta = 0.$$

即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{|y-x|>\varepsilon} K(x-y, t) dy = 0.$$

此表达式与 x 无关, 从而一致收敛。

□

Theorem 5.2.5 ▶ 热方程初值问题的解的存在性与光滑性

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续有界, 则函数

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x - y, t) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

满足:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, 且 $u_t - \Delta u = 0$;
2. 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$ 。因此补充定义 $u(x, 0) = f(x)$ 后, $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ 。

Proof. 记热核

$$K(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

由条件, 存在常数 $M > 0$ 使得 $|f(y)| \leq M$ 对一切 $y \in \mathbb{R}^n$ 成立。

1. 光滑性与方程:

需证 u 在 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上无穷次可微, 且求导与积分可交换次序。为此, 只需证明对任意非负整数 k 和任意多重指标 α , 偏导数 $\partial_t^k D_x^\alpha u(x, t)$ 存在、连续, 且满足

$$\partial_t^k D_x^\alpha u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t) dy.$$

其中 $D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 。

(a) 对核函数的偏导数做精确估计:

考虑

$$K(z, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4t}\right).$$

每次对 z_j 求导产生因子 $-\frac{z_j}{2t}$, 每次对 t 求导除产生 t 的幂次外, 还会产生形如 $|z|^2/t^2$ 的项。由乘积法则与链式法则, 任意偏导数 $\partial_t^k D_z^\alpha K(z, t)$ 均可表为

$$\partial_t^k D_z^\alpha K(z, t) = \sum_{\ell=1}^L Q_\ell(z, t) t^{-p_\ell} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4t}\right),$$

其中每一项 $Q_\ell(z, t)$ 是关于 z 的多项式, 系数为 t 的有理函数 (实为 t 的若干负幂之和), 次数有限; p_ℓ 是非负整数。统一放缩后, 存在常数 C_0 和 r_0 (依赖于 k, α, n), 使得

$$|\partial_t^k D_z^\alpha K(z, t)| \leq C_0 (1 + |z|^{r_0}) (1 + t^{-s_0}) \exp\left(-\frac{|z|^2}{4t}\right),$$

其中 s_0 为与 k 有关的某正整数。此即为后续估计所需的粗略上界。
 现固定任意紧集 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 。不妨设存在 $R > 0$ 和 $0 < t_1 < t_2$ ，使得 $\mathcal{K} \subset B_R \times [t_1, t_2]$ ，这里 $B_R = \{x : |x| \leq R\}$ 。对所有 $(x, t) \in B_R \times [t_1, t_2]$ 估计 $\partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t)$ 。令 $z = x - y$ ，则

$$\partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t) = (\partial_t^k D_z^\alpha K)(x - y, t).$$

于是

$$\begin{aligned} |\partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t)| &\leq C_0(1 + |x - y|^{r_0})(1 + t^{-s_0}) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right) \\ &\leq C_0(1 + t_1^{-s_0})(1 + |x - y|^{r_0}) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t_2}\right), \end{aligned}$$

其中用到 $t \geq t_1$ 时 $t^{-s_0} \leq t_1^{-s_0}$ ，以及 $t \leq t_2$ 时 $-\frac{|x-y|^2}{4t} \leq -\frac{|x-y|^2}{4t_2}$ 。
 由初等不等式，对任意 $A > 0$ ，存在仅依赖于 r_0 与 A 的常数 C_1 ，使得对所有 $w \geq 0$ 有 $(1 + w^{r_0}) \leq C_1 e^{Aw^2}$ 。取 $A = \frac{1}{8t_2}$ ，则存在 C_2 使得

$$(1 + |x - y|^{r_0}) \leq C_2 \exp\left(\frac{|x - y|^2}{8t_2}\right).$$

因此

$$(1 + |x - y|^{r_0}) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t_2}} \leq C_2 \exp\left(\frac{|x - y|^2}{8t_2} - \frac{|x - y|^2}{4t_2}\right) = C_2 \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{8t_2}\right).$$

进一步利用 x 的有界性。由 $|x| \leq R$ 得

$$|x - y|^2 = |y - x|^2 \geq \frac{1}{2}|y|^2 - |x|^2 \geq \frac{1}{2}|y|^2 - R^2.$$

代入指数得

$$\exp\left(-\frac{|x - y|^2}{8t_2}\right) \leq \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}|y|^2 - R^2}{8t_2}\right) = \exp\left(\frac{R^2}{8t_2}\right) \exp\left(-\frac{|y|^2}{16t_2}\right).$$

综合上述估计，对所有 $x \in B_R$ ， $t \in [t_1, t_2]$ ， $y \in \mathbb{R}^n$ ，均有

$$|\partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t)| \leq C_0(1 + t_1^{-s_0}) \cdot C_2 e^{\frac{R^2}{8t_2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{16t_2}\right) = C_3 \exp\left(-\frac{|y|^2}{16t_2}\right),$$

其中 $C_3 = C_0(1 + t_1^{-s_0})C_2 \exp(R^2/(8t_2))$ 为仅依赖于 $k, \alpha, R, t_1, t_2, n$ 的常数。令 $a = 1/(16t_2) > 0$, 即得关键控制函数:

$$|\partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t)| \leq C_3 e^{-a|y|^2}, \quad \forall x \in B_R, t \in [t_1, t_2], y \in \mathbb{R}^n.$$

注意到 $e^{-a|y|^2}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积 ($\int e^{-a|y|^2} dy = (\pi/a)^{n/2} < \infty$)。

(b) 利用控制收敛定理交换积分与求导:

考虑 $u(x, t)$ 的被积函数 $F(x, t, y) = f(y)K(x - y, t)$ 。由 $|f(y)| \leq M$ 得

$$|f(y)\partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t)| \leq MC_3 e^{-a|y|^2},$$

右端为 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数。根据含参变量积分的可微性定理 (或直接对差商用 Lebesgue 控制收敛定理), 偏导数 $\partial_t^k D_x^\alpha u(x, t)$ 存在, 且积分与求导可交换次序:

$$\partial_t^k D_x^\alpha u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_t^k D_x^\alpha K(x - y, t) dy.$$

该等式对一切 $(x, t) \in B_R \times [t_1, t_2]$ 成立。由紧集 $\mathcal{K}$ 的任意性, 取包含任意给定点的紧邻域即知, u 在 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上具有任意阶连续偏导数, 从而 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ 。

(c) 验证热方程:

由于热核在 $t > 0$ 时满足 $K_t(z, t) = \Delta_z K(z, t)$, 代入 $z = x - y$ 得

$$\partial_t K(x - y, t) = \Delta_x K(x - y, t).$$

代入积分表达式:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_t K(x - y, t) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Delta_x K(x - y, t) dy. \end{aligned}$$

另一方面, 由已证得的对 x 的二阶导数表达式,

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 K(x - y, t) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Delta_x K(x - y, t) dy. \end{aligned}$$

两式右端相同, 故对一切 $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ 均有 $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ 。第 (1) 部分证毕。

2. 初值极限:

由热核性质 (4):

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) dy = 1,$$

有

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x - y, t) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f(x))K(x - y, t) dy. \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$ 。由 f 在点 x 处连续, 存在 $\delta > 0$, 当 $|y - x| < \delta$ 时 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ 。将积分区域分为 $D_1 = \{y : |y - x| < \delta\}$ 与 $D_2 = \{y : |y - x| \geq \delta\}$, 则

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &\leq \int_{D_1} K(x - y, t)|f(y) - f(x)| dy + \int_{D_2} K(x - y, t)|f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{D_1} K(x - y, t) dy + 2M \int_{D_2} K(x - y, t) dy. \end{aligned}$$

由 $K \geq 0$ 及全空间积分为 1, 第一项不超过 ε 。对第二项作代换 $z = y - x$, 得

$$\int_{D_2} K(x - y, t) dy = \int_{|z| \geq \delta} K(z, t) dz.$$

根据热核性质 (5) 的第一部分,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|z| \geq \delta} K(z, t) dz = 0,$$

故存在 $\tau > 0$, 当 $0 < t < \tau$ 时该积分小于 $\frac{\varepsilon}{2M+1}$ 。于是第二项满足

$$2M \int_{D_2} K(x - y, t) dy < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M+1} < \varepsilon.$$

综上, 当 $0 < t < \tau$ 时, $|u(x, t) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ 。由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得 $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$ 。

最后证明补充定义 $u(x, 0) = f(x)$ 后, u 在 $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上连续。由于 $t > 0$ 时 u 光滑 (从而连续), 只需证 u 在每一点 $(x_0, 0)$ 处关于乘积空间连续。

引理 对任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$, 当 $t \rightarrow 0^+$ 时 $u(\cdot, t)$ 在 K 上一致收敛于 f .

由 f 在紧集 $\overline{K + B_1(0)}$ 上的一致连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得只要 $x \in K$, $|y - x| < \delta$, 就有 $y \in \overline{K + B_1(0)}$ 且 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. 沿用前述估计, 对一切 $x \in K$ 有

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \int_{|z| \geq \delta} K(z, t) dz.$$

由性质 (5), 右端积分当 $t \rightarrow 0^+$ 时趋于 0, 且与 x 无关. 故存在 $\tau > 0$, 当 $0 < t < \tau$ 时, 对所有 $x \in K$ 一致地有 $|u(x, t) - f(x)| < 2\varepsilon$. 从而得证。

现取点 $(x_0, 0)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 取紧集 $K = \overline{B_1(x_0)}$. 由 f 的连续性, 存在 $\eta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \eta_1$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 由上述一致收敛性, 存在 $\tau > 0$, 使得当 $0 < t < \tau$ 时, 对一切 $x \in K$ 有 $|u(x, t) - f(x)| < \varepsilon$. 令 $\delta = \min(\eta_1, \tau, 1)$. 则当 $|x - x_0| < \delta$ 且 $0 \leq t < \delta$ 时:

(a) 若 $t = 0$, 则 $|u(x, 0) - u(x_0, 0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(b) 若 $0 < t < \delta$, 则 $|u(x, t) - f(x_0)| \leq |u(x, t) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

这就证明了 u 在 $(x_0, 0)$ 处连续. 由 $(x_0, 0)$ 的任意性, 补充定义后的 u 在 $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上连续. 定理证毕。

□

关于热方程解的几点说明:

1. 热传导方程具有光滑化效应: 即使初值 f 仅连续, 解在 $t > 0$ 时也无穷次可微.
2. 解的依赖域是整个空间: 任何一点的初值瞬间影响整个空间的解, 因此热传导具有无限传播速度. 这在物理上是不准确的, 实际模型需作修正.
3. 若初值 f 满足增长条件

$$|f(x)| \leq M e^{a|x|^2},$$

则解唯一; 若无此限制, 解可能不唯一 (见下例)。

4. 解具有极值原理: 对所有 $t \geq 0$ 有:

$$\inf_{\mathbb{R}^n} f \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} f.$$

5.2.3 热方程初值问题解的非唯一性

下面给出热方程初值问题解不唯一的经典例子。考虑一维情形，并附加齐次边界条件 $u(0, t) = 0$ 。

Example 5.2.6 ▶ Tychonoff 非唯一性例子

设 $g(t)$ 定义为

$$g(t) = \begin{cases} \exp(-t^{-2}), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

则存在一维热方程 $u_t - u_{xx} = 0$ 的非零光滑解 $u(x, t)$ ，满足 $u(x, 0) = 0$ 以及 $u(0, t) = g(t)$ 。特别地，零初值问题存在非零解，因此初值问题解不唯一。

Proof. 首先构造形式解。设

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

由于 g 在 0 处所有导数均为 0（光滑性），代入 $t = 0$ 显然有 $u(x, 0) = 0$ 。当 $x = 0$ 时， $u(0, t) = g^{(0)}(0) = g(0) = 0$ ，但对 $t > 0$ ， $g(t) \neq 0$ ，因此我们额外要求解在 $x = 0$ 上等于 $g(t)$ ，这只需要重新定义 $u(0, t) = g(t)$ 并由级数在 $t > 0$ 时给出。

验证该级数是热方程的解。将形式解代入方程：

$$u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+1)}(0)}{(2k)!} x^{2k}, \quad u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{(2k-2)!} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+1)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = u_t.$$

因此逐项满足方程。但需证明级数及其导数收敛，以保证合法性。

为此需估计 g 的导数的增长。对 $t > 0$ ， $g(t) = e^{-t^{-2}}$ 。固定 $t > 0$ ，考虑复变函数 $f(z) = e^{-z^{-2}}$ 在 $z = t$ 处的导数。使用 Cauchy 积分公式：取中心在 t 、半径为 θt 的圆周 Γ ($0 < \theta < 1$)，则

$$g^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{-z^{-2}}}{(z-t)^{n+1}} dz.$$

在 Γ 上令 $z = t(1 + \theta e^{i\phi})$ 。通过选取足够小的 θ （例如 $\theta = \frac{1}{2}$ ），可以证明存在常数 $C > 0$ 使得对圆周上的 z 有

$$\operatorname{Re}(z^{-2}) \geq \frac{1}{2t^2}$$

(具体推导从略, 核心在于控制调和函数 $\operatorname{Re}((1+u)^{-2})$ 在 $|u| \leq \theta$ 时的下界)。从而

$$|e^{-z^{-2}}| \leq e^{-\frac{1}{2t^2}}.$$

于是

$$|g^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2t^2}}}{(\theta t)^{n+1}} \cdot 2\pi\theta t = \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-\frac{1}{2t^2}}.$$

取 $\theta = \frac{1}{2}$, 即得估计

$$|g^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{(\frac{1}{2}t)^n} e^{-\frac{1}{2t^2}}, \quad t > 0. \quad (5.2)$$

现在估计级数的余项。考虑 $u(x, t)$ 的通项 (在 $t > 0$ 处):

$$a_k(x, t) = \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

利用 $(2k)! \geq (k!)^2$ 及 (5.2),

$$|a_k(x, t)| \leq \frac{k!}{(\frac{1}{2}t)^k} e^{-\frac{1}{2t^2}} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq e^{-\frac{1}{2t^2}} \frac{x^{2k}}{k! (\frac{1}{2}t)^k}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x, t)| \leq e^{-\frac{1}{2t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{t/2}\right)^k = e^{-\frac{1}{2t^2}} \exp\left(\frac{2x^2}{t}\right).$$

该级数对每个固定的 $t > 0$ 和所有 x 绝对收敛, 且收敛在紧集上一致。同理可验证 u_t 和 u_{xx} 的级数也绝对收敛, 因为它们本质上具有相同的结构 ($g^{(k+1)}$ 代替 $g^{(k)}$, 但估计类似)。因此 $u \in C^\infty$, 且 $u_t = u_{xx}$ 。

最后验证非唯一性: 当 $t \leq 0$ 时, $g(t) = 0$, 故形式解 u 在 $t = 0$ 时恒为 0。但当 $t > 0$ 时, $g(t) \neq 0$, 从而存在非零解满足零初值。这说明若对初值不加增长条件限制, 热方程初值问题的解不是唯一的。 $\square$

Example 5.2.7 ▶ 课后练习: 热方程初值问题的解的光滑性

设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上具有直到 S 阶连续有界的偏导数, $u(x, t)$ 由热核卷积给出:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) f(y) dy, \quad t > 0.$$

证明：对任意多重指标 $|\alpha| \leq S$ ，有

$$D_x^\alpha u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) D_y^\alpha f(y) dy,$$

且 $D_x^\alpha u$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上连续。

Proof. 由于 f 的偏导数有界，记

$$M_k = \max_{|\alpha|=k} \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f|.$$

对 $|\alpha| \leq S$ ，考虑

$$v_\alpha(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) D^\alpha f(y) dy.$$

因为 $K(x - y, t)$ 的 x 偏导数对固定的 $t > 0$ 为 y 的速降函数，且 $D^\alpha f$ 有界，由 Lebesgue 控制收敛定理，积分号下求导合法，且

$$D_x^\beta v_\alpha(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta K(x - y, t) D^\alpha f(y) dy.$$

特别地，对 $|\alpha| \leq S$ ，取 $\beta = \alpha$ 时，利用分部积分（或直接利用热核的性质）可得

$$D_x^\alpha u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha K(x - y, t) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y, t) D^\alpha f(y) dy = v_\alpha(x, t).$$

最后一个等号是因为

$$D_x^\alpha K(x - y, t) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha K(x - y, t),$$

而 $K(\cdot, t)$ 充分光滑，对固定 x 分部积分并将边界项消去（ K 及其导数在无穷远处衰减），即得所需。上述积分关于 (x, t) 的连续性由被积函数的连续性和控制收敛定理得到。 $\square$

Example 5.2.8 ▶ 课后练习：热方程的自相似解（Liouville 降阶法）

求所有形如

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

且满足热方程 $u_t - u_{xx} = 0$ 的解 $u(x, t)$ 。（已知 $f(z) = e^{-z^2}$ 是一个特解。）

回顾:

1. 一阶线性微分方程的求解: 对于一阶线性方程

$$y' + p(x)y = Q(x),$$

其通解可由积分因子法得到:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right).$$

2. Liouville 降阶法: 设 $y_1(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个非零特解。则与之线性无关的另一特解 $y_2(x)$ 可由降阶法求得, 通解为

$$y(x) = y_1(x) \left(C_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1(x)^2} dx + C_2 \right),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。

解. 令 $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$, 则 $u = t^{-1/2}f(z)$. 计算偏导数:

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{2}t^{-3/2}f(z) + t^{-1/2}f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{2}t^{-3/2}f(z) + t^{-1/2}f'(z) \left(-\frac{x}{4}t^{-3/2} \right) \\ &= -\frac{1}{2t\sqrt{t}}f(z) - \frac{x}{4t^2}f'(z). \end{aligned}$$

由 $x = 2\sqrt{t}z$, 代入得

$$u_t = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}f(z) - \frac{2\sqrt{t}z}{4t^2}f'(z) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}(f(z) + zf'(z)).$$

空间导数:

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{t}}f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}}f'(z) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2t}f'(z),$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2t} f'(z) \right) = \frac{1}{2t} f''(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2t} f''(z) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{4t\sqrt{t}} f''(z).$$

代入热方程 $u_t - u_{xx} = 0$ 并乘以 $-4t\sqrt{t}$ 得

$$2(f(z) + zf'(z)) + f''(z) = 0,$$

即

$$f''(z) + 2zf'(z) + 2f(z) = 0. \quad (1)$$

使用 Liouville 降阶法, 方程 (1) 中 $p(z) = 2z$, 已知特解 $f_1(z) = e^{-z^2}$, 则通解为

$$f(z) = e^{-z^2} \left(C_1 \int_0^z e^{s^2} ds + C_2 \right),$$

其中利用了 $\int p(z) dz = z^2$, $e^{-\int p dz} = e^{-z^2}$, $\frac{e^{-z^2}}{f_1(z)^2} = e^{z^2}$ 。

因此原方程的所有自相似解为

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(C_1 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{s^2} ds + C_2 \right),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。

□

5.3 热方程的最大值原理与有界解的唯一性、正则性

5.3.1 最大值原理

设 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开区域, $T > 0$ 。记柱体

$$\Omega_T = \{(x, t) : x \in \omega, 0 < t \leq T\}.$$

其抛物边界 $\partial_p \Omega_T$ 由底面 $\bar{\omega} \times \{0\}$ 和侧面 $\partial\omega \times [0, T]$ 组成 (不含顶面 $\omega \times \{T\}$)。

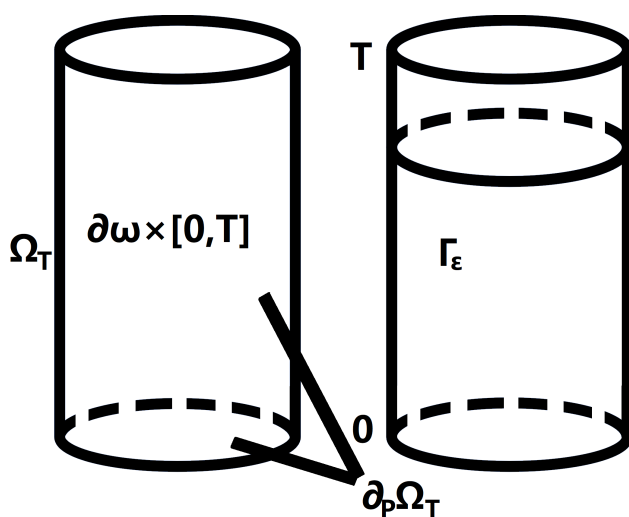


Figure 5.1: 最大值引理作用的柱体

Theorem 5.3.1 ▶ 有界区域热方程的最大值原理

设 $u \in C(\bar{\Omega}_T)$, 且 $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$ 在 Ω_T 内存在且连续。若在 Ω_T 内满足

$$u_t - \Delta u \leq 0,$$

则 u 在 $\bar{\Omega}_T$ 上的最大值必在抛物边界 $\partial_p \Omega_T$ 上达到, 即

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u.$$

Proof. 情形 1: 严格不等号 $u_t - \Delta u < 0$ 。假设在 Ω_T 上处处成立 $u_t - \Delta u < 0$ 。对任意

$\varepsilon \in (0, T]$, 考虑更小的柱体

$$\Gamma_\varepsilon = \{(x, t) : x \in \bar{\omega}, 0 < t \leq T - \varepsilon\}.$$

由于 u 在紧集 $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ 上连续, 它在其上某点 $P_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ 处达到最大值。下面讨论 P_ε 的位置。

1. 若 $P_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$ (即 $x_\varepsilon \in \omega, 0 < t_\varepsilon < T - \varepsilon$), 则因 u 在 P_ε 处取到局部最大值, 由极值必要条件知 $u_t(P_\varepsilon) = 0$, 且 Hesse 矩阵半负定, 从而 $\Delta u(P_\varepsilon) \leq 0$ 。于是

$$u_t(P_\varepsilon) - \Delta u(P_\varepsilon) \geq 0,$$

与严格不等式 $u_t - \Delta u < 0$ 矛盾。

2. 若 P_ε 位于上底 $\omega \times \{T - \varepsilon\}$ (即 $t_\varepsilon = T - \varepsilon$), 由于在这一点达到了整个 $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ 的最大值, 特别地沿 t 方向来看, 在 $t = T - \varepsilon$ 处取值最大, 故应有 $u_t(P_\varepsilon) \geq 0$ (若 $t_\varepsilon = T - \varepsilon < T$, 单侧导数非负); 同时仍有 $\Delta u(P_\varepsilon) \leq 0$ 。从而

$$u_t(P_\varepsilon) - \Delta u(P_\varepsilon) \geq 0,$$

同样与严格不等式矛盾。

3. 若 P_ε 在侧面或底面 (即抛物边界 $\partial_p \Gamma_\varepsilon$ 上), 则自然成立。

综上, P_ε 只能落在 $\partial_p \Gamma_\varepsilon$ 上。注意到 $\partial_p \Gamma_\varepsilon \subset \partial_p \Omega_T$, 因此

$$\max_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} u = \max_{\partial_p \Gamma_\varepsilon} u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u.$$

现在令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 。由 u 在 $\bar{\Omega}_T$ 上的连续性知 $\max_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} u \rightarrow \max_{\bar{\Omega}_T} u$, 故得

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u.$$

反向不等式显然成立, 等号得证。

情形 2: 一般情形 $u_t - \Delta u \leq 0$ 。对任意 $k > 0$, 作辅助函数 $v(x, t) = u(x, t) - kt$ 。则在 Ω_T 内,

$$v_t - \Delta v = (u_t - \Delta u) - k \leq -k < 0.$$

对 v 应用情形 1 的结论, 得

$$\max_{\bar{\Omega}_T} v = \max_{\partial_p \Omega_T} v.$$

于是

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\overline{\Omega}_T} (v + kt) \leq \max_{\overline{\Omega}_T} v + kT = \max_{\partial_p \Omega_T} v + kT \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u + kT.$$

令 $k \rightarrow 0^+$ 即得 $\max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u$, 从而等号成立。 $\square$

Corollary 5.3.2 ▶ 有界区域初边值问题解的唯一性

设 u 满足上述定理条件, 且 $u_t - \Delta u = \varphi$ 在 Ω_T 内成立, 则 u 在 $\overline{\Omega}_T$ 上的值由 φ 及 u 在抛物边界 $\partial_p \Omega_T$ 上的值唯一确定。换言之, 初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \varphi, & (x, t) \in \Omega_T, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \omega, \\ u(x, t) = h(x, t), & x \in \partial\omega, t \in [0, T] \end{cases}$$

的解在 $\overline{\Omega}_T$ 上是唯一的。

Proof. 若 u_1, u_2 为两解, 令 $v = u_1 - u_2$, 则 v 满足

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & (x, t) \in \Omega_T, \\ v(x, 0) = 0, & x \in \omega, \\ v(x, t) = 0, & x \in \partial\omega, t \in [0, T]. \end{cases}$$

因此 $v_t - \Delta v \leq 0$, 由最大值原理得 $\max_{\overline{\Omega}_T} v = \max_{\partial_p \Omega_T} v = 0$, 故 $v \leq 0$ 。同理, 考虑 $-v$ 满足 $(-v)_t - \Delta(-v) \leq 0$, 得 $\max_{\overline{\Omega}_T} (-v) = 0$, 即 $v \geq 0$ 。因此 $v \equiv 0$, $u_1 \equiv u_2$ 。 $\square$

Theorem 5.3.3 ▶ 全空间热方程的最大值原理

设 $u(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ 上连续, $u_t, u_{x_i x_j}$ 存在且连续, 且满足:

1. $u_t - \Delta u \leq 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$;
2. 存在常数 $M > 0, a > 0$ 使得 $u(x, t) \leq Me^{a|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T$;
3. 初值 $u(x, 0) = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续。

则对一切 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, 有

$$u(x, t) \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} f(z).$$

Proof. 第一步：附加条件 $4aT < 1$ 时的证明。

由 $4aT < 1$ 知存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $4a(T + \varepsilon) < 1$ 。固定任意 $y \in \mathbb{R}^n$ 及 $0 < t < T$ 。对参数 $\mu > 0$ ，构造辅助函数

$$v_\mu(x, s) = u(x, s) - \mu K(x, y, T + \varepsilon - s), \quad 0 < s < T,$$

其中 $K(x, y, \tau) = (4\pi\tau)^{-n/2} \exp(-\frac{|x-y|^2}{4\tau})$ 为热核。由热核满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial s} K(x, y, T + \varepsilon - s) + \Delta_x K(x, y, T + \varepsilon - s) = 0,$$

可得

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial s} - \Delta v_\mu = (u_s - \Delta u) - \mu(\partial_s K + \Delta K) = u_s - \Delta u \leq 0.$$

取半径 $\rho > 0$ ，考虑球柱区域

$$\Gamma_\rho = \{(x, s) : |x - y| < \rho, 0 < s \leq T\}.$$

对 v_μ 在 $\bar{\Gamma}_\rho$ 上应用有界区域最大值原理，得

$$\max_{\bar{\Gamma}_\rho} v_\mu = \max_{\partial_p \Gamma_\rho} v_\mu.$$

现在估计 v_μ 在抛物边界 $\partial_p \Gamma_\rho$ 上的值。

- 在底面 $s = 0$ 上：

$$v_\mu(x, 0) = u(x, 0) - \mu K(x, y, T + \varepsilon) = f(x) - \mu K(x, y, T + \varepsilon) \leq f(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} f.$$

- 在侧面 $|x - y| = \rho, 0 \leq s \leq T$ 上：由增长条件 $u(x, s) \leq Me^{a|x|^2} \leq Me^{a(|y|+\rho)^2}$ ，并且

$$K(x, y, T + \varepsilon - s) = (4\pi(T + \varepsilon - s))^{-n/2} e^{-\rho^2/(4(T + \varepsilon - s))} \geq (4\pi(T + \varepsilon))^{-n/2} e^{-\rho^2/(4(T + \varepsilon))},$$

因此

$$v_\mu(x, s) \leq Me^{a(|y|+\rho)^2} - \mu(4\pi(T + \varepsilon))^{-n/2} e^{-\rho^2/(4(T + \varepsilon))}.$$

由条件 $4a(T + \varepsilon) < 1$ 可得 $a < \frac{1}{4(T + \varepsilon)}$ 。观察上式：指数项 $e^{a(|y|+\rho)^2}$ 与 $e^{-\rho^2/(4(T + \varepsilon))}$ 之

比为

$$\exp\left(a(|y| + \rho)^2 - \frac{\rho^2}{4(T + \varepsilon)}\right) = \exp\left(\rho^2\left(a - \frac{1}{4(T + \varepsilon)}\right) + 2a|y|\rho + a|y|^2\right).$$

由于 $a - \frac{1}{4(T + \varepsilon)} < 0$, 当 $\rho \rightarrow \infty$ 时指数函数趋于 0. 因此对给定的 $\mu > 0$, 可取 ρ 充分大, 使得

$$Me^{a(|y| + \rho)^2} - \mu(4\pi(T + \varepsilon))^{-n/2}e^{-\rho^2/(4(T + \varepsilon))} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} f.$$

此时在侧面和底面上均有 $v_\mu \leq \sup f$, 因而在 Γ_ρ 内处处有 $v_\mu \leq \sup f$. 特别地在 (y, t) 点 (只要 $\rho > 0$ 且 $t < T$, 必有 $(y, t) \in \Gamma_\rho$), 得

$$u(y, t) = v_\mu(y, t) + \mu K(y, y, T + \varepsilon - t) \leq \sup f + \mu(4\pi(T + \varepsilon - t))^{-n/2}.$$

令 $\mu \rightarrow 0^+$, 即得 $u(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} f$. 由 y, t 的任意性, 当 $4aT < 1$ 时命题成立。

第二步: 一般 T 的情形。

若 $4aT \geq 1$, 取 T_0 充分小使 $4aT_0 < 1$, 将区间 $[0, T]$ 等分为 m 段:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T,$$

使得 $t_k - t_{k-1} \leq T_0$. 在每一时间段 $[t_{k-1}, t_k]$ 上, 以 $u(\cdot, t_{k-1})$ 为初值, 应用第一步的结论 (增长条件仍然保持), 依次得到

$$u(x, t_k) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t_{k-1}) \leq \cdots \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

由 t 的任意性, 整个区间上 $u(x, t) \leq \sup f$ 成立。 □

Corollary 5.3.4 ▶ 全空间初值问题解的唯一性

设 u 满足定理中的增长条件 $|u(x, t)| \leq Me^{a|x|^2}$. 若 u 是齐次热方程 $u_t - \Delta u = 0$ 的解且 $u(x, 0) = 0$, 则 $u \equiv 0$. 因此, 满足该增长条件的初值问题解是唯一的。特别地, 当 f 有界时, 由热核卷积给出的解就是唯一解。

Proof. 由定理, $u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, 0) = 0$; 对 $-u$ 应用定理得 $-u \leq 0$, 故 $u \equiv 0$. 唯一性得证。 □

Tychonoff 例子正是因为不满足上述增长条件才导致解不唯一。

5.3.2 有界区域中热方程解的正则性

Theorem 5.3.5 ▶ 有界区域中热方程的解的正则性

设 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有 C^1 边界的有界开区域, $T > 0$, 记柱体 $\Omega = \omega \times (0, T]$. 若函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 满足在 Ω 内恒有 $u_t - \Delta u = 0$, 则 u 在 Ω 内光滑, 即 $u \in C^\infty(\omega \times (0, T])$; 进一步的, 对任意给定的 $t \in (0, T]$, 关于 x 的函数 $x \mapsto u(x, t)$ 在 ω 上是实解析的.

Proof. 1. 对任意试验函数 $v(x, t) \in C^2(\Omega)$, 计算积分 $I = \int_{\Omega} v(u_t - \Delta u) dx dt$:

由于 u 在 Ω 上满足热方程, 则 $u_t - \Delta u = 0$, 从而 $I = 0$, 即

$$\int_{\Omega} v u_t dx dt - \int_{\Omega} v \Delta u dx dt = 0.$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v u_t dx dt &= \int_0^T \left(\int_{\omega} v u_t dx \right) dt \\ &= \int_{\omega} \left(\int_0^T v u_t dt \right) dx = \int_{\omega} \left(v u \Big|_0^T - \int_0^T v_t u dt \right) dx \\ &= \int_{\omega} (v(x, T)u(x, T) - v(x, 0)u(x, 0)) dx - \int_{\Omega} v_t u dx dt. \end{aligned}$$

且

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx dt = \int_0^T \left(\int_{\omega} v \Delta u dx \right) dt = \int_0^T \left(\int_{\omega} u \Delta v dx + \int_{\partial \omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS_x \right) dt,$$

从而带入即

$$\begin{aligned} 0 = I &= \int_{\omega} (v(x, T)u(x, T) - v(x, 0)u(x, 0)) dx - \int_{\Omega} u(v_t + \Delta v) dx dt \\ &\quad - \int_0^T \left(\int_{\partial \omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS_x \right) dt. \end{aligned}$$

2. 选取试验函数 $v = K(x, y, T + \varepsilon - t), t \in [0, T]$, 代入计算:

对 $\varepsilon > 0, y \in \omega$, 有

$$v(x, t) = K(x, y, T + \varepsilon - t) = (4\pi(T + \varepsilon - t))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right),$$

由于 v 光滑, 则取定 ε 时

$$\int_0^T \left(\int_{\omega} (v_t + \Delta v) dx \right) dt = 0,$$

进而有

$$v_t + \Delta v = -K_t(x, y, T + \varepsilon - t) + \Delta K(x, y, T + \varepsilon - t) = 0.$$

又

$$\int_{\omega} v(x, T) u(x, T) dx = \int_{\omega} K(x, y, \varepsilon) u(x, T) dx,$$

从而代入第一部分的结果式并移项有

$$\begin{aligned} \int_{\omega} K(x, y, \varepsilon) u(x, T) dx &= \int_{\omega} K(x, y, T + \varepsilon) u(x, 0) dx \\ &+ \int_0^T \left(\int_{\partial\omega} \left(K(x, y, T + \varepsilon - t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T + \varepsilon - t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt. \end{aligned}$$

3. 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 进一步求极限:

$$K(x, y, T + \varepsilon - t) = (4\pi(T + \varepsilon - t))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right),$$

(a) 若 $T \neq t$, 则 $T + \varepsilon - t > T - t > 0$, 则不存在奇点。由于 $K(x, y, T + \varepsilon - t)$ 随 ε 减小而减小, 则 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时有界, 从而由控制收敛定理和 $K(x, y, T + \varepsilon - t) \rightarrow K(x, y, T - t)$ 知 $t \neq T$ 时,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\omega} K(x, y, T + \varepsilon - t) u(x, t) dx = \int_{\omega} K(x, y, T - t) u(x, t) dx.$$

(b) 若 $T = t$, 则 $K(x, y, T + \varepsilon - t) = K(x, y, \varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4\varepsilon}\right)$, 由于 $u(x, T) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 且在 Ω 中有界且连续, 则可在 $\mathbb{R}^n$ 上延拓为紧支撑的连续函数, 则根据热核的筛选性质可知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\omega} K(x, y, \varepsilon) u(x, T) dx = u(y, T).$$

根据 $K(x, y, \varepsilon)$ 的定义式知 $y \in \omega$ 时在 $\mathbb{R}^n \setminus \omega$ 上 $K(x, y, \varepsilon)$ 关于 x 光滑, 且由 $x \neq y$ 知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K(x, y, \varepsilon) = 0^+.$$

从而由 u 的有界性知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \omega} u(x, T) K(x, y, \varepsilon) dx = 0^+.$$

进而

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\omega} u(x, T) K(x, y, \varepsilon) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, T) K(x, y, \varepsilon) dx = u(y, T).$$

对于边界积分项：由于 $y \in \omega$, 则 $x \in \partial\omega$ 时 $x \neq y$, 则

$$\exists d = \inf_{x \in \partial\omega} |x - y|, \quad \text{s.t. } |x - y| \geq d > 0.$$

从而

$$|K(x, y, s)| \leq (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{d^2}{4s}), \quad \left| \frac{\partial K(x, y, s)}{\partial n_x} \right| \leq C s^{-\frac{n+1}{2}} \exp(-\frac{d^2}{4s}),$$

从而 s 减小时 $K, \frac{\partial K(x, y, s)}{\partial n_x}$ 有界。则由控制收敛定理,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^T \left(\int_{\partial\omega} \left(K(x, y, T + \varepsilon - t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T + \varepsilon - t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{\partial\omega} \left(K(x, y, T - t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T - t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt, \end{aligned}$$

代入第二部分的结果式即得表示公式:

$$\begin{aligned} u(y, T) &= \int_{\omega} K(x, y, T) u(x, 0) dx \\ &+ \int_0^T \left(\int_{\partial\omega} \left(K(x, y, T - t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T - t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt. \end{aligned}$$

4. 下面对于 $y \in \omega, T > 0, \Omega = \omega \times (0, T]$ 讨论光滑性:

- (a) 由于 $K(x, y, T)u(x, 0)$ 在 $T > 0$ 时是 x, y, T 的联合光滑函数, 且 ω 有界, 则 $\int_{\omega} K(x, y, T)u(x, 0)dx$ 是 C^∞ 的;
- (b) 边界积分: 对于 $x \in \partial\omega$, 由于 $y \in \omega$, 则 $K(x, y, T - t)$ 及其法向导数关于 $(y, T - t)$ 在区域 $[0, T)$ 上光滑, 且在 $t \rightarrow T^-$ 时被积函数迅速衰减至 0, 则积分无奇性, 则在积分号内任意阶可导, 从而得到边界积分项光滑。

综上: $u(y, T)$ 是 y, T 的光滑函数, 即 $u \in C^\infty(\omega \times (0, T])$.

5. 下面证明有界开区域中热方程关于 x 的实解析性, 即对固定的 $T > 0$ 证明 $u(y, T)$ 关于 y 实解析:

将 y 延拓为复向量, 记 $y = \eta + i\xi, \eta, \xi \in \mathbb{R}^n$. 对第三部分的表示公式逐项讨论:

$$u(y, T) = \int_{\omega} K(x, y, T) u(x, 0) dx + \int_0^T \left(\int_{\partial\omega} \left(K(x, y, T-t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T-t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt.$$

- (a) $\int_{\omega} K(x, y, T) u(x, 0) dx$:

根据 K 的定义式知 K 是 y 的整解析函数, 从而对任意 $\mathbb{C}^n$ 中的紧集 $\bar{K}$, 当 $y \in \bar{K}$ 时 $\int_{\omega} K(x, y, T) u(x, 0) dx$ 一致收敛, 从而 $\int_{\omega} K(x, y, T) u(x, 0) dx$ 也是关于 y 的实解析函数。

- (b) $\int_0^T \left(\int_{\partial\omega} \left(K(x, y, T-t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T-t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt$:

对于 $x \in \partial\omega$, 令 $s = T - t > 0$, 考虑模

$$|K(x, y, s)| = (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\operatorname{Re}(x-y)^2}{4s}\right).$$

- i. 模的控制: 由于

$$\operatorname{Re}((x-y)^2) = \operatorname{Re}((x-\eta)^2 - \xi^2 - 2\xi(x-\eta)i) = |x-\eta|^2 - |\xi|^2,$$

为保证积分收敛, 对任意的 $x \in \partial\omega$ 应有 $|x-\eta|^2 - |\xi|^2 > 0$ 恒成立, 即

$$|\xi| < \inf_{x \in \partial\omega} |x-\eta|.$$

此时被积函数关于 ξ 解析, 且积分在紧集上一致收敛, 从而复解析. 从而考虑

$$d = \frac{1}{2} \inf_{x \in \partial\omega} |x-\eta|^2, \quad D = \{\eta + i\xi : \eta \in \omega, |\xi| < d\}.$$

- ii. 积分逼近: 对于 $\delta > 0$, 令

$$I_{\delta} = \int_0^{F\delta} \left(\int_{\partial D} \left(K(x, y, T-t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T-t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt.$$

iii. 上界控制：由于

$$|K(x, y, s)| = (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{Re((x-y)^2)}{4s}} = (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x-\eta|^2 - |\xi|^2}{4s}\right)$$

且

$$|x-\eta|^2 - |\xi|^2 \geq |x-\eta|^2 - \frac{1}{2} \inf_{t \in \partial\omega} |\eta-t|^2 \geq \frac{1}{2} \inf_{x \in \partial\omega} |x-\eta|^2 = d.$$

从而有控制

$$|K(x, y, s)| \leq C_1 s^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{d}{4s}\right), \quad \left| \frac{\partial K(x, y, s)}{\partial n_x} \right| \leq C_2 s^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\frac{d}{4s}\right).$$

iv. 应用控制收敛定理：结合 $u(x, t)$ 连续有界知被积函数可被

$$s^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-\frac{d}{4s}\right)$$

控制，而 $s \rightarrow 0^+$ 时它收敛，从而有界，从而由控制收敛定理知 $\delta \rightarrow 0^+$ 时 I_δ 一致收敛。

v. 应用复解析的性质：根据复解析的性质“复解析且一致收敛的函数列收敛极限是复解析的”，从而第二部分也复解析，再由

$$\{\eta + i\xi : \eta \in \omega, |\xi| = 0\} \subset D$$

知 $\int_0^T \left(\int_{\partial\omega} \left(K(x, y, T-t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} - u(x, t) \frac{\partial K(x, y, T-t)}{\partial n_x} \right) dS_x \right) dt$ 实解析。

综上：根据表示公式知 $u(y, T)$ 关于 y 实解析。

□

这个定理的物理意义是，在忽略相对论效应的前提下，激发热可瞬间平滑的对全空间造成影响，因此忽略相对论效应时热量的传播速度是无穷大的。

5.4 一维热方程的混合问题

注：这里是按授课顺序整理的笔记，但个人更推荐先学第五节再学第四节。

Definition 5.4.1 ▶ 一维热方程的混合问题

一维热方程的混合问题是指求函数 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \varphi(x, t), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5.3)$$

由上一节最大值原理的推论，该问题在 $C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ 中的解如果存在则必唯一。

本节给出两种求解方法：分离变量法与解析延拓法。

5.4.1 分离变量法

Definition 5.4.2 ▶ 特征值问题

设 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 并代入齐次方程 $u_t - u_{xx} = 0$ 和齐次边界条件，分离变量得

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

结合边界条件 $X(0) = X(L) = 0$ ，得到特征值问题

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

其特征值和特征函数为

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{L}x, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

特征函数系 $\{X_k\}$ 满足正交关系

$$\int_0^L X_k(x)X_j(x) dx = \frac{L}{2}\delta_{kj}.$$

Proposition 5.4.3 ▶ 解的级数展开

当 $\varphi \equiv 0$ 时, 混合问题的形式解为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin \frac{k\pi}{L} x.$$

Proof. 将解 $u(x, t)$ 和非齐次项 $\varphi(x, t)$ 、初值 $f(x)$ 按特征函数展开:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \quad \varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) X_k(x), \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x),$$

其中

$$\varphi_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x, t) X_k(x) dx, \quad f_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) X_k(x) dx.$$

代入方程 $u_t - u_{xx} = \varphi$, 利用 $X_k'' = -\lambda_k X_k$, 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k'(t) + \lambda_k T_k(t)) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) X_k(x).$$

由特征函数的线性无关性, 对每个 k 有常微分方程

$$T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = \varphi_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

初始条件由 $u(x, 0) = f(x)$ 给出: $T_k(0) = f_k$ 。

解此一阶线性常微分方程 (积分因子法), 得

$$T_k(t) = f_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \varphi_k(s) ds.$$

代回 $u(x, t)$ 的展开式, 即得混合问题的形式解。

当 $\varphi \equiv 0$ 时,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin \frac{k\pi}{L} x.$$

□

分离变量法的求解过程总结：

1. (边界非零时) 添加辅助函数将边界化为零;
2. 求解特征值问题

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), & 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0; \end{cases}$$

3. 将函数项级数的所有项函数按特征函数展开;
4. 将所有展开式带入级数, 根据特征函数线性无关得到常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = \varphi_k(t), \\ T_k(0) = f_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \end{cases}$$

5. 求解上述初值问题, 并将结果带回级数得到形式解.

5.4.2 解析延拓法 (齐次方程)

当非齐次项 $\varphi \equiv 0$ 时, 混合问题的解可通过将初值延拓到全空间, 再利用全空间的 Poisson 核公式求得。为了使全空间解在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处自动满足齐次边界条件, 需要将初值 $f(x)$ 关于这两点作奇延拓。

Definition 5.4.4 ▶ 初值的奇延拓

设 $f(x)$ 定义在 $[0, L]$ 上。先将其零延拓至全实数轴:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > L. \end{cases}$$

再将 φ 关于 $x = 0$ 和 $x = L$ 反复作奇反射并以 $2L$ 为周期叠加, 得到全实数轴上如下所示的延拓函数, 称奇延拓:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi(2nL + x) - \varphi(2nL - x)).$$

由于 φ 仅在 $[0, L]$ 上非零, 对每个固定的 x , 上述级数中至多有两项非零, 故该定义是合理的。

Proposition 5.4.5 ▶ 奇延拓的性质

函数 $\bar{f}$ 具有以下性质:

1. $\bar{f}$ 是 f 的延拓, 即 $\bar{f}(x) = f(x)$ 对 $x \in [0, L]$ 成立;
2. $\bar{f}$ 关于点 $x = nL$ 反对称:

$$\bar{f}(-x) = -\bar{f}(x), \bar{f}(2L - x) = -\bar{f}(x);$$

3. 若 $f \in C^2[0, L]$ 且满足相容性条件 $f(0) = f(L) = 0$, 则 $\bar{f} \in C^2(\mathbb{R})$ 。

Proof. (1) 对任意 $x \in [0, L]$, 和式中只有 $n = 0$ 时

$$\varphi(2nL + x) = \varphi(x) = f(x),$$

而其余项 $\varphi(2nL \pm x)$ 当 $n \neq 0$ 时由于 $2nL \pm x$ 落在 $[0, L]$ 之外而全部为零, 故 $\bar{f}(x) = f(x)$ 。

(2) 直接计算:

$$\begin{aligned} \bar{f}(-x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi(2nL - x) - \varphi(2nL + x)) = -\bar{f}(x), \\ \bar{f}(2L - x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi(2nL + 2L - x) - \varphi(2nL - 2L + x)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi(2(n+1)L - x) - \varphi(2(n-1)L + x)) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\varphi(2mL - x) - \varphi(2mL + x)) = -\bar{f}(x). \end{aligned}$$

故反对称性成立。

(3) 由反对称性知 $\bar{f}(0) = -\bar{f}(0) = 0$ 。由于 $f(0) = 0, f(L) = 0$, φ 在 $x = 0, L$ 处连续, 且 $\bar{f}$ 为平移后奇延拓的迭加, 各阶导数也逐项匹配 (因 f 在端点为零), 故 $\bar{f} \in C^2(\mathbb{R})$ 。□

Corollary 5.4.6 ▶ 全空间初值问题的解

考虑全空间初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \bar{f}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

由 Poisson 核公式, 其解为

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \bar{f}(y) dy.$$

Proposition 5.4.7 ▶ 边界条件的满足

上述全空间解 $\tilde{u}(x, t)$ 满足 $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(L, t) = 0$ 对一切 $t > 0$ 成立。

Proof. 利用 $\bar{f}$ 的反对称性。计算

$$\begin{aligned} \tilde{u}(-x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \bar{f}(y) dy \stackrel{z=-y}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} \bar{f}(-z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} (-\bar{f}(z)) dz = -\tilde{u}(x, t). \end{aligned}$$

取 $x = 0$ 即得 $\tilde{u}(0, t) = -\tilde{u}(0, t)$, 故 $\tilde{u}(0, t) = 0$ 。

再证关于 $x = L$ 的反对称性:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(2L - x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(2L-x-y)^2}{4t}} \bar{f}(y) dy \\ &\stackrel{z=2L-y}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} \bar{f}(2L - z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}} (-\bar{f}(z)) dz = -\tilde{u}(x, t). \end{aligned}$$

取 $x = L$ 得 $\tilde{u}(L, t) = -\tilde{u}(L, t)$, 故 $\tilde{u}(L, t) = 0$ 。 □

$\tilde{u}(x, t)$ 在 $[0, L]$ 上的限制 $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)|_{x \in [0, L]}$ 满足

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

从而给出了混合问题的解。

Proposition 5.4.8 ▶ 解的积分表示

记热核 $K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$, 并定义格林函数

$$G(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [K(x + 2nL - z, t) - K(x - 2nL + z, t)],$$

则有等价形式

$$G(x, z, t) = \frac{1}{2L} \left[\Theta_3\left(\frac{x-z}{2L}, \frac{\pi^2 t}{L^2}\right) - \Theta_3\left(\frac{x+z}{2L}, \frac{\pi^2 t}{L^2}\right) \right], \quad \Theta_3(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t + 2inx}.$$

且混合问题的解表示为

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, z, t) f(z) dz.$$

Proof. 将 $\bar{f}$ 的表达式代入 Poisson 公式, 化简积分。

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (\varphi(2nL + y) - \varphi(2nL - y)) dy.$$

对第一项令 $z = 2nL + y$, 对第二项令 $z = 2nL - y$, 注意到 φ 仅当 $z \in [0, L]$ 时非零, 可得

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[e^{-\frac{(x+2nL-z)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x-2nL+z)^2}{4t}} \right] f(z) dz.$$

记热核 $K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$, 并定义格林函数

$$G(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [K(x + 2nL - z, t) - K(x - 2nL + z, t)],$$

则混合问题的解表示为

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, z, t) f(z) dz.$$

引入 Jacobi theta 函数

$$\Theta_3(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t + 2inx},$$

上述格林函数可以用它简洁表示。直接计算可得

$$G(x, z, t) = \frac{1}{2L} \left[\Theta_3\left(\frac{x-z}{2L}, \frac{\pi^2 t}{L^2}\right) - \Theta_3\left(\frac{x+z}{2L}, \frac{\pi^2 t}{L^2}\right) \right].$$

□

解析延拓法的求解过程总结:

1. 构造解析延拓:

对于初值条件 $u(x, 0) = f(x), x \in [0, L]$, 记

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > L. \end{cases}$$

若混合问题满足齐次边界条件 (边值恒为零) 和相容性条件, 则

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi(2nL + x) - \varphi(2nL - x)).$$

是 f 关于 $x=nL$ 的反对称 C^2 延拓.

2. 将混合问题化为边值问题:

全空间初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \bar{f}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

由 Poisson 积分公式给出的解是

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

的解的全局延拓, 从而 $\bar{u}$ 限制在 $[0, L]$ 上的解即为原初边值问题的解.

3. 计算 $\bar{u}(x, t)$, 得到表达式:

设 G 为格林函数, 则混合问题的解表示为

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, z, t) f(z) dz.$$

5.4.3 两种方法的等价性

Theorem 5.4.9 ▶ Fourier 方法与解析延拓法的等价性

当 $\varphi \equiv 0$ 时, 由分离变量法得到的级数解与由解析延拓法得到的积分表示完全一致。

Proof. 分离变量法给出的解为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin \frac{k\pi}{L} x,$$

其中

$$f_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin \frac{k\pi}{L} y \, dy.$$

交换求和与积分次序, 得

$$u(x, t) = \int_0^L \left(\frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin \frac{k\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} y \right) f(y) \, dy.$$

下面证明解析延拓法中的核也等于同一级数。首先需用 Poisson 求和公式: 设

$$f(x) = e^{-x^2/(4t)},$$

其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{4\pi t} e^{-t\xi^2}.$$

由 Poisson 求和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z + 2nL) = \frac{\sqrt{\pi t}}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} e^{i\frac{n\pi}{L} z}.$$

取实部, 并利用余弦的对称性可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z + 2nL)^2}{4t}\right) = \frac{\sqrt{\pi t}}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cos \frac{n\pi z}{L}.$$

因此, 对格林函数 G 中的正负项分别应用此公式:

$$\begin{aligned} G(x, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x+2nL-z)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x-2nL+z)^2}{4t}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi t}}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \left[\cos \frac{n\pi(x-z)}{L} - \cos \frac{n\pi(x+z)}{L} \right]. \end{aligned}$$

利用三角恒等式

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

得

$$\cos \frac{n\pi(x-z)}{L} - \cos \frac{n\pi(x+z)}{L} = 2 \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi z}{L}.$$

由于 $n=0$ 项为零 (两个余弦相等), 和式从 $n=1$ 开始, 且系数中有

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \sqrt{\pi t} = \frac{1}{2},$$

故

$$G(x, z, t) = \frac{1}{2L} \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi z}{L}.$$

这正是分离变量法得到的核函数。因此两种方法构造的解完全一致。

□

5.5 热方程初值问题非负解及初边值问题解的唯一性

5.5.1 热方程初值问题非负解的唯一性

在 5.2 节中我们指出, 若不附加增长条件, 热方程初值问题的解不唯一。在 5.3 节中, 我们证明了满足指数增长条件的解是唯一的。本节从另一角度出发, 证明非负解一定是唯一的。

Theorem 5.5.1 ▶ 非负解的唯一性

设 $u(x, t)$ 在 $\mathbb{R} \times [0, T]$ 上连续, u_t, u_x, u_{xx} 在 $\mathbb{R} \times (0, T)$ 上存在且连续, 且满足

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立。若 $u(x, t) \geq 0$ 对一切 $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$ 成立, 则解是唯一的, 且由 Poisson 公式

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) f(y) dy$$

给出, 其中

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$$

为热核。

Proof. 记 $v(x, t) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) f(y) dy$ 。由 Poisson 公式的一般理论, v 是初值问题的一个解, 且 $v(x, t) \geq 0$ (因 $f \geq 0$ 且 $K > 0$)。下面证明 $u = v$ 。

1. 构造截断解并证明 $v \leq u$ 。

引入截断函数

$$\zeta^a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a - 1, \\ a - |x|, & a - 1 < |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

定义截断初值的解

$$v^a(x, t) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) \zeta^a(y) f(y) dy.$$

则 v^a 满足

$$\begin{cases} v_t^a - v_{xx}^a = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ v^a(x, 0) = \zeta^a(x)f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

引理 1 $\lim_{a \rightarrow \infty} v^a(x, t) = v(x, t)$ 。

由定义,

$$v^a(x, t) = \int_{-a}^a K(x - y, t) \zeta^a(y) f(y) dy.$$

设 $\|f\|_{L^\infty} \leq M$ 。当 $a \rightarrow \infty$ 时, $\zeta^a(y)f(y) \rightarrow f(y)$ 逐点成立, 且

$$|\zeta^a(y)f(y)| \leq M.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理, 对每个 (x, t) 有 $v^a(x, t) \rightarrow v(x, t)$ 。

引理 2 对一切 $a > 0$, 在 $\mathbb{R} \times [0, T]$ 上有 $v^a \leq u$ 。

对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $P > 0$, 考虑区域 $[-P, P] \times [0, T]$ 。在抛物边界上:

- 在底面 $t = 0$ 上:

$$v^a(x, 0) = \zeta^a(x)f(x) \leq f(x) = u(x, 0) \leq u(x, 0) + \varepsilon;$$

- 在侧面 $x = \pm P$ 上:

$$|v^a(\pm P, t)| \leq M \int_{-a}^a K(\pm P - y, t) dy.$$

当 $P \rightarrow \infty$ 时, $K(\pm P - y, t) \rightarrow 0$, 结合 $u \geq 0$ 则可取 P 充分大使

$$|v^a(\pm P, t)| \leq \varepsilon \leq u(\pm P, t) + \varepsilon.$$

又 $v^a - u - \varepsilon$ 在区域内满足

$$(v^a - u - \varepsilon)_t - (v^a - u - \varepsilon)_{xx} = 0,$$

由最大值原理,

$$\max_{[-P,P] \times [0,T]} (v^a - u - \varepsilon) \leq \max_{\text{抛物边界}} (v^a - u - \varepsilon) \leq 0.$$

故 $v^a \leq u + \varepsilon$ 。令 $P \rightarrow \infty$ (取一系列 $P_n \rightarrow \infty$)，得该不等式在 $\mathbb{R} \times [0, T]$ 上成立。再令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ，即得 $v^a \leq u$ 。

结合引理 1 和引理 2，令 $a \rightarrow \infty$ 得 $v \leq u$ 。

2. 证明差函数 $w = u - v$ 恒为零。

令 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t) \geq 0$ ，则 w 满足

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ w(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

定义 $W(x, t) = \int_0^t w(x, s) ds \geq 0$ 。则 $W(x, 0) = 0$ ，且

$$W_t = w(x, t), W_{xx} = \int_0^t w_{xx}(x, s) ds = \int_0^t w_s(x, s) ds = w(x, t) - w(x, 0) = w(x, t).$$

因此 W 也满足热方程 $W_t - W_{xx} = 0$ 。

对固定的 $s \in (0, T)$ ，将 W 视为以 $W(\cdot, s)$ 为初值的解，由 Poisson 公式，

$$W(x, t + s) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) W(y, s) dy.$$

取 $x = 0$ ， $t = s$ ，得

$$W(0, 2s) = \int_{\mathbb{R}} K(-y, s) W(y, s) dy.$$

现证明 W 是 x 的凸函数。对任意凸函数 h ，有 $2h(x) \leq h(x + \tau) + h(x - \tau)$ ($\forall \tau > 0$)。由 $W_{xx} = w \geq 0$ 知 W 关于 x 是凸函数。取 τ 为积分变量：

$$2W(x, t) \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (W(x + s, t) + W(x - s, t)) ds.$$

利用这一凸性以及 W 满足的热方程，可以导出以下估计（详细推导从略）：存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $\varepsilon > 0$ ，有

$$W(x, s) \leq C e^{x^2/(4\varepsilon)} W(0, T), \quad 0 < s < T - 2\varepsilon.$$

因此 W 满足指数增长条件。由于 $W(x, 0) = 0$, 由 7.3 节全空间热方程的最大值原理 (或唯一性定理) 得 $W \equiv 0$ 。从而 $w = W_t \equiv 0$, 即 $u \equiv v$ 。

□

Corollary 5.5.2

若热方程初值问题的解非负, 则其必定由 Poisson 公式唯一给出。

5.5.2 使用能量方法证明热方程初边值问题解的唯一性

下面使用能量方法重新证明有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上热方程初边值问题解的唯一性。

Theorem 5.5.3 ▶ 热方程的能量不等式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $\partial\Omega$ 光滑, $u \in C^2(\Omega \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ 满足

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T], \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T], \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

则对任意 $t \in [0, T]$, 有能量不等式

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \leq e^t \left(\int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} g^2(x, s) dx ds \right).$$

Proof. 1. 用 u 乘方程并分部积分。

方程两端乘 u 并在 Ω 上积分:

$$\int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} u \Delta u dx = \int_{\Omega} g u dx.$$

左端第一项:

$$\int_{\Omega} u_t u dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx.$$

左端第二项由 Green 第一恒等式及边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 得

$$- \int_{\Omega} u \Delta u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

右端用 Cauchy 不等式 $gu \leq \frac{1}{2}(g^2 + u^2)$:

$$\int_{\Omega} gu \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} g^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \, dx.$$

综合得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} g^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \, dx. \quad (5.4)$$

2. 对时间积分。

将 (5.4) 两端对 t 从 0 到 t 积分, 并利用 $u(x, 0) = f(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 \, dx \, ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} g^2(x, s) \, dx \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} u^2(x, s) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

乘以 2 得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(x, t) \, dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 \, dx \, ds \\ \leq \int_{\Omega} f^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} g^2 \, dx \, ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^2 \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (5.5)$$

3. 应用 Gronwall 不等式。

对于 5.4, 舍去梯度项有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, dx \leq \int_{\Omega} g^2 \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx.$$

记

$$E(t) = \int_{\Omega} u^2 \, dx, \quad G(t) = \int_{\Omega} g^2 \, dx.$$

则式 5.4 化为

$$E_t(t) \leq G(t) + E(t).$$

同乘 e^{-t} 并积分有

$$e^{-t} E(t) - E(0) \leq \int_0^t e^{-s} G(s) \, ds.$$

移项并同乘 e^t , 将初值条件 $u(x, 0) = f(x)$ 代入有

$$E(t) \leq e^t E(0) + \int_0^t e^{t-s} G(s) ds = e^t \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t e^{t-s} G(s) ds.$$

左右同对时间进行积分有

$$\begin{aligned} \int_0^t E(s) ds &\leq \int_0^t \left(e^s \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^s e^{s-\tau} G(\tau) d\tau \right) ds \\ &= (e^t - 1) \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t \left(\int_0^s e^{s-\tau} G(\tau) d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

由于 $0 \leq \tau \leq s \leq t$, 则交换积分指标 s 与 τ 有:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^s e^{s-\tau} G(\tau) d\tau \right) ds &= \int_0^t \left(\int_{\tau}^t e^{s-\tau} G(\tau) ds \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(\int_{\tau}^t e^s ds \right) e^{-\tau} G(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (e^{t-\tau} - 1) G(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

从而回代有

$$\int_0^t E(s) ds \leq (e^t - 1) \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t (e^{t-\tau} - 1) G(\tau) d\tau. \quad (5.6)$$

4. 带入与放缩:

将5.6带入5.5:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u^2(x, t) dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ &\leq \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} g^2 dx ds + (e^t - 1) \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t (e^{t-\tau} - 1) G(\tau) d\tau \\ &= e^t \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t e^{t-s} \int_{\Omega} g^2 dx ds. \end{aligned}$$

又

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx ds \geq 0$$

且 e^{t-s} 在 $s \in [0, t]$ 时有 $e^{t-s} \leq e^t$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds &\leq \int_{\Omega} u^2(x, t) dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ &\leq e^t \int_{\Omega} f^2 dx + \int_0^t e^{t-s} \int_{\Omega} g^2 dx ds \\ &\leq e^t \int_{\Omega} f^2 dx + e^t \int_0^t \int_{\Omega} g^2 dx ds, \end{aligned}$$

此即要证的能量不等式, 于是得证. □

Corollary 5.5.4 ▶ 初边值问题解的唯一性

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $\partial\Omega$ 光滑, $u \in C^2(\Omega \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ 满足

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T], \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T], \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

则初边值问题解是唯一的。

Proof. 设 u_1, u_2 为两解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足齐次方程 $w_t - \Delta w = 0$ 、齐次边界 $w|_{\partial\Omega} = 0$ 、零初值 $w(x, 0) = 0$ 。即:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \\ w(x, 0) = 0. \end{cases}$$

由能量不等式 (取 $f = 0, g = 0$) 得

$$\int_{\Omega} w^2(x, t) dx = 0,$$

故 $w \equiv 0$, 即 $u_1 \equiv u_2$. □

5.6 一般二阶线性抛物型方程的初值问题 *

Definition 5.6.1 ▶ 二阶线性抛物型方程的初值问题

考虑一个空间变量 x 的情形, 研究如下形式的二阶线性抛物型方程

$$Lu \equiv u_t - a(x, t)u_{xx} - 2b(x, t)u_x - c(x, t)u = d(x, t), \quad (5.7)$$

其中 (x, t) 属于闭板层

$$\Omega = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}.$$

给定初始条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

为简化陈述, 假设系数 $a, b, c \in C^\infty(\Omega)$ 且它们自身及其各阶偏导数在 Ω 上一致有界。抛物性条件要求 $a(x, t)$ 在 Ω 上恒正且远离零。

5.6.1 有限差分格式

Proposition 5.6.2 ▶ 差分格式的最大值原理

设 $\lambda = k/h^2$ 满足稳定性条件

$$2\lambda \sup_{(x,t) \in \Sigma} a(x, t) < 1.$$

且 h 充分小, 则差分方程

$$\begin{cases} \Lambda v \equiv \frac{v(x, t+k) - v(x, t)}{k} - a(x, t) \frac{v(x+h, t) - 2v(x, t) + v(x-h, t)}{h^2} \\ \quad - 2b(x, t) \frac{v(x+h, t) - v(x-h, t)}{2h} - c(x, t)v(x, t) = d(x, t), \\ x = nh, v(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

的解 v 的迭代公式为

$$\begin{aligned} v(x, t+k) = & (\lambda a + h\lambda b)v(x+h, t) + (1 - 2\lambda a + h^2\lambda c)v(x, t) \\ & + (\lambda a - h\lambda b)v(x-h, t) + h^2\lambda d(x, t). \end{aligned}$$

且满足

$$\|v\| \leq e^{CT} \|f\| + Te^{CT} \|d\|.$$

特别地, 当 $d \equiv 0$ 且 $c \leq 0$ 时, 有 $|v(x, t)| \leq \sup_x |f(x)|$.

Proof. 引入空间步长 $h > 0$ 与时间步长 $k > 0$, 并考虑格点

$$\Sigma = \{(x, t) \mid x = nh, t = mk, n, m \in \mathbb{Z}, 0 < t < T\}.$$

在 Σ 上用差分方程逼近 (5.7):

$$\begin{aligned} \Delta v \equiv & \frac{v(x, t+k) - v(x, t)}{k} - a(x, t) \frac{v(x+h, t) - 2v(x, t) + v(x-h, t)}{h^2} \\ & - 2b(x, t) \frac{v(x+h, t) - v(x-h, t)}{2h} - c(x, t)v(x, t) = d(x, t), \end{aligned} \quad (5.9)$$

并配有初始条件

$$v(x, 0) = f(x), \quad x = nh. \quad (5.10)$$

记网格比

$$\lambda = \frac{k}{h^2}.$$

从 (5.9) 可解出 $v(x, t+k)$, 写成

$$\begin{aligned} v(x, t+k) = & (\lambda a + h\lambda b)v(x+h, t) + (1 - 2\lambda a + h^2\lambda c)v(x, t) \\ & + (\lambda a - h\lambda b)v(x-h, t) + h^2\lambda d(x, t). \end{aligned} \quad (5.11)$$

为保障格式稳定, 要求网格比 λ 足够小, 满足

$$2\lambda \sup_{(x,t) \in \Sigma} a(x, t) < 1. \quad (5.12)$$

在此条件下, 对充分小的 h , 利用 a 的正性和 b, c 的有界性, 有

$$|\lambda a + h\lambda b| + |1 - 2\lambda a + h^2\lambda c| + |\lambda a - h\lambda b| = 1 + h^2\lambda c = 1 + kc.$$

引入最大值范数 $\|g\| = \sup_x |g(x)|$ (对 $x = nh$ 定义), 并记

$$\|d\| = \sup_{(x,t) \in \Sigma} |d(x, t)|.$$

由 (5.11) 立即得到

$$|v(x, t+k)| \leq (|\lambda a + h\lambda b| + |1 - 2\lambda a + h^2\lambda c| + |\lambda a - h\lambda b|)\|v(\cdot, t)\| + k\|d(\cdot, t)\|.$$

取

$$C = \max\left(0, \sup_{\Omega} c(x, t)\right),$$

则对一切充分小的 h ,

$$\|v(\cdot, t+k)\| \leq (1+kC)\|v(\cdot, t)\| + k\|d\|.$$

迭代此不等式并利用初始条件 (5.10) 得: 对 $t = mk$,

$$\begin{aligned}\|v(\cdot, t)\| &\leq (1+kC)^m\|f\| + \frac{1}{C}((1+kC)^m - 1)\|d\| \\ &\leq e^{Ct}\|f\| + te^{Ct}\|d\|.\end{aligned}$$

由此得到差分格式的最大值原理。 □

Proposition 5.6.3 ▶ 差分格式解的收敛性

设 $u(x, t)$ 是 (5.7)、(5.8) 的一个解, 且 u, u_t, u_x, u_{xx} 在 Ω 上一致有界且一致连续. 固定满足 (5.12) 的 λ , 取一列加密的格点 Σ_ν , 对应于

$$h = 2^{-\nu}, \quad k = \lambda 2^{-2\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

记 v^ν 为在格点 Σ_ν 上差分方程 (5.9)、(5.10) 的解. 令 $U = \bigcup_\nu \Sigma_\nu$, 对任意 $(x, t) \in U$, 当 ν 充分大时 $v^\nu(x, t)$ 有定义. 此时对每个 $(x, t) \in U$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} v^\nu(x, t) = u(x, t).$$

Proof. 由 Taylor 定理及一致连续性, 差商

$$\frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k}, \quad \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h}, \quad \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}$$

分别一致收敛于 u_t, u_x, u_{xx} . 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 当 ν 充分大 (即 h, k 充分小) 时, 在 Σ_ν 上有

$$|\Lambda u - d| < \varepsilon.$$

由于 v^ν 满足 $\Lambda v^\nu = d$, 故

$$|\Lambda(u - v^\nu)| < \varepsilon.$$

对差函数 $u - v^\nu$ 应用最大值原理 (取右端项为 $\Lambda(u - v^\nu)$, 初值为零), 得

$$|u(x, t) - v^\nu(x, t)| \leq T e^{CT} \varepsilon, \quad (x, t) \in \Sigma_\nu.$$

由 ε 的任意性即得结论。 □

Corollary 5.6.4

对 v^ν 应用最大值原理, 令 $\nu \rightarrow \infty$ 并利用解的连续性, 立即得到 u 本身也满足相同的估计:

$$|u(x, t)| \leq e^{CT} \left(\sup_{\mathbb{R}} |f| + T \sup_{\Omega} |d| \right), \quad (x, t) \in \Omega. \quad (5.13)$$

此式在 u, u_t, u_x, u_{xx} 一致连续的假设下成立。

下面的定理将去掉一致连续性这一限制, 只须 u, u_x 一致有界。

Theorem 5.6.5 ▶ 最大模估计与唯一性

设 u 是 (5.7)、(5.8) 的一个解, 且 u, u_t, u_x, u_{xx} 连续, u, u_x 在 Ω 中一致有界。则不等式 (5.13) 成立。特别地, 若两个解 u_1, u_2 满足上述条件, 则其差 $u_1 - u_2$ 满足齐次方程零初值, 由 (5.13) 得 $u_1 \equiv u_2$, 解是唯一的。

Proof. 引入截断函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, 满足 $0 \leq \phi \leq 1$, 且 $\phi(x) = 1$ ($|x| < 1$), $\phi(x) = 0$ ($|x| > 2$)。对 $r > 0$, 令

$$u^r(x, t) = \phi\left(\frac{x}{r}\right) u(x, t).$$

则当 $|x| < r$ 时 $u^r = u$, 当 $|x| > 2r$ 时 $u^r = 0$ 。容易验证 $u^r, u_t^r, u_x^r, u_{xx}^r$ 在 Ω 上一致连续且一致有界。直接计算可得

$$Lu^r = \phi d - 2ar^{-1}\phi' u_x - (ar^{-2}\phi'' + 2br^{-1}\phi')u \equiv d^*.$$

同时 $|u^r(x, 0)| \leq |f(x)|$ 。对 u^r 应用已证的估计 (5.13) (因其导数一致连续, 该估计适用), 得

$$|u^r(x, t)| \leq e^{CT} \left(\sup_{\Omega} |f| + T \sup_{\Omega} |d^*| \right).$$

由于 u, u_x 一致有界, 当 $r \rightarrow \infty$ 时 $\sup_{\Omega} |d^*| \rightarrow \sup_{\Omega} |d|$ 。取 $r \rightarrow \infty$, 对固定的 (x, t) , 当 r

充分大时 $u^r(x, t) = u(x, t)$, 故上式左侧趋于 $|u(x, t)|$, 右侧趋于 $e^{CT}(\sup |f| + T \sup |d|)$ 。这就证明了 (5.13)。 $\square$

5.6.2 解的存在性

现在转向初值问题解的存在性。假设初始函数 $f(x)$ 和非齐次项 $d(x, t)$ 连同它们直至四阶的导数在 $\mathbb{R}$ (相应地 Ω) 上连续且一致有界。我们将通过有限差分逼近构造解。

Theorem 5.6.6 ▶ 初值问题解的存在性

记初始函数为 $f(x)$, 非齐次项为 $d(x, t)$, 设 f, d 及其直到四阶的导数在 $\mathbb{R}$ (相应地 Ω) 上连续且一致有界, 并设系数 $a, b, c \in C^\infty(\Omega)$ 有界且 $a \geq a_0 > 0$ 。则初值问题 (5.7)、(5.8) 存在一个解 u , 使得 u, u_t, u_x, u_{xx} 在 Ω 中一致有界且一致连续。

Proof. 仍取满足稳定性条件 (5.12) 的 λ 和充分小的 h , 令 v 为差分方程 (5.9)、(5.10) 的解。首先, 由最大值原理有

$$\|v\| \leq e^{CT}(\|f\| + T\|d\|).$$

接下来估计 v 的差商。定义

$$w(x, t) = \delta v(x, t) = \frac{v(x+h, t) - v(x, t)}{h}.$$

利用乘积法则 $\delta(ab) = (Ea)\delta b + (\delta a)b$, 其中 $Eg(x) = g(x+h)$, 对 (5.11) 两端作用 δ , 经过细致的整理可得 w 满足的方程:

$$\begin{aligned} w(x, t+k) &= E(\lambda a + h\lambda b) w(x+h, t) \\ &\quad + E(1 - 2\lambda a + h^2\lambda c + hE^{-1}\delta(\lambda a + h\lambda b)) w(x, t) \\ &\quad + E(\lambda a - h\lambda b - hE^{-1}\delta(\lambda a - h\lambda b)) w(x-h, t) \\ &\quad + k((\delta c)v + \delta d). \end{aligned}$$

因为 a, b, c 的各阶导数有界, 稳定性条件 (5.12) 保证了各项系数的绝对值之和可被控制。由此可得

$$\|w(\cdot, t+k)\| \leq (1 + kC_1)\|w(\cdot, t)\| + k(\|c_x\|_\infty\|v\| + \|d_x\|_\infty),$$

其中 C_1 依赖于 C 和 $\|b_x\|_\infty$ 。结合初始条件 $w(x, 0) = \delta f(x)$, 迭代得到

$$\|\delta v\| \leq e^{C_1 T} (\|f_x\|_\infty + T(\|c_x\|_\infty \|v\| + \|d_x\|_\infty)).$$

重复上述步骤, 可对更高阶差商 $\delta^2 v, \delta^3 v, \delta^4 v$, 以及时间方向差商

$$\tau v = \frac{v(x, t+k) - v(x, t)}{k},$$

和混合差商 $\delta \tau v, \delta^2 \tau v, \tau^2 v$ 获得一致有界估计。因此, 所有直到所需阶数的差商都在 Σ 上一致有界。

现在取加密的格点序列 Σ_ν ($h = 2^{-\nu}, k = \lambda 2^{-2\nu}$) 及相应的差分方程解 v^ν 。由上述一致有界性, 序列 $\{v^\nu\}, \{\delta v^\nu\}, \{\delta^2 v^\nu\}, \{\tau v^\nu\}$ 在任意固定的格点集合上一致有界。通过选取子列 (仍记为 v^ν), 可保证它们在 $U = \bigcup_\nu \Sigma_\nu$ 上点点收敛:

$$v^\nu \rightarrow u, \quad \delta v^\nu \rightarrow u', \quad \delta^2 v^\nu \rightarrow u'', \quad \tau v^\nu \rightarrow \dot{u}.$$

为了证明极限函数的光滑性, 对 $(x, t), (y, t) \in U$, $y - x = nh = n2^{-\nu}$, 利用差商的展开恒等式

$$\frac{v^\nu(y, t) - v^\nu(x, t)}{y - x} - \delta v^\nu(x, t) = \frac{h}{n} (E^{n-2} + 2E^{n-3} + \cdots + (n-1)) \delta^2 v^\nu(x, t),$$

可得

$$\left| \frac{v^\nu(y, t) - v^\nu(x, t)}{y - x} - \delta v^\nu(x, t) \right| \leq \frac{|y - x|}{2} \|\delta^2 v^\nu\| \leq K|y - x|.$$

令 $\nu \rightarrow \infty$, 取子列的极限得

$$\left| \frac{u(y, t) - u(x, t)}{y - x} - u'(x, t) \right| \leq K|y - x|.$$

由此知 $u_x(x, t)$ 存在且等于 $u'(x, t)$ 。同理可证 $u_{xx} = u''$, $u_t = \dot{u}$, 并且这些极限函数在 U 上一致 Lipschitz, 可连续延拓到 Ω 上。再由差分方程 $\Lambda v^\nu = d$ 取极限, 即知 u 满足微分方程 (5.7)。初始条件显然满足。这就构造出了具备所需光滑性的解。 $\square$

对于热方程以及更一般的抛物型方程, 可以预期在更弱的条件下 (例如仅要求 u 一致有界) 解也是唯一的, 并且齐次方程的解在 $t > 0$ 时属于 C^∞ , 即使初始值仅为连续有界函数。这些结果可通过更精细的先验估计得到, 此处不进一步展开。

期末综合检测 *

本试题为 23 级数试偏微分方程的期末考试题的回忆版，欢迎读者尝试。

1. (15 分) 设初始曲线为 $u(x, 0) = x^2$, 求使得 $u_x + u_y = 0$ 的 u .
2. (10 分) 求证: 使用特征线法求解一阶偏微分方程得到的解是唯一的.
3. (15 分) 使用分离变量法在 $[0, 2\pi]$ 上求解:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = u(0, 2\pi) = 0.$$

4. (10 分) 求证: 二维齐次波动方程柯西问题的解是唯一的.
5. (15 分) 求证: 位势方程的基本解连续且在区域内部是调和的.
6. (10 分) 设 $c(x) \leq 0$ 且在 $\bar{\Omega}$ 上有界, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 满足在 Ω 中有 $-\Delta u + c(x)u \leq 0$, 证明 u 的非负最大值必在边界上取到, 即 $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+, u^+ = \max(u, 0)$.
7. (15 分) 对函数 $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$, 定义其以 x 为中心、 $r \geq 0$ 为半径的球面平均

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi.$$

通过变量代换可将该定义延拓到 $r < 0$, 且 $M_h(x, r)$ 为 r 的偶函数. 证明 $M_u(x, r, t)$ 作为 r, t 的函数满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u, \\ M_u(x, r, 0) = M_f(x, r), \\ \frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, 0) = M_g(x, r). \end{cases}$$

8. (10 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界光滑区域, $T > 0$, 记 $Q = \Omega \times (0, T]$, 侧边界 $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T]$, $\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 若函数 $u \in C^{2,1}(Q) \cap C^{1,0}(\bar{Q})$ 满足

$$u_t - \Delta u \geq 0, (x, t) \in Q, \quad u(x, 0) \geq 0, x \in \Omega, \quad u + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \geq 0, (x, t) \in \Gamma.$$

求证: 在 $\bar{Q}$ 上恒有 $u \geq 0$.

Example 6.0.1 ▶ 期末综合检测 1. (15 分)

设初始曲线为 $u(x, 0) = x^2$, 求使得 $u_x + u_y = 0$ 的 u .

解. 这是一个一阶线性偏微分方程 $u_x + u_y = 0$. 其特征方程为

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0}.$$

由 $dx = dy$ 积分得 $x - y = C_1$, 由 $du = 0$ 得 $u = C_2$. 因此通解为

$$u(x, y) = f(x - y),$$

其中 f 为任意可微函数. 代入初始条件 $u(x, 0) = f(x) = x^2$, 得 $f(t) = t^2$. 故特解 $u(x, y) = (x - y)^2$. □

Example 6.0.2 ▶ 期末综合检测 2. (10 分)

求证: 使用特征线法求解一阶偏微分方程得到的解是唯一的.

Proof. 详见定理 1.4.2 □

Example 6.0.3 ▶ 期末综合检测 3. (15 分)

使用分离变量法在 $[0, 2\pi]$ 上求解:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = u(2\pi, t) = 0.$$

解. 设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入方程得

$$XT' = X''T \implies \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

其中 λ 为常数. 于是得到两个常微分方程

$$T' + \lambda T = 0, \quad X'' + \lambda X = 0.$$

边界条件给出 $X(0) = X(2\pi) = 0$.

求解 $X(x)$: 分情况讨论 λ .

- 当 $\lambda < 0$ 时, 设 $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$), 通解为 $X = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, 由边界条件只能得零解.

- 当 $\lambda = 0$ 时, $X = Ax + B$, 边界条件给出 $B = 0$, $2\pi A = 0$, 得零解。
- 当 $\lambda > 0$ 时, 设 $\lambda = k^2$ ($k > 0$), 通解 $X = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ 。由 $X(0) = 0$ 得 $A = 0$; 由 $X(2\pi) = 0$ 得 $B \sin(2\pi k) = 0$ 。非零解要求 $\sin(2\pi k) = 0$, 故 $2\pi k = n\pi$, 即 $k = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。所以特征值 $\lambda_n = \frac{n^2}{4}$, 特征函数 $X_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$ 。

对应的 T 方程: $T' + \frac{n^2}{4}T = 0$, 解得 $T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2}{4}t}$ 。

由叠加原理, 形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2}{4}t} \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

代入初始条件 $u(x, 0) = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 1, \quad 0 < x < 2\pi.$$

将常数 1 在区间 $[0, 2\pi]$ 上用正弦级数展开。对于函数 $f(x) = 1$, 计算系数

$$C_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2}{n} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

由于 $\cos(n\pi) = (-1)^n$, 故

$$C_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

令 $n = 2m - 1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), 则

$$C_{2m-1} = \frac{4}{(2m-1)\pi}.$$

因此, 所求的解为

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-\frac{(2m-1)^2}{4}t} \sin\left(\frac{(2m-1)x}{2}\right).$$

这就是用分离变量法得到的级数解。

□

Example 6.0.4 ▶ 期末综合检测 4. (10 分)

求证：二维齐次波动方程柯西问题的解是唯一的。

Proof. 详见定理 4.4.3 及推论 4.4.4，注意 4.4.3 的全部过程需要在卷面上体现。 ☐

Example 6.0.5 ▶ 期末综合检测 5. (15 分)

求证：位势方程的基本解连续且在区域内部是调和的。

Proof. 连续性根据定义直接证明即可，在区域内部是调和的详见命题 3.3.9 ☐

Example 6.0.6 ▶ 期末综合检测 6. (10 分)

设 $c(x) \leq 0$ 且在 $\overline{\Omega}$ 上有界， $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 满足

$$-\Delta u + c(x)u \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

证明 u 的非负最大值必在边界上取到，即

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+, \quad u^+ = \max(u, 0).$$

Proof. 详见定理 3.4.8 ☐

Example 6.0.7 ▶ 期末综合检测 7. (15 分)

对函数 $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ，定义其以 x 为中心、 $r \geq 0$ 为半径的球面平均

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi.$$

通过变量代换可将该定义延拓到 $r < 0$ ，且 $M_h(x, r)$ 为 r 的偶函数。证明 $M_u(x, r, t)$ 作为 r, t 的函数满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u, \\ M_u(x, r, 0) = M_f(x, r), \\ \frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, 0) = M_g(x, r). \end{cases}$$

Proof. 详见定理 4.1.5 及定理 4.1.7，注意 4.1.5 的全部过程需要在卷面上体现。 ☐

Example 6.0.8 ▶ 期末综合检测 8. (10 分)

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界光滑区域, $T > 0$, 记 $Q = \Omega \times (0, T]$, 侧边界 $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T]$, $\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 若函数 $u \in C^{2,1}(Q) \cap C^{1,0}(\bar{Q})$ 满足

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \geq 0, & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) \geq 0, & x \in \Omega, \\ u + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \geq 0, & (x, t) \in \Gamma, \end{cases}$$

求证: 在 $\bar{Q}$ 上恒有 $u \geq 0$.

证明. 用反证法. 若结论不成立, 则存在 $(x_0, t_0) \in \bar{Q}$ 使得 $u(x_0, t_0) < 0$. 因 u 在紧集 $\bar{Q}$ 上连续, 必在某点 $(x_*, t_*) \in \bar{Q}$ 处取得负的最小值, 记

$$m = u(x_*, t_*) = \min_{\bar{Q}} u < 0.$$

由初始条件知, 当 $t = 0$ 时 $u \geq 0$, 故最小值点不可能在底面 $\Omega \times \{0\}$ 上取得. 因此 (x_*, t_*) 要么在内部 Q , 要么在侧边界 Γ 上.

假设 $(x_*, t_*) \in Q$. 由于 $u_t - \Delta u \geq 0$, 根据抛物型方程的强极值原理, 最小值必在抛物边界 $(\Omega \times \{0\}) \cup \Gamma$ 上达到, 内部不可能取得严格小于边界值的负最小值, 矛盾. 故 (x_*, t_*) 不可能在 Q 内. 于是必有 $(x_*, t_*) \in \Gamma$, 即 $x_* \in \partial\Omega$, $0 < t_* \leq T$. 在该点处, $u(x_*, t_*) = m < 0$. 由于 x_* 是 $u(\cdot, t_*)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值点, 且 Ω 满足内球条件 (光滑性保证), 由边界点引理 (Hopf 引理) 可知, 若 u 不是常数, 则外法向导数满足

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_*, t_*) < 0.$$

即使对于非严格情形 (如 u 在 Γ 附近为常数, 但不可能, 因为结合初始非负与内部不等式会导致矛盾; 或直接使用弱极值原理推导方向导数的符号), 最小值点处总有

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_*, t_*) \leq 0.$$

结合 $u(x_*, t_*) < 0$ 便得到

$$u(x_*, t_*) + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_*, t_*) \leq m < 0,$$

这与侧边界条件 $u + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \geq 0$ 矛盾. 综上, 假设不成立, 因此在 $\bar{Q}$ 上恒有 $u \geq 0$. $\square$

Index

Definitions

1.1.1	偏微分方程 (P.D.E.)	4	3.3.5	次调和函数	82
1.1.2	线性与拟线性方程	4	3.3.6	次调和函数的等价定义	82
1.1.10	量纲的齐次性	11	3.3.7	球面平均算子	83
1.3.1	积分曲面	15	3.3.8	Dirac δ 函数	83
1.3.2	特征方向, 特征方程特征曲线	15	3.3.10	Laplace 方程基本解的第二定义	84
1.4.1	拟线性方程的柯西问题	17	3.5.1	Green 函数	91
1.5.1	Monge 锥	24	3.5.3	Poisson 核	94
1.5.2	包络 (Envelope)	24	3.6.1	下函数类	103
1.5.6	带与积分曲面	27	3.6.2	障碍函数	103
2.1.1	二阶拟线性方程的柯西问题	33	3.6.4	升函数 (Poisson 提升)	104
2.1.4	特征曲线	35	4.1.1	波动方程	118
2.2.1	二阶线性方程的分类	37	4.1.2	达朗贝尔算子	118
2.3.1	分片 C^2 解与广义解	42	4.1.3	初值问题 (Cauchy 问题)	118
2.3.2	跳跃量	42	4.1.4	球面平均	119
2.4.5	依赖区间	49	4.1.6	关于空间变量的球面平均	121
2.4.6	决定区域	49	4.2.1	Hadamard 降维法	133
2.4.7	影响区域	49	4.4.1	依赖域	141
2.4.10	初边值问题	51	4.4.6	能量积分	146
2.5.1	Sturm-Liouville 问题	54	4.5.1	三类初边值问题	147
2.6.2	特征曲线 (方程组)	62	4.5.4	特征值问题	151
2.6.6	双曲型方程组	64	4.5.7	奇延拓与偶延拓	153
3.1.1	散度	70	5.1.1	Fourier 变换	154
3.1.4	Laplace 算子	71	5.1.2	Fourier 逆变换	154
3.1.5	德尔算子	71	5.1.3	卷积	154
3.1.6	旋度	71	5.1.11	L^2 中的 Fourier 变换	159
3.2.1	Dirichlet 问题	73	5.2.1	热方程	161
3.2.2	Neumann 问题	73	5.2.2	热方程的纯初值问题 (Cauchy 问题)	161
3.2.5	Laplace 方程的基本解	74	5.2.3	热方程 Cauchy 问题的基本解	162
			5.4.1	一维热方程的混合问题	184
			5.4.2	特征值问题	184

5.4.4	初值的奇延拓	186
5.6.1	二阶线性抛物型方程的初值 问题	200

Examples

1.1.3		4
1.1.4		5
1.1.9	量纲的赋予规则	10
1.1.11	Sobolev 不等式	11
1.1.12	Gagliardo-Nirenberg 插值不 等式	11
1.1.13	Hardy 不等式	12
1.2.1	一阶线性对流方程的一般解 .	13
1.4.6	线性对流方程	20
1.4.7	Euler 齐次偏微分方程	21
1.4.8	一维无粘 Burgers 方程	22
1.6.4	程函方程	32
2.2.4	混合型方程示例: Tricomi 方程	39
2.4.4	紧支集初值的渐近行为	48
2.4.12	课后练习: 初边值函数紧支 撑时的特殊性质	53
2.5.4		55
2.5.6	非齐次方程混合问题示例 . . .	60
2.5.7	含零阶项的波动方程	61
2.5.8	标准波动方程的重述	61
2.6.8	一维波动方程化为一阶方程 组求解	67
3.5.9	课后练习: 调和函数常数优 化与高阶导数估计	99
3.6.3	外球条件与障碍假设	104
3.6.13	课后练习: 次调和函数两种 定义的等价性	110
4.1.12	课后练习: 波动方程的能量 衰减估计	128

4.2.2	二维波动方程柯西问题的 Hadamard 降维法求解	133
4.2.5	降维法的一般原理	135
5.2.6	Tychonoff 非唯一性例子 . . .	169
5.2.7	课后练习: 热方程初值问题 的解的光滑性	170
5.2.8	课后练习: 热方程的自相似 解 (Liouville 降阶法)	171
6.0.1	期末综合检测 1. (15 分) . .	207
6.0.2	期末综合检测 2. (10 分) . .	207
6.0.3	期末综合检测 3. (15 分) . .	207
6.0.4	期末综合检测 4. (10 分) . .	209
6.0.5	期末综合检测 5. (15 分) . .	209
6.0.6	期末综合检测 6. (10 分) . .	209
6.0.7	期末综合检测 7. (15 分) . .	209
6.0.8	期末综合检测 8. (10 分) . .	210

Theorems

1.2.2	一阶线性对流方程的两种迭 代格式	13
1.4.2	拟线性方程柯西问题解的存 在唯一性	17
1.5.4	方程 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 的特 征方程	26
1.6.2	完全非线性一阶方程 Cauchy 问题的局部解	29
2.1.2		33
2.1.8	Cauchy-Kowalevski 定理 . . .	35
2.3.4	弱间断沿特征线传播定理 . . .	43
2.3.5	奇性沿特征线传播定理	44
2.4.1	D'Alembert 公式	46
2.5.2	S-L 问题的基本性质	54
2.5.5	分离变量解的适定性	56
2.6.3	特征线的判定	63
3.1.2	散度定理	70

3.1.7	旋度定理 (Stokes 公式) . . .	71
3.1.8	Green 恒等式	71
3.1.10	莱布尼茨公式	72
3.2.3	非齐次 Laplace 方程解的唯一性	73
3.2.4	齐次 Laplace 方程的径向解 . .	73
3.2.6	Green 表示公式	75
3.2.8	调和函数的实解析性	78
3.3.1	Cauchy 问题解的必要条件 . .	79
3.3.2	基本解的修正	81
3.3.11	Poisson 公式	84
3.4.1	弱极值原理	87
3.4.5	强极值原理 (次调和函数) .	88
3.4.8	一般弱极值原理	89
3.5.2	Poisson 核公式	92
3.5.5	Dirichlet 问题解的连续性 . . .	96
3.6.9	Lemma 6 (w_f 的调和性) . .	106
3.6.12	Perron 存在唯一性定理	109
3.7.1	Dirichlet 问题的最大模估计 .	112
3.7.2	第三边值问题的最大模估计 .	113
3.7.4	Dirichlet 问题的能量不等式 .	115
3.7.5	Dirichlet 问题带低阶项的能量估计	116
3.7.6	第三边值问题的能量估计 . . .	117
4.1.5	Darboux 方程	119
4.1.7	Euler-Poisson-Darboux 方程 .	122
4.1.8	三维波动方程初值问题的解 .	122
4.2.3	二维 Poisson 公式	133
4.3.1	Duhamel 原理	137
4.4.3	能量不等式	142
4.5.2	初边值问题解的唯一性	147
4.5.5	特征值的存在性与完备性 . . .	151
5.1.10	Plancherel 定理	158
5.2.5	热方程初值问题的解的存在性与光滑性	164
5.3.1	有界区域热方程的最大值原理	174

5.3.3	全空间热方程的最大值原理 .	176
5.3.5	有界区域中热方程的解的正则性	179
5.4.9	Fourier 方法与解析延拓法的等价性	191
5.5.1	非负解的唯一性	193
5.5.3	热方程的能量不等式	196
5.6.5	最大模估计与唯一性	203
5.6.6	初值问题解的存在性	204

Corollarys

1.3.5		16
1.3.6		16
1.4.3	退化情形	19
1.4.4	半线性方程情形	19
1.4.5	特征线法在 n 元一阶拟线性偏微分方程的推广	19
1.5.5	特征带的初值性质	27
2.1.3	Cauchy 数据的相容条件 . . .	34
2.1.6		35
2.1.7		35
2.1.10		36
2.2.3	进一步可化简为含阻尼的波动方程	39
2.4.2		47
2.4.3	行波结构	48
2.5.3	Dirichlet 边界下的完备基 . . .	55
2.6.4	Cauchy 数据的相容性条件 . .	63
2.6.5	特征线的判定	63
3.1.9		72
3.2.7	调和函数的边界积分表示 . . .	78
3.3.3	Gauss 算数平均值定理	81
3.3.4	次平均与上平均性质	82
3.3.12	位势表示	86
3.4.2	最小值原理	88

3.4.3	绝对值极值原理	88
3.4.4	Dirichlet 问题的唯一性	88
3.4.6		89
3.7.3		114
4.1.11	解的奇性 (惠更斯原理)	128
4.2.4	二维空间中波传播的“拖尾”现象	135
4.2.6	波动方程解公式的物理意义与维数对比	136
4.3.2	时间平移	139
4.3.3	三维非齐次波动方程的解	139
4.3.4	一般三维非齐次波动方程初值问题的解	140
4.4.4	Cauchy 问题解的唯一性	145
4.4.7	波动方程解的性质	146
4.5.3	初边值问题的能量不等式	149
5.3.2	有界区域初边值问题解的唯一性	176
5.3.4	全空间初值问题解的唯一性	178
5.4.6	全空间初值问题的解	187
5.5.2		196
5.5.4	初边值问题解的唯一性	199
5.6.4		203

Propositions

1.1.5	热传导方程的物理推导	7
1.1.6	波动方程的物理推导	7
1.1.7	使用 Maxwell 方程组推导电磁波方程	8
1.1.8	极小曲面方程的几何推导	9
1.1.14	量纲的数学本质: 伸缩对称性	12
1.3.3		15
1.3.4		16
1.5.3	包络的求法	24
1.6.1	初始带的构造	28

1.6.3	高维方程的特征带法	31
2.1.5		35
2.1.9	特征线的相容条件	36
2.2.2		38
2.2.5	椭圆型方程的化简	40
2.3.3	跳跃量沿曲线的导数关系	43
2.4.8	特征平行四边形对角和相等	50
2.4.9	平行四边形性质的逆命题	50
2.4.11	初边值问题解的光滑性	53
2.6.1		62
2.6.7	双曲型方程组的对角化	64
3.1.3		70
3.3.9	基本解的分布意义	83
3.4.7		89
3.5.4	Poisson 核的性质	95
3.5.6	调和函数的一阶导数估计 (球)	97
3.5.7	调和函数的一阶导数估计 (一般区域)	98
3.5.8	调和函数序列的一致收敛	98
3.6.5	Lemma 2 (提升的性质)	105
3.6.6	Lemma 3 (次调和函数与提升的比较)	105
3.6.7	Lemma 4 (调和函数的不动点性质)	105
3.6.8	Lemma 5 (有限个下函数的最大值仍为下函数)	106
3.6.10	Lemma 7 (边界下极限)	107
3.6.11	Lemma 8 (边界上极限)	108
4.1.9	存在唯一性	126
4.1.10	惠更斯公式	126
4.4.2	n 维波动方程的依赖域	141
4.4.5	Gronwall 不等式	146
4.5.6		151
5.1.4	基本估计与对称性	154
5.1.5	交换公式	155

5.1.6	Gauss 积分公式	155	5.4.3	解的级数展开	185
5.1.7	Gauss 函数的 Fourier 变换 . .	156	5.4.5	奇延拓的性质	187
5.1.8	卷积的 Fourier 变换	156	5.4.7	边界条件的满足	188
5.1.9	Gauss 核的逼近性质	157	5.4.8	解的积分表示	189
5.1.12	Fourier 变换的运算性质	159	5.6.2	差分格式的最大值原理	200
5.2.4	热核的基本性质	162	5.6.3	差分格式解的收敛性	202

Bibliography

- [1] Fritz John. *Partial Differential Equations*. 4th ed. 世界图书出版公司, 2018. (影印版)
- [2] 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣, 易法槐. 数学物理方程讲义. 第 3 版. 高等教育出版社, 2013.
- [3] [美] L. C. Evans 著, 刘永明译. 偏微分方程 (第二版). 高等教育出版社, 2024.