

实变函数

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部

主编：梅乐天

审校：李昆岳、余子俊



写在前面的话

实变函数是数学系难度最高的课程之一，需要反复学习回顾，做到对每个定理和证明过程烂熟于心. 本笔记基于教材《Real Analysis》，Folland 的第 0 章（除 0.4 节）、第 1 章与第 2 章 Riemann 积分及以前的内容，适用于西安交通大学数学试验班大二下学期实变函数课程，主要由数试支部党员梅乐天同志在每节课后根据课堂笔记、结合上课内容与自己的一些思考总结而成，李昆岳和余子俊两位同志负责了审校工作。由于时间关系，内容难免出错，敬请指正。

本笔记主要内容为概念叙述与命题证明，相对于原文删去了较多引导部分，并添加了原文省略的部分证明过程，可能与教材和教师讲课内容有出入（尤其是命题的证明方法），因此建议只作为参考。



目录

0 序言	3
0.1 集合论语言	3
0.2 序关系	3
0.3 势	7
0.4 良序集的其他性质 (Skip)	11
0.5 扩张实数系	11
0.6 度量空间	13
1 测度	19
1.1 引言	19
1.2 σ -代数	20
1.3 测度	24
1.4 外测度	28
1.5 实直线上的 Borel 测度	34
2 积分	42
2.1 可测函数	42
2.2 非负函数积分	47
2.3 复函数的积分	51
Index	57



序言

0.1 集合论语言

本节内容已在其他课程学习, 此处只介绍部分内容.

Definition 0.1.1 ▶ 一些常见符号

- $\mathbb{N}$ = 全体正整数 (不包含 0).
- $\mathcal{P}(X) = \{E : E \subset X\}$.
- $\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$, $\liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$

Definition 0.1.2 ▶ Cartesian 积与坐标映射

如果 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为一集族, 它们的 **Cartesian 积 (Cartesian product)** 是所有映射 $f : A \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 组成的集合, 记为 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, 其中 f 满足 $\forall \alpha \in A, f(\alpha) \in X_\alpha$. 如果 $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, 定义第 α 个坐标映射 (coordinate map) $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ 为 $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

Remark

如果每个 X_α 都等于某个给定的集合 Y , 则记 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 为 Y^A , 即为从 A 到 Y 的所有映射组成的集合. 如果 $A = \{1, \dots, n\}$, 则将 Y^A 记为 Y^n .

0.2 序关系

Definition 0.2.1 ▶ 偏序与全序

非空集合 X 上的一个**偏序 (partial ordering)** 是 X 上的一个关系 R , 满足

- 如果 xRy 并且 yRz , 那么 xRz .
- 如果 xRy 并且 yRx , 那么 $x = y$.
- $\forall x \in X$ 满足 xRx .

若 R 还满足

- 如果 $x, y \in X$, 则一定有 xRy 或 yRx .

则称 R 为一个**全序 (或线性序) (total ordering (or linear ordering))**.



Example

E 是任一集合, 则 $\mathcal{P}(E)$ 在包含关系下构成偏序集.
 $\mathbb{R}$ 在常序关系下是全序集.

Remark

偏序集中允许存在元素之间“不可比较”, 而全序集要求集合中任意两个元素均“可比较”.

我们常使用 $\leq$ 表示偏序关系, 并且用 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 且 $x \neq y$. 注意到 X 上的一个偏序自然诱导出 X 的每个非空子集上的一个偏序.

Definition 0.2.2 ▶ 序同构

两个偏序集 X, Y 被称为是**序同构 (order isomorphic)** 的, 如果存在一个双射 $f: X \rightarrow Y$ 使得 $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definition 0.2.3 ▶ 极大 (小) 元与上 (下) 界

如果 X 在 $\leq$ 下构成偏序集, X 的一个**极大元 (相应地, 极小元)**(maximal element (resp. minimal element)) 是 X 中的一个元素 x , 使得唯一满足 $y \in X$ 且 $x \leq y$ (相应地, $y \leq x$) 的元素 y 是 x 本身. 如果 $E \subset X$, 则 E 的一个**上界 (相应地, 下界)**(upper bound (resp. lower bound)) 是 X 中的一个元素 x , 使得 $\forall y \in E$ 有 $y \leq x$ (相应地, $x \leq y$).

Remark

极大元和极小元不一定存在, 并且除非集合是全序的, 否则它们不一定唯一.
 E 的上界不一定是 E 中的元素, 并且除非 E 是全序的, 否则 E 的极大元不一定是 E 的一个上界.

Example

实数集 $\mathbb{R}$ 在常序关系下无极大元与极小元.
令 $A = \{a, b\}$, 其中 $a \leq a, b \leq b$, 则 A 是一个偏序集而不是全序集, 并且 a, b 都是极大元与极小元.
在常序关系下, 区间 $[0, 1]$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集, 任何大于 1 的实数都是该区间的上界.
令 $B = \{a, b, c\}$, 其中 $a \leq b, c \leq c$, 则 c 是 B 的一个极大元, 但不是其上界.

Definition 0.2.4 ▶ 良序

如果 X 在 $\leq$ 下构成全序集, 并且 X 的任一非空子集有极小元, 则称 $\leq$ 是 X 上的一个**良序 (well ordering)**.

**Example**

$\mathbb{N}$ 是良序集, $\mathbb{R}$ 不是良序集, 因为 $(0, 1)$ 无极小元.

下面我们将陈述集合论的一项基本原理, 并延伸出一些相关结论.

Principle 0.2.5 ▶ Hausdorff 极大原理

每个偏序集都有一个极大全序子集.

也就是说, 如果 X 在 $\leq$ 下构成偏序集, 则存在一集合 $E \subset X$ 在 $\leq$ 下构成全序集, 并且 X 没有子集在 $\leq$ 下构成全序集且真包含 E .

这个原理的等价版本如下:

Lemma 0.2.6 ▶ Zorn 引理

如果 X 是一个偏序集, 并且其每个全序子集都有上界, 则 X 有极大元.

证明. Hausdorff 极大原理 $\Rightarrow$ Zorn 引理:

令 $(X, \leq)$ 是一个偏序集, 则 X 的极大全序子集 E 有一上界 α . 假设 α 不是 X 的极大元, 则存在元素 $\beta \in X$ 使得 $\alpha < \beta$, 于是 $E \cup \{\beta\}$ 是 X 的一个全序子集, 这与 E 的极大性矛盾. 故 X 有极大元 α .

Zorn 引理 $\Rightarrow$ Hausdorff 极大原理:

令 E 为 X 的所有全序子集组成的集合, 并且在包含关系 $\subset$ 下构成偏序集. 考虑 $F \subset E$ 为一全序子集, 并令 $U = \bigcup_{C \in F} C$, 则由定义可知 U 是偏序集. 任取 $a, b \in U$, 存在全序子集 $A, B \in F$ 使得 $a \in A, b \in B$. 不失一般性, 令 $A \subset B$, 则 $a, b \in B \subset U$, 因此 a, b 在 U 中满足偏序关系, 从而由任意性可知 U 是全序集. $\forall G \in F$ 有 $G \subset U$, 于是 U 是 F 的一个上界. 再由 Zorn 引理可知 E 有极大元, 即 X 有极大全序子集.

Principle 0.2.7 ▶ 良序原理

每个非空集合 X 都可以良序化.

证明. 令 $\mathcal{W}$ 为 X 的子集上的良序关系组成的集合, 并按如下要求定义 $\mathcal{W}$ 上的一个偏序: 令 $\leq_1, \leq_2$ 分别是 X 的良序子集 E_1, E_2 上的良序. 我们称 $\leq_1$ 先于 $\leq_2$, 如果有

- (1) $E_1 \subset E_2$, 并且 $\leq_1, \leq_2$ 在 E_1 上是一致的.
- (2) 如果 $x \in E_2 \setminus E_1$, 则 $\forall y \in E_1$ 有 $y \leq_2 x$.

并记为 $\leq_1 \leq \leq_2$.

**Lemma**

$\mathcal{W}$ 在 $\leq$ 下构成偏序集.

证明. 令 $\leq_1, \leq_2, \leq_3$ 分别是 X 的良序子集 E_1, E_2, E_3 上的良序.

由定义即得 $\leq_1 \leq \leq_1$.

如果 $\leq_1 \leq \leq_2, \leq_2 \leq \leq_3$, 一方面有 $E_1 \subset E_2 \subset E_3$, 且 $\leq_1, \leq_2$ 在 E_1 上是一致的, $\leq_2, \leq_3$ 在 E_2 上是一致的, 于是 $\leq_1, \leq_3$ 在 E_1 上是一致的; 另一方面, 如果 $x \in E_3 \setminus E_1$, 则 $\forall y \in E_1$,

1. 若 $x \in E_3 \setminus E_2 \subset E_3 \setminus E_1$, 则 $y \leq_3 x$

2. 若 $x \in E_2 \setminus E_1$, 则 $y \leq_2 x$, 再由 $\leq_2, \leq_3$ 在 E_2 上一致可得 $y \leq_3 x$.

由上述讨论可得 $\leq_1 \leq \leq_3$.

如果 $\leq_1 \leq \leq_2$ 并且 $\leq_2 \leq \leq_1$, 则 $E_1 = E_2$, 且 $\leq_1, \leq_2$ 在 $E_1 = E_2$ 上是一致的, 于是 $\leq_1 = \leq_2$.

综上, $\leq$ 是 $\mathcal{W}$ 上的一个偏序, 即 $\mathcal{W}$ 在 $\leq$ 下构成偏序集.

令 $C_{\mathcal{W}}$ 为 $\mathcal{W}$ 的一个全序子集, $\leq_{\alpha}$ 可视为 $E_{\alpha} \times E_{\alpha}$ 的一个子集, 则由引理 0.2 证明过程可知

$\bigcup_{\leq_{\alpha} \in C_{\mathcal{W}}} \leq_{\alpha}$ 在偏序关系 $\leq$ 下是 $C_{\mathcal{W}}$ 的一个上界. 由 Zorn 引理可知 $\mathcal{W}$ 有一极大元 $\leq$. 假设 $\leq$ 是 X 的某个子集 E 上的良序, 并且存在 $x_0 \in X \setminus E$, 则通过声明 $\forall x \in E$ 有 $x \leq x_0$, 我们可将 $\leq$ 拓展为 $E \cup \{x_0\}$ 上的一个良序, 这与 $\leq$ 的极大性矛盾. 因此, $\leq$ 是 X 上的一个良序.

Axiom 0.2.8 ▶ 选择公理

如果 $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ 是非空集合组成的非空族, 则 $\prod_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ 非空.

证明. 令 $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha}$. 在 X 上构造一个良序, 并且 $\forall \alpha \in A$, 令 $f(\alpha)$ 为 X_{α} 的极小元, 于是 $f \in \prod_{\alpha \in A} X_{\alpha}$.

Corollary 0.2.9

如果 $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ 是一族互不相交的非空集合, 则存在集合 $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ 使得对于每个 $\alpha \in A$, $Y \cap X_{\alpha}$ 恰好包含一个元素.

证明. 令 $Y = f(A)$, 其中 $f \in \prod_{\alpha \in A} X_{\alpha}$.

以上, 我们通过 Hausdorff 极大原理得到了选择公理. 事实上, 两者是等价的, 这个结论可通过由选择公理推导出 Zorn 引理得到.



0.3 势

Definition 0.3.1

如果 X, Y 是非空集合, 我们定义

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(Y), \quad \text{card}(X) = \text{card}(Y), \quad \text{card}(X) \geq \text{card}(Y)$$

来分别表示存在映射 $f: X \rightarrow Y$ 是单射、双射、满射. 我们还定义

$$\text{card}(X) < \text{card}(Y), \quad \text{card}(X) > \text{card}(Y)$$

表示存在单射、满射并且均不是双射.

我们还可以将这一关系拓展到空集上, 即

$$\text{card}(\emptyset) < \text{card}(X), \quad \text{card}(X) > \text{card}(\emptyset), \quad \forall X \neq \emptyset.$$

Remark

若 X 是有限集, $\text{card}(X)$ 可以理解为 X 中的元素个数.

若 X 不是有限集, 则单独的 $\text{card}(X)$ 是无意义的.

本节除特别说明外, 我们规定所有集合均是非空的, 以避免讨论这一特殊情况. 我们的首要任务是证明以上定义所蕴含的一些性质.

Proposition 0.3.2

$$\text{card}(X) \leq \text{card}(Y) \Leftrightarrow \text{card}(Y) \geq \text{card}(X).$$

证明. 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是单射, 令 $x_0 \in X$ 并定义 $g: Y \rightarrow X$ 为

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in f(X), \\ x_0 & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

故 g 是满射.

相反地, 如果 $g: Y \rightarrow X$ 为满射, 那么 $g^{-1}(\{x\}), x \in X$ 为互不相交的一族非空集合. 取 $f \in \prod_{x \in X} g^{-1}(\{x\})$, 则 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g^{-1}(\{x_1\}) = g^{-1}(\{x_2\}) \Rightarrow x_1 = x_2$, 从而 $f: X \rightarrow Y$ 是单射.

Proposition 0.3.3

对任意集合 X, Y , 要么有 $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$, 要么有 $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$.



证明. 令 $\mathcal{J}$ 是从 X 的子集到 Y 的子集的所有单射组成的集合. 由于 $\mathcal{J}$ 中的元素可视为 $X \times Y$ 的子集, 从而其可在包含关系下构成偏序集. 令 K 是 $\mathcal{J}$ 的一个全序子集, 则由引理 0.2 证明过程可知 $\bigcup_{C \in K} C$ 在包含关系下是 K 的一个上界, 于是由 Zorn 引理可得, $\mathcal{J}$ 有一个极大元 $f: A \rightarrow B$, 其中 $A \subset X, B \subset Y$. 如果存在 $x_0 \in X \setminus A, y_0 \in Y \setminus B$, 规定 $f(x_0) = y_0$, 则 f 可拓展为 $A \cup \{x_0\}$ 到 $B \cup \{y_0\}$ 上的一个单射, 这与极大性矛盾. 于是要么 $A = X$, 从而 $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$; 要么 $B = Y$, 从而 $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$.

Theorem 0.3.4 ▶ Schröder-Bernstein 定理

如果 $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ 并且 $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$, 则 $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$.

证明. 令 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$ 为单射. 考虑一个点 $x \in X$: 如果 $x \in g(Y)$, 我们构造 $g^{-1}(x) \in Y$; 如果 $g^{-1}(x) \in f(X)$, 我们构造 $f^{-1}(g^{-1}(x))$, 并依此类推. 这个过程要么可以无限地继续下去, 要么终止于 $X \setminus g(Y)$ 中的一个元素 (可能是 x 本身), 要么终止于 $Y \setminus f(X)$ 中的一个元素. 在这三种情况下, 我们称 x 分别属于 X_∞, X_X 或 X_Y ; 因此 X 是互不相交的集合 X_∞, X_X 和 X_Y 的并. 同样地, Y 是互不相交集合 Y_∞, Y_X 和 Y_Y 的并.

由定义可得 $f: X_\infty \rightarrow Y_\infty$ 是满射. 取 $y \in Y_X$, 则上述构造过程会停止于 $X \setminus g(Y)$ 上的一个元素, 由定义可知存在元素 $x \in X$ 满足 $f^{-1}(y) = x$, 于是 $x \in X_X$, 从而 $f: X_X \rightarrow Y_X$ 是满射. 同理可得 $g: Y_Y \rightarrow X_Y$ 是满射. 因此定义 $h: X \rightarrow Y$ 为

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_\infty \cup X_X, \\ g^{-1}(x), & x \in X_Y, \end{cases}$$

则 h 是双射.

Remark

为了让上述的构造过程更加清楚, 我们可以画这样一条示意链 (以 X 为例):

$$x \rightarrow g^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(g^{-1}(x)) \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{cases} \infty & \Rightarrow X_\infty \\ f^{-1}(\cdots(x)) \in X \setminus g(Y) & \Rightarrow X_X, \\ g^{-1}(\cdots(x)) \in Y \setminus f(X) & \Rightarrow X_Y. \end{cases}$$

Proposition 0.3.5

对于任意集合 X , 有 $\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X))$.

证明. 一方面, 映射 $f(x) = \{x\}$ 是从 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 的一个单射. 另一方面, 考虑映射 $g: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, 令 $Y = \{x \in X : x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. 假设存在某个 $x_0 \in X$ 有 $Y = g(x_0)$, 如果 $x_0 \in Y = g(x_0)$, 那么根据 Y 的定义, $x_0 \notin Y$; 如果 $x_0 \notin Y = g(x_0)$, 那么 $x_0 \in Y$, 均得出矛盾. 故 $Y \notin g(X)$,



从而 g 不是满射.

Definition 0.3.6 ▶ 可数 (可列) 与可数无限

一个集合 X 被称为可数 (countable) (或可列 (denumerable)) 的, 如果 $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$. 特别地, 所有有限集都是可数的, 并将 “ $\text{card}(X)$ ” 记为 X 中元素的个数:

$$\text{card}(X) = n \Leftrightarrow \text{card}(X) = \text{card}(\{1, \dots, n\}).$$

如果 X 是可数的但不是有限的, 我们说 X 是可数无限 (countably infinite) 的.

Proposition 0.3.7

- a. 如果 X 和 Y 是可数的, 那么 $X \times Y$ 也是可数的.
- b. 如果 A 是可数的, 并且对于每一个 $\alpha \in A$, X_α 是可数的, 那么 $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是可数的.
- c. 如果 X 是可数无限的, 那么 $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{N})$.

证明. (a) 只需证明 $\mathbb{N}^2$ 是可数的. 我们通过如下方式定义一个从 $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ 到 $\mathbb{N}^2$ 的双射: 对于 n 依次等于 $2, 3, 4, \dots$, 按 j 递增的顺序列出那些满足 $j + k = n$ 的元素 $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, 即:

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), \dots$$

又易知 $f(n) = n + 1$ 是 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ 的一个双射, 结论得证.

(b) 对于每个 $\alpha \in A$, 存在满射 $f_\alpha: \mathbb{N} \rightarrow X_\alpha$, 于是由 $f(n, \alpha) = f_\alpha(n)$ 定义的映射 $f: \mathbb{N} \times A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是满射, 再由 (a) 得出结论.

(c) 不妨设 X 是 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集. 令 $f(1)$ 是 X 中的最小元素, 并归纳定义 $f(n)$ 为 $X \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}$ 中的最小元素. 一方面, 由构造规则可知 f 是单射; 另一方面, 对任意给定的 $x \in X \subset \mathbb{N}$, 最多只有 $x - 1$ 个小于 x 的元素, 从而存在某个 $n \in \{1, 2, \dots, x - 1\}$ 使得 $f(n) = x$, 故 f 是满射, 于是 f 是从 $\mathbb{N}$ 到 X 的一个双射.

Corollary 0.3.8

$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是可数的.

证明. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, 由命题 0.10(b) 即得 $\mathbb{Z}$ 是可数的, 从而 $\mathbb{Z}^2$ 是可数的.

定义 $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ 为: 如果 $n \neq 0$, 则 $f(m, n) = \frac{m}{n}$; 如果 $n = 0$, 则 $f(m, 0) = 0$, 于是 f 是满射, 从而 $\text{card}(\mathbb{N}) \geq \text{card}(\mathbb{Z}^2) \geq \text{card}(\mathbb{Q})$, 即 $\mathbb{Q}$ 是可数的.

Definition 0.3.9 ▶ 连续统的势

一个集合 X 被称为具有连续统的势 (cardinality of the continuum), 如果 $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{R})$.



我们使用 $\mathfrak{c}$ 表示 $\text{card}(\mathbb{R})$:

$$\text{card}(X) = \mathfrak{c} \Leftrightarrow \text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{R}).$$

Example

由 $f(x) = \arctan \pi \left(x - \frac{1}{2} \right)$ 与 $g(x) = \log x$ 可得

$$\mathfrak{c} \leq \text{card}((0, 1)) \leq \text{card}((0, 1]) \leq \mathfrak{c}.$$

Proposition 0.3.10

$$\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathfrak{c}.$$

证明. 如果 $A \subset \mathbb{N}$, 定义

$$f(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} 2^{-n}, & \mathbb{N} \setminus A \text{ 是无限的,} \\ 1 + \sum_{n \in A} 2^{-n}, & \mathbb{N} \setminus A \text{ 是有限的.} \end{cases}$$

在这两种情况下, $f(A)$ 是二进制小数展开为 $0.a_1a_2\cdots$ 或 $1.a_1a_2\cdots$ 的数, 其中如果 $n \in A$ 则 $a_n = 1$, 否则 $a_n = 0$. 那么 $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ 是单射.

另一方面, 定义 $g: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$g(A) = \begin{cases} \log \left(\sum_{n \in A} 2^{-n} \right), & A \text{ 有下界,} \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

因为每个正实数都有二进制小数展开, 所以 g 是满射, 从而 $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z})) \geq \text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, 由 Schröder-Bernstein 定理得出结论.

Remark

在这一证明过程中, f 的构造需要区别两种情况, 是因为在二进制下有例如 $0.1 = 0.0111\cdots$.

Corollary 0.3.11

如果 $\text{card}(X) \geq \mathfrak{c}$, 则 X 是不可数的.

证明. 应用命题 0.9 与命题 0.12.

**Proposition 0.3.12**

- a. 如果 $\text{card}(X) \leq c$ 且 $\text{card}(Y) \leq c$, 则 $\text{card}(X \times Y) \leq c$.
- b. 如果 $\text{card}(A) \leq c$ 且对于所有 $\alpha \in A$ 都有 $\text{card}(X_\alpha) \leq c$, 则 $\text{card}(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \leq c$.

证明. (a) 取 $X = Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, 定义 $\phi, \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 为 $\phi(n) = 2n$ 和 $\psi(n) = 2n - 1$, 则其分别为 $\mathbb{N}$ 到偶数集、奇数集的双射. 定义映射 $f: \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 为 $f(A, B) = \phi(A) \cup \psi(B)$. 一方面, 若 $f(A_1, B_1) = f(A_2, B_2)$, 即 $\phi(A_1) \cup \psi(B_1) = \phi(A_2) \cup \psi(B_2)$. 由定义可得 $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \phi(A) \cap \psi(B) = \emptyset$, 于是 $\phi(A_1) = \phi(A_2), \psi(B_1) = \psi(B_2)$, 即 $A_1 = A_2, B_1 = B_2$, 从而 f 是单射. 另一方面, 对任意 $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, 将其中的偶数与奇数组成的集合分别记为 S_1, S_2 , 于是 $f(\phi^{-1}(S_1), \psi^{-1}(S_2)) = S$, 故 f 是满射. 综上, f 是双射.

(b) 因为 $\text{card}(\mathbb{R}) = c$, 对于每个 $\alpha \in A$, 存在一个满射 $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow X_\alpha$, 于是由 $f(r, \alpha) = f_\alpha(r)$ 定义的映射 $f: \mathbb{R} \times A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是满射, 从而结论可由 (a) 得出.

0.4 良序集的其他性质 (Skip)

0.5 扩张实数系

Definition 0.5.1 ▶ 扩张实数系

将两个额外的点 $\infty (= +\infty)$ 和 $-\infty$ 添加至 $\mathbb{R}$ 形成扩张实数系 (extended real number system), 记为 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, 并通过声明 $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < \infty$ 拓展 $\mathbb{R}$ 上的常序关系.

$\overline{\mathbb{R}}$ 的完备性可以表述如下: $\overline{\mathbb{R}}$ 的每一个子集 A 都有一个最小上界 (上确界) 和一个最大下界 (下确界), 分别记为 $\sup A$ 和 $\inf A$. 如果 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, 我们记

$$\max(a_1, \dots, a_n) = \sup A, \quad \min(a_1, \dots, a_n) = \inf A.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ 中的数列 $\{x_n\}$ 收敛 (于 $\mathbb{R}$) 当且仅当上极限和下极限相等 (且有限).

$\mathbb{R}$ 上的算数运算可被部分拓展至 $\overline{\mathbb{R}}$ 上:

$$x \pm \infty = \pm \infty (x \in \mathbb{R}), \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$x \cdot (\pm \infty) = \pm \infty (x > 0), \quad x \cdot (\pm \infty) = \mp \infty (x < 0).$$

我们不试图定义 $\infty - \infty$, 但按照习惯, 除非特别说明, 我们有

$$0 \cdot (\pm \infty) = 0.$$



$\overline{\mathbb{R}}$ 中的区间表示与 $\mathbb{R}$ 中基本相同, 但允许类似于 $(a, \infty]$ 之类的表示.

$\overline{\mathbb{R}}$ 上函数的 (严格) 单调性、连续性等与在 $\mathbb{R}$ 上基本相同, 此处不再赘述.

Definition 0.5.2 ▶ 非负实数的 (不可数) 和

设 X 是一个集合, 映射 $f: X \rightarrow [0, \infty]$, 我们定义 $\sum_{x \in X} f(x)$ 为其有限部分和的上确界, 即

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) : F \subset X, F \text{ 是有限集} \right\}.$$

Proposition 0.5.20

给出映射 $f: X \rightarrow [0, \infty]$, 令 $A = \{x: f(x) > 0\}$. 如果 A 不可数, 则 $\sum_{x \in X} f(x) = \infty$. 如果 A 是可数无限的, 则 $\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n))$, 其中 $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ 是任意双射, 并且右侧求和是一般的无穷级数.

证明. 令 $A_n = \left\{x: f(x) > \frac{1}{n}\right\}$, 则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 如果 A 不可数, 那么一定至少存在某个 A_n 是不可数的, 并有 $\sum_{x \in F} f(x) > \frac{\text{card}(F)}{n}$, 其中 F 是 A_n 的任一有限子集, 于是 $\sum_{x \in X} f(x) = \infty$. 如果 A 是可数无限的, 令 $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ 是一个双射, $B_N = g(\{1, \dots, N\})$, 则 A 的每个有限子集 F 包含在某个 B_N 中, 从而有

$$\sum_{x \in F} f(x) \leq \sum_{n=1}^N f(g(n)) \leq \sum_{x \in X} f(x),$$

令 $N \rightarrow \infty$ 有

$$\sum_{x \in F} f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n)) \leq \sum_{x \in X} f(x),$$

再对所有有限子集 F 的部分和取上确界, 即得结论.

Proposition 0.5.21

$\mathbb{R}$ 中的每个开集都是可数个不相交的开区间的并集.

证明. 我们先证明一个引理.

**Lemma**

如果 $\mathbb{R}$ 中的一族开区间包含同一点, 则它们的并仍然是开区间.

证明. 设 $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ 是共同包含一点 c 的一族开区间. 令 $a = \inf_{i \in I} a_i \geq -\infty, b = \sup_{i \in I} b_i \leq \infty$.

一方面, 对每个 $x \in \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$, 一定存在某个 $j \in I$ 使得 $x \in (a_j, b_j) \subset (a, b)$, 因此 $\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \subset (a, b)$; 另一方面, 对每个 $x \in (a, b)$, 若 $x = c$, 显然 $x \in \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$; 若 $c < x < b$, 假设 $\forall i \in I, x \geq b_i$, 则由上确界定义可知 $x \geq b$, 矛盾. 于是存在 $k \in I$ 使得 $x < b_k$, 再由 $c \in (a_k, b_k)$ 可得 $x \in (a_k, b_k) \subset \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$; 同理, 若 $a < x < c$, 仍有 $x \in \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$. 于是 $(a, b) \subset \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$.

综上, $\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) = (a, b)$, 从而是开区间.

令 U 是开集, 对每个 $x \in U$, 令 $\mathcal{J}_x = \{I : I \text{ 是开区间}, x \in I \subset U\}$. 由上述引理可知, $J_x = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_x} I$ 是一个开区间, 并且由构造方式可知其是 $\mathcal{J}_x$ 中的最大元素. 因此, $\forall x, y \in U$, 要么 $J_x = J_y$, 要么 $J_x \cap J_y = \emptyset$, 否则 $J_x \cup J_y$ 是 $\mathcal{J}_x$ 中真包含 J_x 的开区间, 这与 J_x 的极大性矛盾. 于是 $K = \{J_x : x \in U\}$ 中的不同元素是不相交的, 并且 $U = \bigcup_{J \in K} J$. 对于每个 $J \in K$, 取一有理数 $f(J) \in J$, 则由 $J \neq J' \Rightarrow J \cap J' = \emptyset$ 可得 $f : K \rightarrow \mathbb{Q}$ 是单射, 从而 K 是可数的.

0.6 度量空间

Definition 0.6.1 ▶ 度量与度量空间

集合 X 上的**度量 (metric)** 是一个函数 $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, 满足

- $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.
- $\forall x, y \in X, \rho(x, y) = \rho(y, x)$.
- $\forall x, y, z \in X, \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

配备了度量的集合称为**度量空间 (metric space)**.

Definition 0.6.2 ▶ 度量的等价性

集合 X 上的两个度量 ρ_1 和 ρ_2 称为**等价 (equivalent)** 的, 若存在 $C, C' > 0$ 使得

$$C\rho_1 \leq \rho_2 \leq C'\rho_1.$$

**Example**

- i. 欧几里得距离: $\rho(x, y) = |x - y|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量.
- ii. $\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ 和 $\rho_\infty(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ 是 $[0, 1]$ 上连续函数空间的度量.
- iii. 若 ρ 是 X 上的度量且 $A \subset X$, 则 $\rho|(A \times A)$ 是 A 上的度量.
- iv. 若 (X_1, ρ_1) 和 (X_2, ρ_2) 是度量空间, 则 $X_1 \times X_2$ 上的乘积度量 ρ 定义为

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)).$$

有时在 $X_1 \times X_2$ 上使用其他度量, 例如

$$\rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2), \quad [\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

事实上, 这些度量与乘积度量等价.

Definition 0.6.3 ▶ 球、开的与闭的

设 (X, ρ) 为度量空间. 若 $x \in X$ 且 $r > 0$, 则以 x 为中心、半径为 r 的 (开) 球 (ball) 定义为

$$B(r, x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}.$$

子集 $E \subset X$ 是开的 (open), 如果对每个 $x \in E$ 存在 $r > 0$ 使得 $B(r, x) \subset E$, 称为开集. 子集 $E \subset X$ 是闭的 (closed), 如果其补集是开的, 称为闭集.

Example

每个球 $B(r, x)$ 是开集, 因为若 $y \in B(r, x)$ 且 $\rho(x, y) = s$, 则 $B(r - s, y) \subset B(r, x)$.

X 和 $\emptyset$ 既开又闭.

任意开集族的并是开集, 因此任意闭集族的交是闭集. 此外, 任意有限开集族 (或闭集族) 的交 (或并) 是开集 (或闭集). 因为若 $U_1, \dots, U_n$ 是开集, 且 $x \in \bigcap_{j=1}^n U_j$, 则对每个 j 存在 $r_j > 0$ 使得

$B(r_j, x) \subset U_j$, 于是 $B(r, x) \subset \bigcap_{j=1}^n U_j$, 其中 $r = \min(r_1, \dots, r_n)$, 故 $\bigcap_{j=1}^n U_j$ 是开集.

Definition 0.6.4 ▶ 内部、闭包、稠密、无处稠密、可分与收敛

若 $E \subset X$, 则所有包含于 E 的开集 U 的并是包含于 E 的最大开集, 称为 E 的内部 (interior), 记作 E° .

所有包含 E 的闭集 F 的交是包含 E 的最小闭集, 称为 E 的闭包 (closure), 记作 $\bar{E}$.

称 E 在 X 中稠密 (dense), 如果 $\bar{E} = X$.

称 E 无处稠密, 若 $\bar{E}$ 的内部是空集.

称 X 是可分的, 如果有可数的稠密子集.



称 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛 (converge) 于 $x \in X$ (符号表示: $x_n \rightarrow x$ 或 $\lim x_n = x$), 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Example

$\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的可数稠密子集.

Proposition 0.6.5

若 X 是度量空间, $E \subset X, x \in X$, 则下列叙述等价:

- $x \in \overline{E}$.
- 对所有 $r > 0$ 有 $B(r, x) \cap E \neq \emptyset$.
- 存在 E 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x .

证明. 若 $B(r, x) \cap E = \emptyset$, 则 $B(r, x)^c$ 是包含 E 但不含 x 的闭集, 故 $x \notin \overline{E}$. 相反地, 若 $x \notin \overline{E}$, 则因 $(\overline{E})^c$ 是开的, 存在 $r > 0$ 使得 $B(r, x) \subset (\overline{E})^c \subset E^c$. 因此 (a) 等价于 (b).

若 (b) 成立, 则对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in B(n^{-1}, x) \cap E$, 故 $x_n \rightarrow x$. 另一方面, 若 $B(r, x) \cap E = \emptyset$, 则对所有 $y \in E$ 有 $\rho(y, x) \geq r$, 故 E 中无序列收敛于 x . 因此 (b) 等价于 (c).

Definition 0.6.6 ▶ 连续与一致连续

若 (X_1, ρ_1) 和 (X_2, ρ_2) 是度量空间, 映射 $f: X_1 \rightarrow X_2$ 称为在 $x \in X$ 处连续 (continuous), 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\rho_1(x, y) < \delta$ 时, $\rho_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$, 即 $f^{-1}(B(\varepsilon, f(x))) \supset B(\delta, x)$. 称 f 连续, 如果它在每个 $x \in X_1$ 处连续. 称 f 一致连续, 若连续定义中的 δ 的选择与 x 无关.

Proposition 0.6.7

$f: X_1 \rightarrow X_2$ 连续当且仅当对每个开集 $U \subset X_2$, $f^{-1}(U)$ 在 X_1 中是开集.

证明. 若后者成立, 则对每个 $x \in X_1$ 和 $\varepsilon > 0$, 集合 $f^{-1}(B(\varepsilon, f(x)))$ 是开集且含 x , 故包含某个以 x 为中心的球; 这意味着 f 在 x 连续. 相反地, 设 f 连续且 U 在 X_2 中是开集. 对每个 $y \in U$, 存在 $\varepsilon_y > 0$ 使得 $B(\varepsilon_y, y) \subset U$, 且对每个 $x \in f^{-1}(\{y\})$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得 $B(\delta_x, x) \subset f^{-1}(B(\varepsilon_y, y)) \subset f^{-1}(U)$. 因此 $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B(\delta_x, x)$ 是开集.

Definition 0.6.8 ▶ 柯西列与完备性

度量空间 (X, ρ) 中的序列 $\{x_n\}$ 称为柯西列 (Cauchy(sequence)), 如果当 $n, m \rightarrow \infty$ 时 $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$. 称 X 的子集 E 是完备 (complete) 的, 如果 E 中每个柯西列收敛且其极限在 E 中.

**Example**

$\mathbb{R}^n$ 在欧几里得度量下完备, 而 $\mathbb{Q}^n$ 不完备.

Proposition 0.6.9

完备度量空间的闭子集完备, 且任意度量空间的完备子集是闭集.

证明. 若 X 完备, $E \subset X$ 是闭集, 且 $\{x_n\}$ 是 E 中的柯西序列, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有极限. 由命题 0.22 可得 $x \in \overline{E} = E$.

若 $E \subset X$ 完备且 $x \in \overline{E}$, 由命题 0.22 可得存在 E 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x . $\{x_n\}$ 是柯西序列, 故其极限在 E 中, 因此 $E = \overline{E}$.

在度量空间 (X, ρ) 中, 可定义点到集合的距离及两集合间的距离. 即若 $x \in X$ 且 $E, F \subset X$, 定义

$$\rho(x, E) = \inf\{\rho(x, y) : y \in E\},$$

$$\rho(E, F) = \inf\{\rho(x, y) : x \in E, y \in F\} = \inf\{\rho(x, F) : x \in E\}.$$

由命题 0.22 可得 $\rho(x, E) = 0$ 当且仅当 $x \in \overline{E}$.

Definition 0.6.10 ▶ 直径与有界

我们定义 $E \subset X$ 的直径 (**diameter**) 为

$$\text{diam}(E) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}.$$

称 E 是有界 (**bounded**) 的, 若 $\text{diam}(E) < \infty$.

Definition 0.6.11 ▶ 覆盖与完全有界

若 $E \subset X$ 且集族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 满足 $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, 则称 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 E 的覆盖 (**cover**), 称 E 被 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 覆盖. 我们称 E 完全有界 (**totally bounded**), 若对每个 $\varepsilon > 0$, E 可被有限多个半径为 ε 的球覆盖.

Remark

每个完全有界集有界, 因为若 $x, y \in \bigcup_{j=1}^n B(\varepsilon, z_j)$, 设 $x \in B(\varepsilon, z_1), y \in B(\varepsilon, z_2)$, 则

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z_1) + \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, y) \leq 2\varepsilon + \max\{\rho(z_j, z_k) : 1 \leq j, k \leq n\}.$$

反之一般不成立.

若 E 完全有界, 则 $\overline{E}$ 亦然, 因为若 $E \subset \bigcup_{j=1}^n B(\varepsilon, z_j)$, 则 $\overline{E} \subset \bigcup_{j=1}^n B(2\varepsilon, z_j)$.

**Proposition 0.6.12**

设 E 是度量空间 (X, ρ) 的子集, 则下列叙述等价:

- E 完备且完全有界.
- (Bolzano-Weierstrass) E 中每个序列有收敛于 E 中的点的子列.
- (Heine-Borel) 若 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 E 的开覆盖, 则存在有限集 $F \subset A$ 使得 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ 覆盖 E .

证明. 我们将证 (a) 与 (b) 等价, (a) 和 (b) 共同蕴含 (c), 最后 (c) 蕴含 (b).

(a) $\Rightarrow$ (b): 设 (a) 成立且 $\{x_n\}$ 是 E 中的序列. E 可被有限多个半径为 2^{-1} 的球覆盖, 且至少有一个球包含无穷多项 x_n : 设对 $n \in N_1$ 有 $x_n \in B_1$. $E \cap B_1$ 可被有限多个半径为 2^{-2} 的球覆盖, 且至少有一个球包含无穷多项 $n \in N_1$ 的 x_n : 设对 $n \in N_2$ 有 $x_n \in B_2$. 归纳继续, 得到半径 2^{-j} 的球序列 B_j 和递减的 $\mathbb{N}$ 子集序列 N_j , 使得对 $n \in N_j$ 有 $x_n \in B_j$. 选取 $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, \dots$ 满足 $n_1 < n_2 < \dots$. 则 $\{x_{n_j}\}$ 是柯西列, 因为若 $k > j$ 有 $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < 2^{1-j}$, 且因 E 完备, 其极限在 E 中.

(b) $\Rightarrow$ (a): 证明若 (a) 中任一条件不成立, 则 (b) 也不成立. 若 E 不完备, 则存在 E 中的柯西列 $\{x_n\}$ 无极限在 E 中. $\{x_n\}$ 无子列收敛于 E , 否则整个序列将收敛于同一极限. 另一方面, 若 E 不完全有界, 设 $\varepsilon > 0$ 使得 E 不能被有限多个半径为 ε 的球覆盖. 归纳选取 $x_n \in E$: 任取 $x_1 \in E$, 在选定 $x_1, \dots, x_n$ 后, 选取 $x_{n+1} \in E \setminus \bigcup_{j=1}^n B(\varepsilon, x_j)$. 则对所有 n, m 有 $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon$, 故 $\{x_n\}$ 无收敛子列.

(a), (b) $\Rightarrow$ (c): 只需证明若 (b) 成立且 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 E 的开覆盖, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得每个与 E 相交的半径为 ε 的球包含于某个 V_α 中, 由 (a) 可知, E 可被有限多个此类球覆盖. 反设对每个 $n \in \mathbb{N}$ 存在半径为 2^{-n} 的球 B_n 使得 $B_n \cap E \neq \emptyset$, 且 B_n 不包含于任何 V_α . 选取 $x_n \in B_n \cap E$; 通过取子列可设 $\{x_n\}$ 收敛于某 $x \in E$. 对某个 α 有 $x \in V_\alpha$, 且因 V_α 是开集, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(\varepsilon, x) \subset V_\alpha$. 但若 n 足够大使得 $\rho(x_n, x) < \varepsilon/3$ 且 $2^{-n} < \varepsilon/3$, 则 $B_n \subset B(\varepsilon, x) \subset V_\alpha$, 与 B_n 的假设矛盾.

(c) $\Rightarrow$ (b): 若 $\{x_n\}$ 是 E 中的序列且无收敛子列, 则对每个 $x \in E$, 存在以 x 为中心的球 B_x 仅含有限多项 x_n (否则某子列收敛于 x). 则 $\{B_x\}_{x \in E}$ 是 E 的开覆盖且无有限子覆盖.

Definition 0.6.13 ▶ 紧的

满足定理 0.25 性质 (a) – (c) 的集合 E 是紧的 (compact), 称为紧集.

Remark

每个紧集是闭集 (由命题 0.24) 且有界, 反之一般不成立.

Proposition 0.6.14

$\mathbb{R}^n$ 中的有界闭子集是紧集.



证明. 因 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集完备, 只需证 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集完全有界. 因每个有界集包含于某立方体

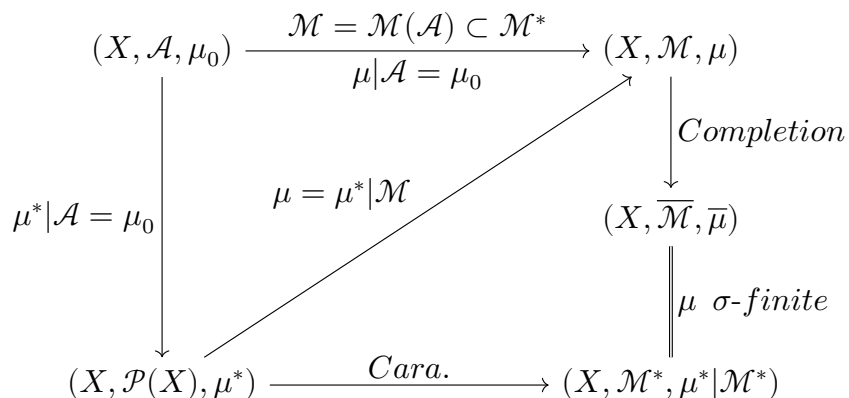
$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq R\},$$

故只需证 Q 完全有界. 给定 $\varepsilon > 0$, 取整数 $k > R\sqrt{n}/\varepsilon$, 并将区间 $[-R, R]$ 分为 k 等份, 从而将 Q 表示为 k^n 个全等子立方体的并, 这些子立方体的边长为 $2R/k$, 故直径为 $\sqrt{n} \cdot (2R/k) < 2\varepsilon$, 因此它们包含于以其中心为球心、半径为 ε 的球中.



测度

本节内容可大致总结为如下图表：



1.1 引言

确定平面或三维空间中区域的面积或体积是几何学中最为古老的问题之一. 理想情况下, 对于 $n \in \mathbb{N}$, 我们希望有一个函数 μ 为每个 $E \in \mathbb{R}^n$ 赋值 $\mu(E) \in [0, \infty]$, 即 E 的 n 维测度. 这样的函数 μ 应该具备以下性质:

(1) 如果 $E_1, E_2, \dots$ 是不相交的有限或无限个集合, 则

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots.$$

(2) 如果 E, F 全等, 则 $\mu(E) = \mu(F)$.

(3) $\mu(Q) = 1$, 其中 $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j < 1, j = 1, \dots, n\}$.

Proposition

不存在函数 $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ 同时满足上述三条性质.

证明. 我们仅讨论 $n = 1$ 的情形, 该论证可自然地拓展到高维情形.

首先, 我们定义 $[0, 1)$ 上的一个等价关系为 $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. 利用选择公理, 令 $N \subset [0, 1)$ 恰好只包含每个等价类中的一个元素. 令 $R = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, 并且对每个 $r \in R$, 令

$$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\} = N^1 \cup N^2,$$



则 $N_r \subset [0, 1)$. 假设存在 $y \in N^1 \cap N^2$, 则存在 $y_1 \in N \cap [0, 1-r)$, $y_2 \in N \cap [1-r, 1)$, 使得 $y_1 + r = y_2 + r - 1$, 也即 $y_2 = y_1 + 1 \geq 1$, 矛盾, 于是 $N^1 \cap N^2 = \emptyset$. 如果 $y \in N, y \sim x$, 则 $x \in N_r$, 其中若 $x \geq y$, 则 $r = x - y$; 若 $x \leq y$, 则 $r = x - y + 1$. 如果存在 $x \in N_r \cap N_s, r \neq s$, 则 $x - r$ (或 $x - r + 1$) 与 $x - s$ (或 $x - s + 1$) 是 N 中属于同一等价类的不同元素, 这与 N 的定义矛盾. 于是 $[0, 1) = \bigcup_{r \in R} N_r$, 其中 $N_r \cap N_s = \emptyset, r \neq s$.

假设 $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ 满足上述三条性质. 由性质 (1)(2) 可得 $\mu(N) = \mu(N \cap [0, 1-r)) + \mu(N \cap [1-r, 1)) = \mu(N_r)$. 因为 R 可数, 并且 $[0, 1)$ 是一族不相交的集合 $\{N_r\}_{r \in R}$ 的并集, 从而由 (3) 可得 $1 = \mu([0, 1)) = \sum_{r \in R} \mu(N_r) = \sum_{r \in R} \mu(N)$, 但最右侧的和式当 $\mu(N) = 0$ 时为 0, 当 $\mu(N) > 0$ 时为 ∞ , 于是假设不成立, 命题得证.

因此, 我们不再要求 μ 必须能够定义在整个 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 上.

1.2 σ -代数

这一节我们将讨论可以作为 μ 的定义域的若干集合的集族.

Definition 1.2.1 ▶ 代数与 σ -代数

令 X 是一个非空集合, X 上的一个代数 (algebra) 是 X 的一个非空的子集族 $\mathcal{A}$, 其对于有限的并集运算和补集运算是封闭的. σ -代数 (σ -algebra) 是对可数的并集运算封闭的代数.

Remark

因为 $\bigcap_j E_j = \left(\bigcup_j E_j^c \right)^c$, 所以代数 (相应地, σ -代数) 对有限的 (相应地, 可数的) 交集运算封闭. 此外, 如果 $\mathcal{A}$ 是一个代数, 则 $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$, 这是因为对于 $E \in \mathcal{A}$ 有 $\emptyset = E \cap E^c, X = E \cup E^c$.

Proposition

代数 $\mathcal{A}$ 如果对于可数个不相交集合并集运算封闭, 那么也是 σ -代数.

证明. 设 $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$. 令

$$F_1 = E_1, \quad F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right) = E_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j^c \right)^c, \quad k > 1.$$

则 $\{F_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ 是一族不相交的集合, 并且 $\bigcup_{j=1}^\infty E_j = \bigcup_{k=1}^\infty F_k \in \mathcal{A}$, 于是 $\mathcal{A}$ 对可数的并集运算封闭, 从而是一个 σ -代数.

**Example**

设 X 为一非空集合, 则 $\mathcal{P}(X), \{X, \emptyset\}$ 均是 σ -代数.

Definition 1.2.2 ▶ 可数集 (或余可数集) 的 σ -代数

设 X 为一不可数集, 则 $\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ 是可数集 (或 } E^c \text{ 是可数集)}\}$ 是一个 σ -代数, 称为可数集 (或余可数集) 的 σ -代数 (σ -algebra of countable (or co-countable) sets).

X 上任意一族 σ -代数的交集仍然是 σ -代数. 如果 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子集, 则存在唯一一个最小的包含 $\mathcal{E}$ 的 σ -代数 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, 即为所有包含 $\mathcal{E}$ 的 σ -代数的交集, 称为由 $\mathcal{E}$ 生成的 σ -代数.

Lemma 1.2.3

如果 $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$, 则 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

证明. $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 是包含 $\mathcal{E}$ 的 σ -代数, 而 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 为所有包含 $\mathcal{E}$ 的 σ -代数的交集, 于是 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

这一引理将在本章中反复使用.

Definition 1.2.4 ▶ Borel σ -代数

如果 X 是一个度量空间, 或者更一般地, 是一个拓扑空间, 由 X 中的所有开集 (等价地, 闭集) 组成的集族生成的 σ -代数称为 X 上的 **Borel σ -代数**, 记为 $\mathcal{B}_X$, 其中的元素称为 Borel 集.

Remark

$\mathcal{B}_X$ 包含开集、闭集、可数个开集的交集、可数个闭集的并集等.

开集的可数交集称为一个 G_δ 集; 闭集的可数并集称为一个 F_σ 集; G_δ 集的可数并集称为一个 $G_{\delta\sigma}$ 集; F_σ 集的可数交集称为一个 $F_{\sigma\delta}$ 集, 以此类推. (σ : 并集; δ : 交集)

Proposition 1.2.5

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 可由下列集族生成:

- 开区间: $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}$,
- 闭区间: $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a < b\}$,
- 半开区间: $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : a < b\}$ 或 $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a < b\}$,
- 开射线: $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ 或 $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
- 闭射线: $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ 或 $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

证明. 一方面, $\mathcal{E}_j (j \neq 3, 4)$ 中的元素均是开集或闭集, 并且 $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ 中的元素均是 G_δ 集, 如



$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$, 因此均是 Borel 集, 由引理 1.1 可得 $\forall j, \mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

另一方面, $\mathbb{R}$ 中的开集是可数个开区间的并集, 由引理 1.1 得 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. 此外, $\forall (a, b) \in \mathcal{E}_1$ 有

$$\begin{aligned} (a, b) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b) \\ &= (a, \infty) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, \infty) = (-\infty, b) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{n}) \\ &= (-\infty, a]^c \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n}]^c = [b, \infty)^c \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, \infty)^c. \end{aligned}$$

由于 $a < b$, 且初始的有限个集合不影响整个运算结果, 我们设上述过程中所有的区间均满足左端点小于右端点. 于是由 σ -代数的性质可知, $\forall j, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. 综上, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{M}(\mathcal{E}_j), j = 1, \dots, 8$.

Definition 1.2.6 ▶ 乘积 σ -代数

令 $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ 是一族非空集合, $X = \prod_{\alpha \in A} X_{\alpha}$, 并且 $\pi_{\alpha} : X \rightarrow X_{\alpha}$ 是坐标映射. 如果对每个 $\alpha \in A$, $\mathcal{M}_{\alpha}$ 是 X_{α} 上的一个 σ -代数, 则 X 上的乘积 σ -代数 (product σ -algebra) 是由 $\{\pi_{\alpha}^{-1}(E_{\alpha}) : E_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha}, \alpha \in A\}$ 生成的 σ -代数, 记为 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_{\alpha}$.

Remark

定义中给定 $\alpha \in A$, 需要取遍 $\mathcal{M}_{\alpha}$ 中的所有元素而非只取一个.

Proposition 1.2.7

如果 A 是可数集, 则 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_{\alpha}$ 是由 $\left\{ \prod_{\alpha \in A} E_{\alpha} : E_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha} \right\}$ 生成的 σ -代数.

证明. 记 $\{\pi_{\alpha}^{-1}(E_{\alpha}) : E_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha}, \alpha \in A\} = \mathcal{E}_1, \left\{ \prod_{\alpha \in A} E_{\alpha} : E_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha} \right\} = \mathcal{E}_2$. 一方面, 若 $E_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha}$, 则 $\pi_{\alpha}^{-1}(E_{\alpha}) = \prod_{\beta \in A} E_{\beta}$, 其中 $\forall \beta \neq \alpha, E_{\beta} = X_{\beta}$, 于是 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$. 另一方面, 由 A 的可数性得 $\prod_{\alpha \in A} E_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_{\alpha}^{-1}(E_{\alpha}) \in \mathcal{E}_1$, 于是 $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. 由定理 1.1 可得 $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{M}(\mathcal{E}_2)$.

**Proposition 1.2.8**

设对每个 $\alpha \in A$, $\mathcal{M}_\alpha$ 由 $\mathcal{E}_\alpha$ 生成, 则 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ 由 $\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A\}$ 生成. 如果 A 可数, 并且 $\forall \alpha \in A, X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, 则 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ 由 $\mathcal{F}_2 = \left\{ \prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \right\}$ 生成.

证明. 一方面, 由于 $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{M}_\alpha$, 故有 $\mathcal{F}_1 \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$, 再由引理 1.1 可得 $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. 另一方面, 对每个 $\alpha \in A$, 考虑集合 $\{E \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\}$, 取该集合中可数个元素 $\{E_i\}_{i \in I}$ (I 是可数集), 则 $\pi_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi_\alpha^{-1}(E_i) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, $\pi_\alpha^{-1}(E_i^c) = (\pi_\alpha^{-1}(E_i))^c \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, 于是该集合为 σ -代数. 又由于 $\mathcal{E}_\alpha \subset X_\alpha$, 并且 $\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{E}_\alpha) \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, 于是该集合包含 $\mathcal{E}_\alpha$, 从而根据引理 1.1 可知也包含 $\mathcal{M}_\alpha$. 也就是说, 对任意 $\alpha \in A$ 以及 $E \in \mathcal{M}_\alpha$, $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, 于是由引理 1.1 与乘积 σ -代数的定义可知 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. 综上有 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$.

一方面, 若 $E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, 则 $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta \in A} E_\beta$, 其中 $\forall \beta \neq \alpha, E_\beta = X$, 于是 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_2)$. 另一方面, $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$, 于是 $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. 由定理 1.1 可得 $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{M}(\mathcal{F}_2)$.

Proposition 1.2.9

令 $X_1, \dots, X_n$ 是度量空间, $X = \prod_{j=1}^n X_j$ 配备了乘积测度, 则 $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. 如果 X_j 均是可分的, 则 $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.

证明. 由命题 1.4 可知, $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j}$ 由集族 $\{\pi_j^{-1}(U_j) : U_j \subset X_j, U_j \text{ 是开集}, 1 \leq j \leq n\}$ 生成. 集族内的元素均是 X 中的开集, 因此由引理 1.1 可得 $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$.

设对于每个 $j = 1, \dots, n$, C_j 是 X_j 的一个可数稠密子集, 并设 $\mathcal{E}_j$ 是 X_j 内的球心在 C_j 上、半径为有理数的所有球组成的集合, 则 $\mathcal{E}_j$ 是可数的. 设 U 是 X_j 中的开集, 任取 $x \in U$, 则存在 $\varepsilon_x > 0$ 使得 $B(\varepsilon_x, x) \subset U$. 由实数集的稠密性, 我们可以选取 $(0, \varepsilon_x/2)$ 中的一个有理数 q_x , 再由 C_j 是稠密子集可知 $B(q_x, x) \cap C_j \neq \emptyset$, 于是在此交集中取一元素 c_x , 可得 $\rho_j(x, c_x) < q$, 从而有 $x \in B(q_x, c_x)$. 任取 $y \in B(q_x, c_x)$, 则 $\rho_j(y, x) \leq \rho_j(y, c_x) + \rho_j(c_x, x) < 2q_x < \varepsilon_x$, 于是可得 $B(q_x, c_x) \subset B(\varepsilon_x, x) \subset U$. 由任意性可得 $U \subset \bigcup_{x \in U} B(q_x, c_x)$, 从而 $U = \bigcup_{x \in U} B(q_x, c_x)$. 由于 $\mathcal{E}_j$ 是可数的, 将右侧式子中所有相同的集合合并, 结合 U 的任意性可得 X_j 中的每个开集都是 $\mathcal{E}_j$ 中可数个元素的并集.

由引理 1.1 可得每个 $\mathcal{B}_{X_j}$ 由 $\mathcal{E}_j$ 生成, 又由乘积度量可知 X 中半径为 r 的球是每个 X_j 中半径为 r 的球的乘积, 因此 $\mathcal{B}_X$ 由集族 $\left\{ \prod_{j=1}^n E_j : E_j \in \mathcal{E}_j \right\}$ 生成, 由命题 1.4 可得 $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.

**Corollary 1.2.10**

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Definition 1.2.11 ▶ 基本集

X 的一个子集族 $\mathcal{E}$ 称为**基本集 (elementary family)**, 如果满足

- $\emptyset \in \mathcal{E}$,
- 如果 $E, F \in \mathcal{E}$, 则 $E \cap F \in \mathcal{E}$,
- 如果 $E \in \mathcal{E}$, 则 E^c 为 $\mathcal{E}$ 中有限个不相交元素的并集.

Proposition 1.2.12

如果 $\mathcal{E}$ 是一个基本集, 则 $\mathcal{E}$ 中有限个不相交元素的并集组成的集合 $\mathcal{A}$ 是一个代数.

证明. 如果 $A, B \in \mathcal{E}$, $B^c = \bigcup_{j=1}^J C_j$, 其中 $C_j \in \mathcal{E}, j = 1, \dots, J$ 且互不相交, 则 $A \setminus B = \bigcup_{j=1}^J (A \cap C_j)$, $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, 于是 $A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{A}$. 由归纳假设, 令 $A_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{E}$ 互不相交, 于是 $\bigcup_{j=1}^n A_j = A_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} (A_j \setminus A_n) \in \mathcal{A}$, 从而 $\mathcal{A}$ 对有限的并集运算封闭.

设 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, 并且对于 $m = 1, \dots, n$, $A_m^c = \bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j$, 其中 $B_m^1, \dots, B_m^{J_m} \in \mathcal{E}$ 互不相交. 于是有

$$\left(\bigcup_{m=1}^n A_m \right)^c = \bigcap_{m=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j \right) = \bigcup \{ B_1^{j_1} \cap \dots \cap B_n^{j_n} : 1 \leq j_m \leq J_m, 1 \leq m \leq n \} \in \mathcal{A}.$$

综上, $\mathcal{A}$ 是一个代数.

1.3 测度

Definition 1.3.1 ▶ 测度与有限可加测度

令 X 是一个配备了 σ -代数 $\mathcal{M}$ 的集合, $(X, \mathcal{M})$ 上的**测度 (measure)** 是一个函数 $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 满足

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) 如果 $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $\mathcal{M}$ 中一系列不相交的集合, 则 $\mu \left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j \right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$.

性质 (2) 称为可数可加性, 其蕴含有限可加性:

(2') 如果 $E_1, \dots, E_n$ 是 $\mathcal{M}$ 中互不相交的集合, 则 $\mu \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j)$.

只需在 (2) 中取 $E_j = \emptyset, j > n$. 满足性质 (1)(2') 但不一定满足性质 (2) 的函数 μ 称为**有限可加**



测度 (finitely additive measure).

Definition 1.3.2 ▶ 可测空间、可测集与测度空间

如果 X 是一个集合, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ 是一个 σ -代数, 则 $(X, \mathcal{M})$ 称为一个可测空间 (measurable space), $\mathcal{M}$ 中的元素称为可测集 (measurable set). 如果 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个测度, 则 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 称为一个测度空间 (measure space).

Definition 1.3.3 ▶ 有限、 σ -有限与半有限

令 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为一测度空间. 如果 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 是有限 (finite) 的. 如果 $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中 $\forall j, E_j \in \mathcal{M}$ 且 $\mu(E_j) < \infty$, 则称 μ 是 σ -有限 (σ -finite) 的. 更一般地, 如果 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中 $\forall j, E_j \in \mathcal{M}$ 且 $\mu(E_j) < \infty$, 则称 E 关于 μ 是 σ -有限的. 如果对每个满足 $\mu(E) = \infty$ 的集合 $E \in \mathcal{M}$, 总存在 $F \in \mathcal{M}, F \subset E$ 使得 $0 < \mu(F) < \infty$, 则称 μ 是半有限 (semifinite) 的.

Remark

$\mu(X) < \infty$ 蕴含 $\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \infty$, 因为 $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c)$.

Proposition

每个 σ -有限测度是半有限的.

证明. 设 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个 σ -有限测度, 于是存在一族集合 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $\forall j, E_j \in \mathcal{M}, \mu(E_j) < \infty$, 并且 $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. 不妨设 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 互不相交, 否则取 $E'_1 = E_1, E'_j = E_j \setminus (\bigcup_{k=1}^{j-1} E_k), j \geq 2$, 从而 $\{E'_j\}_{j=1}^{\infty}$ 也满足上述性质. 设 $F \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(F) = \infty$, 则 $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} (F \cap E_j)$, 由可数可加性得 $\mu(F) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap F)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap F) = \infty$, 于是至少存在某个 $E_{j_0} \cap F \subset F$ 满足 $0 < \mu(E_{j_0} \cap F) \leq \mu(E_{j_0}) < \infty$, 从而 μ 是半有限的.

Proposition

令 X 为一非空集合, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, 并且 f 是从 X 到 $[0, \infty]$ 的任意一个函数, 则 f 通过 $\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$ 确定了 $\mathcal{M}$ 上的一个测度 μ . 于是

- (1) μ 是半有限的 $\Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) < \infty$,
- (2) μ 是 σ -有限的 $\Leftrightarrow \mu$ 是半有限的且 $\{x : f(x) > 0\}$ 是可数的.



证明. (1) $\Leftarrow$: 对每个满足 $\mu(I) = \infty$ 的集合 $I \in \mathcal{M}$, 可知 $I \neq \emptyset$, 因此存在 $\{x_0\} \subset I \in \mathcal{M}$ 满足 $0 < \mu(\{x_0\}) = f(x_0) < \infty$, 从而 μ 是半有限的.

$\Rightarrow$: 如果存在 $x_1 \in X$ 使得 $f(x_1) = \infty$, 则 $\mu(\{x_1\}) = f(x_1) = \infty$, 于是不存在 $F \subset \{x_1\} \in \mathcal{M}$ 使得 $0 < \mu(F) < \infty$, 从而 μ 不是半有限的.

(2) $\Rightarrow$: 记 $S = \{x : f(x) > 0\}$. 一方面, 如果 μ 是 σ -有限的, 也就是说, 存在一族互不相交 (见前一命题证明过程) 的集合 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $\forall j, E_j \in \mathcal{M}, \mu(E_j) < \infty$, 并且 $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. 由前一命题可知 μ 是半有限的. 由于 $S \subset X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 于是对每个 $x \in S$, 存在某个 j 使得 $x \in E_j$. 假设存在 $E_j \cap S$ 不可数, 则由命题 0.20 得 $\mu(E_j) = \sum_{x \in E_j} f(x) = \sum_{x \in E_j \cap S} f(x) = \infty$, 矛盾. 于是 $\forall j, E_j \cap S$ 可数, 从而由命题 0.10(b) 可知 S 是可数的.

$\Leftarrow$: 由 (1) 可知 $\forall x \in S, \mu(\{x\}) < \infty$, 并且若 $x \in S^c$, 则 $f(x) = 0$, 从而 $\mu(S^c) = 0$. 由于 $X = \left(\bigcup_{x \in S} \{x\}\right) \cup S^c$, 于是 μ 是 σ -有限的.

Remark

该命题有两个特殊情况: 如果 $\forall x \in X, f(x) = 1$, 则称 μ 是一个计数测度; 如果对某个 $x_0 \in X$, 定义 f 在 x_0 处取 1, 其余点处均为 0, 则称 μ 为在 x_0 处的点质量或狄拉克测度.

Example

令 X 是一个不可数集, $\mathcal{M}$ 是其上的一个可数集或余可数集的 σ -代数. $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 定义为

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E \text{ 是可数集,} \\ 1 & E \text{ 是余可数集.} \end{cases}$$

于是 μ 是一个测度.

令 X 是一个无限集, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. 定义 $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 为

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E \text{ 是有限集,} \\ \infty & E \text{ 是无限集.} \end{cases}$$

于是 μ 是一个有限可加测度, 但不是测度.

以下是测度的一些基本性质:

Theorem 1.3.4

令 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间.

a. (单调性) 如果 $E, F \in \mathcal{M}$ 且 $E \subset F$, 则 $\mu(E) \leq \mu(F)$.



- b. (次可加性) 如果 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, 则 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.
- c. (下连续性) 如果 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ 且 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, 则 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$.
- d. (上连续性) 如果 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ 且 $\mu(E_1) < \infty$, 则 $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$.

证明. (a): 如果 $E \subset F$, 则 $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

(b): 令 $F_1 = E_1, F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right), k \geq 2$, 则 $F_k, k \geq 1$ 互不相交, 并且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 从而由 (a) 可得

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

(c): 设 $E_0 = \emptyset$, 则有

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

(d): 令 $F_j = E_1 \setminus E_j, j \geq 1$, 于是 $F_1 \subset F_2 \subset \dots, \mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$, 并且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = E_1 \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)$. 由 (c) 可得

$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(E_1) - \mu(E_j)).$$

由于 $\mu(E_1) < \infty$, 等式两边减去 $\mu(E_1)$ 即得结论.

Remark

这一定理中 (d) 的条件 $\mu(E_1) < \infty$ 可减弱为对某个 $n \geq 1$ 有 $\mu(E_n) < \infty$, 这是因为当 $n > 1$ 时, 舍弃初始的 $n-1$ 个集合不会影响交集的结果. 然而, 有限性假设不可忽略, 因为可能会出现 $\forall j, \mu(E_j) = \infty$, 但 $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) < \infty$ 的情况. 例如, 令 μ 是 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上的一个计数测度, $E_j = \{n : n \geq j\}$, 但 $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu(\emptyset) = 0$

Definition 1.3.5 ▶ 零测集与几乎处处

令 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间. 如果一个集合 $E \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(E) = 0$, 则称其为一个零测集 (null set). 如果一个关于 $x \in X$ 的陈述在除去某个零测集外均成立, 我们称其是几乎处处 (almost



everywhere, a.e.) 成立的 (更准确地说, μ -零测集与 μ -几乎处处).

如果 $\mu(E) = 0, F \subset E$, 则由单调性可从 $F \in \mathcal{M}$ 得出 $\mu(F) = 0$, 然而一般并不一定有 $F \in \mathcal{M}$, 由此需要引入完备测度这一概念.

Definition 1.3.6 ▶ 完备 (测度)

如果一个测度的定义域包含零测集的所有子集, 称这一测度是完备 (complete) 的.

Theorem 1.3.7

令 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$, 并且 $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, \text{存在 } N \in \mathcal{N} \text{ 使得 } F \subset N\}$. 则 $\overline{\mathcal{M}}$ 是一个 σ -代数, 并且存在唯一的延拓 $\bar{\mu}$, 将 μ 延拓为 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的一个完备测度.

证明. 由定义可知 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 对可数的并集运算封闭, 故 $\overline{\mathcal{M}}$ 也如此. 若 $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, 其中 $E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}$, 不妨设 $E \cap F = \emptyset$, 否则用 $F \setminus E, N \setminus E$ 代替 F, N (下列所有过程均遵循此假设). 于是 $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$, $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$. 由于 $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}, N \setminus F \subset N$, 因此 $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. 综上, $\overline{\mathcal{M}}$ 是一个 σ -代数.

我们令 $\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. 这是一个良定义, 因为若 $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, 其中 $F_i \subset N_i \in \mathcal{N}, i = 1, 2$, 则 $E_1 \subset E_2 \cup N_2, \mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$, 同理可得 $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$, 于是 $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. 设集合 $A \in \overline{\mathcal{M}}$ 满足 $\bar{\mu}(A) = 0$, 则 $A = E \cup F$, 其中 $E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}$. 因为 $\bar{\mu}(A) = \mu(E) = 0$, 所以 $E \in \mathcal{N}$. 注意到 $A = E \cup F \subset E \cup N$. 因为 $E, N \in \mathcal{N}$ 且 $\mathcal{N}$ 对有限并封闭, 所以 $E \cup N \in \mathcal{N}$. 对任意 $B \subset A$, 我们有 $B \subset E \cup N \in \mathcal{N}$. 将 B 写为 $B = \emptyset \cup B$, 其中 $\emptyset \in \mathcal{M}$, 且 B 包含于 $\mathcal{M}$ 中的零测集 $E \cup N$ 中, 从而由定义可得 $B \in \overline{\mathcal{M}}$. 这证明了 $\bar{\mu}$ 是完备的, 存在性得证.

假设存在另一在 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的由 μ 延拓得到的完备测度 ν , 则 $\mu|_{\mathcal{M}} = \nu|_{\mathcal{M}}$. 对任意 $A = E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, 其中 $E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}$, 则 $\nu(A) = \nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F) = \mu(E) = \bar{\mu}(E \cup F) = \bar{\mu}(A)$, 于是 $\nu = \bar{\mu}$. 综上, 唯一性得证.

Remark

测度 $\bar{\mu}$ 称为 μ 的完备化, $\overline{\mathcal{M}}$ 称为 $\mathcal{M}$ 关于 μ 的完备化.

1.4 外测度

Definition 1.4.1 ▶ 外测度

非空集合 X 上的一个外测度 (outer measure) 是一个函数 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, 满足

- $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- 如果 $A \subset B$, 则 $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,



$$\bullet \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

获得外测度的最为常见的方法是从定义测度概念的“基本集合”的集族 $\mathcal{E}$ 开始 (例如平面上的矩形), 然后通过 $\mathcal{E}$ 中的元素的可数并集“从外部”逼近任意集合.

Proposition 1.4.2

令 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$, 满足 $\emptyset, X \in \mathcal{E}$, $\rho(\emptyset) = 0$. 对任意 $A \in \mathcal{P}(X)$, 定义

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

则 μ^* 是一个外测度.

证明. 对任意 $A \in \mathcal{P}(X)$, 一定存在 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ 使得 $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ($\forall j$, 取 $E_j = X$), 因此 μ^* 的定义是合理的.

对于 $A = \emptyset$, 取 $E_j = \emptyset, \forall j$ 可得 $\mu^*(\emptyset) = 0$. 如果 $A \subset B$, 那么 $\mu^*(B)$ 的定义中满足条件的集族的并 $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ 也满足 $\mu^*(A)$ 的定义中的条件, 因此由下确界性质可知 $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

设 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$, $\varepsilon > 0$, 根据下确界的性质, 对每个 A_j 都存在 $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ 使得 $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$, 并且 $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon$. 令 $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, 则 $A \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ 且 $\mu^*(A) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon$, 再由 ε 的任意性可得 $\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

综上, μ^* 是一个外测度.

Definition 1.4.3 μ^* -可测

设 μ^* 是 X 上的一个外测度, 集合 $A \subset X$ 称为 μ^* -可测 (μ^* -measurable) 的, 如果 $\forall E \subset X$,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Remark

由外测度定义可得 $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, 并且如果 $\mu^*(E) = \infty$, 显然有 $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, 因此 A 是 μ^* -可测的当且仅当对任意满足 $\mu^*(E) < \infty$ 的集合 $E \subset X$ 有

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

**Theorem 1.4.4 ▶ Carathéodory 定理**

如果 μ^* 是 X 上的一个外测度, 则所有 μ^* -可测集合的族 $\mathcal{M}^*$ 是一个 σ -代数, 并且 μ^* 在 $\mathcal{M}^*$ 上的限制是一个完备测度.

证明. 由于 μ^* 可测的定义关于 A 和 A^c 是对称的, 因此 $\mathcal{M}^*$ 对补集运算封闭.

令 $A, B \in \mathcal{M}^*, E \subset X$, 则

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c).\end{aligned}$$

而 $A \cup B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$, 于是由次可加性得

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

由定义得 $A \cup B \in \mathcal{M}^*$, 因此由归纳法可得 $\mathcal{M}^*$ 是一个代数.

设 $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $\mathcal{M}^*$ 中的一列互不相交的集合, 令 $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{M}^*, B = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. 则对任意 $E \subset X$,

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),\end{aligned}$$

归纳可得 $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$, 因此有

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B_n^c),$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即得

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty (E \cap A_j)\right) + \mu^*(E \cap B^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E),\end{aligned}$$

于是 $B = \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}^*$, 从而 $\mathcal{M}^*$ 是 σ -代数, 并且取 $E = B$ 可得 $\mu^*(B) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j)$, 因此 μ^* 在 $\mathcal{M}^*$ 上是可数可加的, 从而在其限制上是一个测度.

若 A 是 $\mathcal{M}^*$ 中某个零测集的子集, 则 $\mu^*(A) = 0$, 从而 $\forall E \subset X$ 有

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$



于是 $A \in \mathcal{M}^*$. 综上, $\mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ 是一个完备测度.

Carathéodory 定理的一个应用是将测度从代数拓展到 σ -代数上.

Definition 1.4.5 ▶ 预测度

令 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 是一个代数, 函数 $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ 称为一个**预测度 (premeasure)**, 满足

- $\mu_0(\emptyset) = 0$,
- 如果 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一列互不相交的集合, 并且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, 则 $\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$.

Remark

预测度是有限可加的, 只需对于充分大的 j 令 $A_j = \emptyset$ 即得结论.

如果 μ_0 是 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 上的一个预测度, 根据命题 1.10, 其可诱导出 X 上的一个外测度, 即

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}. \quad (1.12)$$

Proposition 1.4.13

如果 μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度, 并且 μ^* 由式 (1.12) 所定义, 则

- $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$,
- $\mathcal{A}$ 中所有元素都是 μ^* -可测的.

证明. (a): 令 $E \in \mathcal{A}$, $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, 其中 $\forall j, A_j \in \mathcal{A}$, 令 $B_n = E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right)$, 则 $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一列互不相交的集合, 并且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = E$, 于是 $\mu_0(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$, 因此 $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$. 取 $A_1 = E, A_j = \emptyset, j \geq 2$, 则由定义可得 $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$, 于是 $\mu^*(E) = \mu_0(E)$.
(b): 对任意的 $A \in \mathcal{A}, E \in X, \varepsilon > 0$, 存在一列集合 $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ 满足 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$, 再由预测度定义可知 $\forall j, \mu_0(B_j) = \mu_0(B_j \cap A) + \mu_0(B_j \cap A^c)$, 从而得到

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

由于 ε 是任意的, 故 A 是 μ^* -可测的.

**Theorem 1.4.14**

设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 是一个代数, μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度, $\mathcal{M}$ 是由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ -代数. 则 $\mathcal{M}$ 上存在一个测度 μ , 其在 $\mathcal{A}$ 上的限制为 μ_0 , 也即 $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, 其中 μ^* 由式 (1.12) 给定. 如果 ν 是 $\mathcal{M}$ 上另一个延拓 μ_0 得到的测度, 则 $\forall E \in \mathcal{M}, \nu(E) \leq \mu(E)$, 当 $\mu(E) < \infty$ 时取等号. 如果 μ_0 是 σ -有限的, 则 μ_0 可唯一延拓为 $\mathcal{M}$ 上的一个测度 μ .

证明. μ_0 可诱导出 X 上的一个外测度 μ^* , 定义同式 (1.12). 由命题 1.13 可得 $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$, 并且 $\mathcal{A}$ 中所有元素都是 μ^* -可测的. 由 Carathéodory 定理可得, 所有 μ^* -可测集合的集族 $\mathcal{M}_{\mu^*}$ 是一个包含 $\mathcal{A}$ 的 σ -代数, 从而也包含 $\mathcal{M}$, 并且 $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ 是一个完备测度. 由于 $\mu^*|_{\mathcal{M}} = (\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})|_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ 是一个 σ -代数, 于是 $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 依旧满足可数可加性, 并且 $\mu(\emptyset) = 0$, 故 μ 是 $\mathcal{M}$ 上的一个测度. 此外, $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \mu^*(A) = \mu_0(A)$, 综上, 第一个命题成立.

对任意的 $E \in \mathcal{M}$ 且 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, 其中 $\forall j, A_j \in \mathcal{A}$, 则 $\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$, 再由下确界性质及 $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 可得 $\nu(E) \leq \mu(E)$. 如果令 $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, 则由下连续性可得

$$\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \mu(A).$$

如果 $\mu(E) < \infty, \forall \varepsilon > 0$, 我们可通过选择适当的 A_j 使得 $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$, 也即 $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$, 于是 $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$, 并且有

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) < \nu(E) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可得 $\mu(E) \leq \nu(E)$, 于是 $\mu(E) = \nu(E)$.

令 $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, 其中 $\forall j, \mu_0(A_j) < \infty$, 不妨假设 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ 互不相交, 则 $\forall E \in \mathcal{M}$ 有

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap A_j) = \nu(E).$$

于是 $\nu = \mu$, 唯一性得证.

Proposition ▶ 习题 18

设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 为代数, $\mathcal{A}_{\sigma}$ 是 $\mathcal{A}$ 中集合的可数并集构成的集族, $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 是 $\mathcal{A}_{\sigma}$ 中集合的可数交集构成的集族. 设 μ_0 是 $\mathcal{A}$ 上的预测度, μ^* 是诱导的外测度.

- 对任意 $E \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $A \in \mathcal{A}_{\sigma}$ 满足 $E \subset A$ 且 $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.
- 若 μ_0 是 σ -有限的, 则 E 是 μ^* -可测的当且仅当存在 $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 满足 $E \subset B$ 且 $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

证明. (a): 根据外测度的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一系列集合 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ 使得 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 且



$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. 令 $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. 显然 $A \in \mathcal{A}_\sigma$ 且 $E \subset A$. 根据 μ^* 的定义和次可加性, 我们有

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

(b): 先证充分性. 由 $\mu^*(B \setminus E) = 0$ 可得 $B \setminus E \in \mathcal{M}^*$. 由于 $B = E \cup (B \setminus E)$, 因此 $E = B \cap (B \setminus E)^c$. 由定理 1.11 可知 $\mathcal{M}^*$ 是 σ -代数, 再由命题 1.13 可得 $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}^*$, 从而 $E \in \mathcal{M}^*$.

再证必要性. 设 $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, 其中 $X_j \in \mathcal{A}, \mu_0(X_j) < \infty, \forall j \geq 1$, 于是对于 $E \subset \mathcal{M}^*$, 我们有

$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap X_j) := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 因此 $E_j \in \mathcal{M}^*$ 且 $\mu^*(E_j) = \mu_0(E_j) \leq \mu_0(X_j) < \infty$. 固定 $k \in \mathbb{N}$, 对

每个 E_j , 存在 $C_k^{(j)} \in \mathcal{A}_\sigma$ 使得 $E_j \subset C_k^{(j)}, \mu^*(E_j) \leq \mu^*(C_k^{(j)}) + \frac{1}{k \cdot 2^j}$. 由于

$$\mu^*(C_k^{(j)}) = \mu^*(C_k^{(j)} \cap E_j) + \mu^*(C_k^{(j)} \cap E_j^c) = \mu^*(E_j) + \mu^*(C_k^{(j)} \cap E_j^c)$$

于是由 $\mu^*(E_j) < \infty$ 可得 $\mu^*(C_k^{(j)} \cap E_j^c) \leq \frac{1}{k \cdot 2^j}$. 再由 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_k^{(j)} := B_k$ 可得

$$\begin{aligned} \mu^*(B_k \setminus E) &= \mu^*\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_k^{(j)}\right) \cap E^c\right) \\ &\leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (C_k^{(j)} \cap E_j^c)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_k^{(j)} \cap E_j^c) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^j} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

令 $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, 则有 $\mu^*(B \setminus E) \leq \frac{1}{k}$, 令 $k \rightarrow \infty$ 即得结论.

Proposition ▶ 习题 22(a)

设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为测度空间, μ^* 是按 (1.12) 式由 μ 诱导的外测度, $\mathcal{M}^*$ 是 μ^* -可测集的 σ -代数, $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$. 若 μ 是 σ -有限的, 则 $\bar{\mu}$ 是 μ 的完备化.

证明. 记 μ 的完备化为 $\hat{\mu}$, $\mathcal{M}$ 关于 μ 的完备化为 $\hat{\mathcal{M}}$, 因此需要证明 $\bar{\mu} = \hat{\mu}$, 再由命题 1.14 可知只要证明 $\mathcal{M}^* = \hat{\mathcal{M}}$.

一方面, 选取 $E \cup F \in \hat{\mathcal{M}}$, 其中 $E \in \mathcal{M}, F \subset N, \mu(N) = 0$, 则 $\mu^*(N) = 0$, 也即 $N \in \mathcal{M}^*$, 又由命题 1.13 可得 $E \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$, 于是 $E \cup F \in \mathcal{M}^*$, 从而 $\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^*$. 另一方面, 任取 $E \in \mathcal{M}^*$, 则 $E^c \in \mathcal{M}^*$, 于是由习题 18(b) 可得存在 $B^c \in \mathcal{M}$ 使得 $E^c \subset B^c, B \subset E$, 且 $\mu^*(B^c \setminus E^c) = \mu^*(E \setminus B) = 0$. 由



习题 18(a) 可得, 固定 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $A_k \in \mathcal{M}$ 使得 $E \setminus B \subset A_k$ 且 $\mu^*(A_k) \leq \mu^*(E \setminus B) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$. 记 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$, 则 $E \setminus B \subset A$, 因此 $0 = \mu^*(E \setminus B) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(A_k) \leq \frac{1}{k}$. 令 $k \rightarrow \infty$ 即得 $\mu^*(A) = 0$, 再由 $A \in \mathcal{M}$ 可得 $\mu(A) = 0$. 于是 $E \setminus B$ 是 $\mathcal{M}$ 中的零测集的子集, 再由 $E = B \cup (E \setminus B)$ 可得 $E \in \hat{\mathcal{M}}$, 从而 $\mathcal{M}^* \subset \hat{\mathcal{M}}$. 综上, $\mathcal{M}^* = \hat{\mathcal{M}}$.

1.5 实直线上的 Borel 测度

基于区间的测度是其长度这一想法, 我们可以构建一个理论来测量 $\mathbb{R}$ 的子集, 从一个更一般的构造开始.

Definition 1.5.1 ▶ Borel 测度

如果 $\mathbb{R}$ 上的一个测度的定义域是 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, 则称其为 $\mathbb{R}$ 上的 **Borel 测度 (Borel measure)**.

设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个有限 Borel 测度, 并令 $F(x) = \mu((-\infty, x])$ (F 有时被称为 μ 的分布函数). 通过定理 1.8(a) 可知 F 递增, 并且通过定理 1.8(d) 可知 F 右连续, 这是因为 $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]$, 其中 $x_n \searrow x$. 此外, 如果 $b > a$, 则 $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$, 于是 $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. 我们的步骤是倒转这个过程, 从一个递增的右连续函数 F 开始构建一个测度. 特别地, $F(x) = x$ 将产生通常意义上的“长度”测度.

这一理论的构建模块是 $\mathbb{R}$ 中的左开右闭区间, 即形如 $(a, b], (a, \infty)$ 或 $\emptyset$ 的集合, 其中 $-\infty \leq a < b < \infty$. 我们将此类集合称为 h -区间 (h 代表“半开 (half-open)”). 显然两个 h -区间的交集是 h -区间, 以及 h -区间的补集是 h -区间或两个不相交的 h -区间的并. 根据命题 1.7, 有限个不相交的 h -区间的并集组成的集族 $\mathcal{A}$ 是一个代数, 并且由命题 1.2 可知, 由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ -代数为 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Proposition 1.5.2

令函数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 递增且右连续. 若 $(a_j, b_j] (j = 1, \dots, n)$ 是互不相交的 h -区间, 令

$$\mu_0 \left(\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j] \right) = \sum_{j=1}^n (F(b_j) - F(a_j)),$$

且 $\mu_0(\emptyset) = 0$, 则 μ_0 是代数 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度.

证明. 首先需要证明 μ_0 是良定义的, 因为 $\mathcal{A}$ 中的元素可通过不止一种方式表示为不相交的 h -区间的并集. 如果 $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^n$ 互不相交, 且 $\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j] = (a, b]$, 则可通过重新标注索引 j 使得 $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots < b_n = b$, 于是 $\sum_{j=1}^n (F(b_j) - F(a_j)) = F(b) - F(a)$. 更一般地, 如果 $\{I_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{J_j\}_{j=1}^m$ 是有限个互不相交的 h -区间的序列, 并且 $\bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{j=1}^m J_j$, 则



$\sum_i \mu_0(I_i) = \sum_{i,j} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_0(J_j)$, 因此 μ_0 是良定义的.

设 $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ 是互不相交的 h -区间的序列, 并且 $\bigcup_{j=1}^\infty I_j \in \mathcal{A}$, 则 $\bigcup_{j=1}^\infty I_j$ 等于有限个不相交的 h -区间的并集, 于是 $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ 可分为有限多个子列, 使得每个子列中区间的并集是单个 h -区间. 分别考虑每个子列并利用 μ_0 的有限可加性, 不妨直接假设 $\bigcup_{j=1}^\infty I_j$ 是一个 h -区间 $I = (a, b]$. 在这种情况下, 我们有

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right) + \mu_0\left(I \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_0(I_j).$$

令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $\mu_0(I) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu_0(I_j)$.

为证明反向不等式, 首先假设 a, b 是有限的, 并给定 $\varepsilon > 0$. 由于 F 是右连续的, 于是存在 $\delta > 0$ 使得 $F(a + \delta) - F(a) < \varepsilon$, 并且若 $I_j = (a_j, b_j]$, 则对于每个 j 都存在 $\delta_j > 0$ 使得 $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < 2^{-j}\varepsilon$. 由于开集族 $\{(a_j, b_j + \delta_j)\}_{j=1}^\infty$ 覆盖紧集 $[a + \delta, b]$, 则存在一个有限子覆盖. 通过舍弃包含在更大的区间内的区间 $(a_j, b_j + \delta_j)$ 并重新标注索引 j , 我们有

- 区间 $(a_j, b_j + \delta_j), j = 1, \dots, N$ 覆盖 $[a + \delta, b]$,
- 对每个 $j = 1, \dots, N-1$ 有 $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1})$.

于是有

$$\begin{aligned} \mu_0(I) &< F(b) - F(a + \delta) + \varepsilon \\ &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\ &= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} (F(a_{j+1}) - F(a_j)) + \varepsilon \\ &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} (F(b_j + \delta_j) - F(a_j)) + \varepsilon \\ &< \sum_{j=1}^N (F(b_j) + 2^{-j}\varepsilon - F(a_j)) + \varepsilon \\ &< \sum_{j=1}^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得 $\mu_0(I) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu_0(I_j)$. 若 $a = -\infty$, 则对每个 $0 < M < \infty$, 区间 $\{(a_j, b_j + \delta_j)\}_{j=1}^\infty$ 覆盖 $[-M, b]$, 于是由上述过程可得 $F(b) - F(-M) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon$; 同理, 若 $b = \infty$, 则有 $F(M) - F(a) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$, 即得反向不等式. 综上, $\mu_0(I) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(I_j)$, 即得结论.



Proposition 1.5.3

如果函数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 递增且右连续, 则 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的 Borel 测度 μ_F 使得 $\forall a, b \in \mathbb{R}, \mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$. 如果 G 是另一满足条件的函数, 则 $\mu_F = \mu_G \Leftrightarrow F - G$ 为常数. 相反地, 如果 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 Borel 测度, 并且在所有有界 Borel 集上有限, 我们定义

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -\mu((-x, 0]) & x < 0, \end{cases}$$

则 F 递增且右连续, 并且 $\mu = \mu_F$.

证明. 由命题 1.15 可知, 每个 F 可诱导出 $\mathcal{A}$ 上的一个预测度 μ_0 , 并且 F, G 诱导出相同预测度 $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, F(b) - G(b) = F(a) - G(a) \Leftrightarrow F - G$ 为常数. 由于 $\mathbb{R} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (j, j+1]$, 于是该预测度是 σ -有限的, 从而由命题 1.14 可得 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的 Borel 测度 μ_F 满足 $\mu_F|_{\mathcal{A}} = \mu_0$, 并且 $F - G$ 为常数 $\Leftrightarrow F, G$ 诱导出相同预测度 $\Leftrightarrow \mu_F = \mu_G$. 对于最后一点, μ 的单调性蕴含 F 的单调性, 并且分别对于 $x \geq 0, x < 0$, μ 的上连续性与下连续性蕴含 F 的右连续性. 又由 F 的定义可知在 $\mathcal{A}$ 上 $\mu = \mu_F$, 从而由命题 1.14 中延拓的唯一性可知在 $\mathcal{M}$ 上 $\mu = \mu_F$.

Remark

首先, 这个理论可等价地使用形如 $[a, b)$ 的区间和左连续函数 F .

其次, 如果 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的有限 Borel 测度, 则 $\mu = \mu_{\mathbb{R}}$, 其中 $F(x) = \mu((-\infty, x])$ 是 μ 的累积分布函数, 这与定理 1.16 中通过常量 $\mu((-\infty, 0])$ 规定的 F 不同.

第三, 对于每一个递增的右连续的函数 F , §1.4 的理论不仅给出了一个 Borel 测度 μ_F , 而且给出了一个完备测度 $\bar{\mu}_F$, 其定义域包含 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 实际上, $\bar{\mu}_F$ 是 μ_F 的完备化, 并且可以证明它的定义域总是严格地大于 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 我们通常也用 μ_F 来表示这个完备测度, 它被称为与 F 相关的 Lebesgue-Stieltjes 测度.

在探讨中, 我们给定 $\mathbb{R}$ 上一个与递增右连续函数 F 相关的完备 Lebesgue-Stieltjes 测度 μ , 并将定义域记为 $\mathcal{M}_{\mu}$. 因此 $\forall E \in \mathcal{M}_{\mu}$ 有

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (F(b_j) - F(a_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\}.$$



Lemma 1.5.4

$\forall E \in \mathcal{M}_\mu$ 有

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\}.$$

证明. 记等式右边的表达式为 $\nu(E)$. 设 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$, 每个 (a_j, b_j) 都是可数个不相交的 h -区间 $I_j^k (k = 1, 2, \dots)$ 的并集. 特别地, $I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1}]$, 其中 $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是任意一个子列, 满足 $c_j^1 = a_j, c_j^k$ 递增趋于 b_j . 于是 $E \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$, 从而有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \geq \mu(E),$$

因此 $\nu(E) \geq \mu(E)$. 另一方面, 给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j]$, $\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) \leq \mu(E) + \varepsilon$, 并且对每个 j 都存在 $\delta_j > 0$ 使得 $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < 2^{-j}\varepsilon$. 因此 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j + \delta_j)$, 并且有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j + \delta_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) + \varepsilon \leq \mu(E) + 2\varepsilon,$$

于是 $\nu(E) \leq \mu(E)$, 因此 $\mu(E) = \nu(E)$.

Theorem 1.5.5

如果 $E \in \mathcal{M}_\mu$, 则有

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \text{ 是开集}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ 是紧集}\}.$$

证明. 由引理 1.17 可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$, $\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) \leq \mu(E) + \varepsilon$.

令 $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$, 则 U 是开集, $U \supset E$ 且 $\mu(U) \leq \mu(E) + \varepsilon$; 另一方面, 由单调性即可得 $\forall E \subset U, \mu(U) \geq \mu(E)$, 因此第一个等式成立.

首先证明 E 有界的情形. 若 E 是闭集, 则 E 是紧集, 等式显然成立. 若 E 不是闭集, 给定 $\varepsilon > 0$, 选择一个开集 $U \supset \overline{E} \setminus E$ 使得 $\mu(U) \leq \mu(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$. 令 $K = \overline{E} \setminus U$. 则 K 是紧集, $K \subset E$ 且

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(E \cap U) \\ &= \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E)) \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \geq \mu(E) - \varepsilon. \end{aligned}$$

如果 E 是无界的, 令 $E_j = E \cap (j, j+1]$, 则 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 互不相交. 通过先前的讨论, $\forall \varepsilon > 0$,



存在紧集 $K_j \subset E_j$ 满足 $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - 2^{-|j|}\varepsilon$. 令 $H_n = \bigcup_{j=-n}^n K_j$, 则 $H_n \subset E$ 是紧的, 且 $\mu(H_n) \geq \mu\left(\bigcup_{j=-n}^n E_j\right) - 2\varepsilon$, 再由下连续性可得 $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=-n}^n E_j\right)$, 得出结论.

Theorem 1.5.6

设 $E \subset \mathbb{R}$, 则下列叙述等价:

- $E \in \mathcal{M}_\mu$.
- $E = V \setminus N_1$, 其中 V 是一个 G_δ 集且 $\mu(N_1) = 0$.
- $E = H \cup N_2$, 其中 H 是一个 F_σ 集且 $\mu(N_2) = 0$.

证明. 显然 (b) 和 (c) 各自蕴涵 (a), 因为 μ 在 $\mathcal{M}_\mu$ 上是完备的.

设 $E \in \mathcal{M}_\mu$. 如果 $\mu(E) < \infty$, 由定理 1.18 可知, 对每个 $j \in \mathbb{N}$, 我们可以选择一个开集 $U_j \supset E$ 和一个紧集 $K_j \subset E$ 使得

$$\mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j}.$$

令 $V = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, H = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, 则 V 是一个 G_δ 集, H 是一个 F_σ 集, 并且 $H \subset E \subset V, \mu(H) = \mu(E) = \mu(V) < \infty$, 从而 $\mu(V \setminus E) = \mu(E \setminus H) = 0$, 再令 $N_1 = V \setminus E, N_2 = E \setminus H$ 即得.

若 $\mu(E) = \infty$, 则令 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中 $E_j = E \cap (j, j+1]$. 对每个 $k \in \mathbb{N}$, 我们可以选择一个开集 $U_j^k \supset E$ 和一个紧集 $K_j^k \subset E$ 使得

$$\mu(U_j^k) - 2^{-k} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j^k) + 2^{-k}.$$

令 $V_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_j^k, H_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_j^k$, 由有限情形可得 $\mu(V_j \setminus E_j) = \mu(E_j \setminus H_j) = 0$. 令 $V = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j, H = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$, 则 V 仍然是一个 G_δ 集, H 是一个 F_σ 集. 由于 $V \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} (V_j \setminus E_j)$, 则 $V \setminus E$ 是零测集, 同理可得 $E \setminus H$ 也是零测集, 得出结论.

定理 1.19 的意义在于, 它表明所有 Borel 集 (更一般地, $\mathcal{M}_\mu$ 中的所有集合) 在除去零测集的情况下都是一种简单形式. 这个想法的另一个版本是, 一般的可测集可以被“简单”集合逼近, 这一想法包含在下一命题中.

Proposition 1.5.7

若 $E \in \mathcal{M}_\mu$ 且 $\mu(E) < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一个集合 A , 它是有限个开区间的并集, 满足 $\mu(E \Delta A) < \varepsilon$.

证明. 由下确界定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在一列有界开区间 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ 使得 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, 并且 $\mu(E) + \frac{1}{2}\varepsilon >$



$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j)$, 于是正项级数 $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j)$ 收敛, 从而存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon$. 记 $A = \bigcup_{j=1}^N I_j$, 则 $E \Delta A = (E \setminus A) \cup (A \setminus E)$. 一方面, $E \setminus A \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N I_j \right) \subset \bigcup_{j=N+1}^{\infty} I_j$, 于是 $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$; 另一方面, $A \setminus E \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right) \setminus E$, 并且 $\mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \setminus E\right) + \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) < \mu(E) + \frac{1}{2}\varepsilon$, 再由 $\mu(E) < \infty$ 可得 $\mu(A \setminus E) \leq \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \setminus E\right) < \frac{1}{2}\varepsilon$, 从而 $\mu(E \Delta A) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

现在, 我们来考察 $\mathbb{R}$ 上最为重要的一个测度, 即 Lebesgue 测度. 这是一个关于函数 $F(x) = x$ 的完备测度 μ_F , 其中区间的测度就是其长度, 我们将这一测度记为 m , 其定义域称为 Lebesgue 可测集的类, 记作 $\mathcal{L}$.

如果 $E \subset \mathbb{R}, s, r \in \mathbb{R}$, 则定义

$$E + s = \{x + s : x \in E\}, \quad rE = \{rx : x \in E\}.$$

Theorem 1.5.8

如果 $E \in \mathcal{L}$, 则 $\forall r, s \in \mathbb{R}, E + s, rE \in \mathcal{L}$. 此外, $m(E + s) = m(E), m(rE) = |r|m(E)$.

证明. 因为开区间在平移和伸缩变换下仍为开区间, 故 Borel 集在这两种变换下也仍为 Borel 集. 定义 $m_s : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ 为 $m_s(E) = m(E + s)$, 则 $m_s(\emptyset) = 0$, 并且对于一系列互不相交的集合 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$, $m_s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j + s)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j + s) = \sum_{j=1}^{\infty} m_s(E_j)$, 从而 m_s 是 Borel 测度. 令 I 为一个 h -区间, 则 $m_s(I) = m(I + s) = m(I) = |I|$, 从而 $m_s = m$. 任取 $E \in \mathcal{L}$. 先考虑特殊情况 $m(E) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一系列有界开区间 $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j), m(E) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} m((a_j, b_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$, 即 $\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \varepsilon$. 又由于 $E + s \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j + s, b_j + s)$, 则 $m^*(E + s) < m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j + s, b_j + s)\right) < \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \varepsilon$, 于是由 ε 的任意性可得 $m^*(E + s) = 0$, 从而 $E + s \in \mathcal{L}$. 对于一般情况, 由于 $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = \mathcal{L}$, 记 $E = A \cup F$, 其中 $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F \subset N, m(N) = 0$, 则 $E + s = (A + s) \cup (F + s)$, 其中 $A + s \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, F + s \subset N + s, m(N + s) = 0$, 于是 $E + s \in \mathcal{L}$. 定义 $m^r : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ 为 $m^r(E) = |r|m(E)$, 同理可得 m^r 也是 Borel 测度. 令 I 为一个 h -区间, 则 $m^r(I) = |r|m(I) = |r| \cdot |I|$. 再定义 $\widehat{m}^r : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty]$ 为 $\widehat{m}^r(E) = m(rE)$. 令 I 为一个 h -区间, 则 $\widehat{m}^r(I) = m(rI) = |r| \cdot |I| = m^r(I)$, 从而 $\widehat{m}^r = m^r$. 后续证明同上.

Remark

$\mathbb{R}$ 中的每个单点集的勒贝格测度都是 0, 因此对每个可数集也如此. 特别地, $m(\mathbb{Q}) = 0$. 令 $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$



是 $[0, 1]$ 上的有理数点集. 给定 $\varepsilon > 0$, 令 $I_j = \left(r_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, r_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$, 则 $U = (0, 1) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right)$ 是 $[0, 1]$ 中的稠密开集, 但 $m(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\varepsilon = \varepsilon$; 它的补集 $K = [0, 1] \setminus U$ 是无处稠密的闭集, 但 $m(K) \geq 1 - \varepsilon$. 所以, 拓扑“大”测度可能很“小”, 拓扑“小”测度可能很“大”.

Example ▶ Cantor 集

考虑区间 $I = [0, 1]$. 首先去掉 $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 得到 $F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, 再分别去掉左右两段三等分的中间集合 I_2 , 得到 F_2 , ……因此, 第 n 步我们去除了 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的开区间, 从而 $|I_n| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 剩余 2^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间, 从而 $m(F_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

令 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 称 C 是 Cantor 集.

Proposition 1.5.9

令 C 是 Cantor 集.

- C 是紧的、无处稠密的.
- $m(C) = 0$.
- $\text{card}(C) = \mathfrak{c}$.

证明. (a): 由于 C 是有界的, 故只需要证明 C 是闭集, 从而只需要证明 C 的极限点均属于 C . $\forall x \in C$, 由定义可得 $\forall n, x \in F_n$. 记 $F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} F_n^k$, 其中 F_n^k 是第 n 步后从左往右第 k 个剩余的闭区间. 任取 x 的一个邻域 $\mathcal{N}_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$, 总存在充分大的 n 使得 $|F_n^k| < \delta$. 因此, 若 $x \in F_n^k$, 则 $F_n^k \subset \mathcal{N}_\delta(x)$. 令 x' 是一个端点且 $x' \neq x$, 则 $[x, x']$ 或 $[x', x] \subset \mathcal{N}_\delta(x)$, 再由 $x' \in C$ 可知 x 是极限点. 故 C 是紧的.

由 (a) 可知 $\overline{C} = C$. 假设 $x \in C$ 是一个内点, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $\mathcal{N}_\delta(x) \subset C$. 由 (a) 证明过程可知, 存在充分大的 n 与 $k \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$ 使得 $x \in F_n^k \subset \mathcal{N}_\delta(x)$. 然而在第 $n+1$ 步时, 我们将除去 F_n^k 中的一个开区间 I_{n+1}^j , 于是 $I_{n+1}^j \subset \mathcal{N}_\delta(x)$ 且 $I_{n+1}^j \not\subset C$, 矛盾. 于是 C 是无处稠密的.

(b): $\forall j \geq 1, F_j \supset F_{j+1}$, 从而由上连续性可知 $m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

(c): $\forall x \in [0, 1]$, x 有三进制表示 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $a_i \in \{0, 1, 2\}$. 若令 $\mathcal{E} = \{\{a_i\}_{i=1}^{\infty} : a_i \in \{0, 1, 2\}, i \geq 1\}$, 则存在 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{E}$ 使得 $x = 0.a_1a_2\dots$. 特别地, 记 $0 = 0.000\dots, 1 = 0.222\dots$.

注意到 Cantor 集中的任意一点不会落在某个 F_n 的“中间区间 I_n^j ”内, 因此如果 x 的三进制表示的某一位第一次为 $a_n = 1$ (如果此位后均为 2, 记 $a_n = 2, a_k = 0, k > n$), 则 x 必然为对应第 n 步某个“中间区间 I_n^j ”的左端点, 从而可表示为

$$x = \sum_{i < n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} + \sum_{i > n} \frac{0}{3^i}.$$



由于 $\frac{1}{3^n} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^j}$, 于是有

$$x = \sum_{i < n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i > n} \frac{2}{3^i}.$$

由定义可知

$$a_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

我们采取后一种表示, 从而 $x \in C$ 的三进制表示中只含 0 与 2.

(1) 考虑第一个 $a_n = 0$ 的情形, 说明在第 n 步时 x 落在左区间. 若 x 是左端点, 则 $a_k = 0, k > n$, 也即

$$x = \sum_{i < n} \frac{2}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i > n} \frac{0}{3^i} = 0.\underbrace{22 \cdots 2}_{n-1}.$$

若 x 不是左端点, 则

$$x = \sum_{i < n} \frac{2}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i > n} \frac{a_i}{3^i}.$$

(2) 考虑第一个 $a_n = 2$ 的情形, 说明在第 n 步时 x 落在右区间. 若 x 是左端点, 则 $a_k = 0, k > n$, 也即

$$x = \sum_{i < n} \frac{0}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i > n} \frac{0}{3^i} = 0.\underbrace{00 \cdots 0}_{n-1}2.$$

若 x 不是左端点, 则

$$x = \sum_{i < n} \frac{0}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i > n} \frac{a_i}{3^i}.$$

通过上述分析, Cantor 集中的所有点都可以用三进制表示, 且三进制表示中只含 0 与 2. 令 $\mathcal{B} = \{\{b_i\}_{i=1}^{\infty} : b_i \in \{0, 2\}, i \geq 1\}$, 则 $\forall x \in C$, 存在唯一的 $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$ 使得 $x = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$. 又由于 $\mathcal{B}$ 中的所有元素可与 $[0, 1]$ 上所有实数的二进制表示一一对应, 因此有 $\text{card}(C) = \mathfrak{c}$.



积分

2.1 可测函数

任意一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 诱导出映射 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, 定义为 $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$, 其保持并集、交集、补集运算. 如果 $\mathcal{N}$ 是 Y 上的一个 σ -代数, 则 $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$ 是 X 上的一个 σ -代数.

Definition 2.1.1 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -可测

如果 $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ 是可测空间, 则映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -可测 ($(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -measurable) 的 (或直接称可测, 如果 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 已知), 若 $\forall E \in \mathcal{N}, f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

Proposition

可测映射的复合是可测的. 也就是说, 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -可测的, 并且 $g: Y \rightarrow Z$ 是 $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ -可测的, 那么 $g \circ f$ 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ 可测的.

证明. 由于 $g: Y \rightarrow Z$ 是 $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ -可测的, 因此 $\forall E \in \mathcal{O}, g^{-1}(E) \in \mathcal{N}$, 再根据 $f: X \rightarrow Y$ 满足 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -可测得 $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathcal{M}$.

Proposition 2.1.2

如果 $\mathcal{N}$ 由 $\mathcal{E}$ 生成, 则 $f: X \rightarrow Y$ 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -可测的 $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E}, f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

证明. 必要性由定义即得. 对于充分性, 考虑集合 $\mathcal{F} = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$. 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, 则 $f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(E_j) \in \mathcal{M}$; 若 $E \in \mathcal{F}$, 则 $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathcal{M}$. 于是 $\mathcal{F}$ 对补集运算与可数的并集运算均封闭, 因此是 σ -代数, 并且包含 $\mathcal{E}$, 从而也包含 $\mathcal{N}$.

Corollary 2.1.3

设 X, Y 是度量 (或者拓扑) 空间, 则所有连续函数 $f: X \rightarrow Y$ 是 $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$ -可测的.

证明. $f: X \rightarrow Y$ 是连续的当且仅当对 Y 中的每个开集 U , $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集.

**Definition 2.1.4** ▶ $\mathcal{M}$ -可测、Lebesgue 可测与 Borel 可测

设 $(X, \mathcal{M})$ 是一个可测空间, X 上的一个实值或者复值函数 f 称为 $\mathcal{M}$ -可测 ($\mathcal{M}$ -measurable) 的 (或者就称为可测的), 如果它是 $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 或 $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ 可测的. 特别地, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 Lebesgue(相应地, Borel) 可测 (Lebesgue(resp. Borel)-measurable) 的, 如果它是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ (相应地, $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$) 可测的.

Remark

如果 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 均是 Lebesgue 可测的, 即使 g 是连续的, $f \circ g$ 也不一定是 Lebesgue 可测的. 例如, 令 $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, 则 $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, 但此时不一定有 $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 然而, 如果 f 是 Borel 可测的, 那么只要 g 是 Lebesgue 或 Borel 可测的, $f \circ g$ 就是相应可测的.

Proposition 2.1.5

如果 $(X, \mathcal{M})$ 是可测空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, 则下列陈述等价:

- f 是 $\mathcal{M}$ -可测的.
- $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$.

证明. 由命题 1.2 与 2.1 即得.

有时候我们会在 X 的子集上考虑可测性. 如果 $(X, \mathcal{M})$ 是一个可测空间, f 是 X 上的一个函数, $E \in \mathcal{M}$, 我们称 f 在 E 上可测, 如果对每个 Borel 集 B 有 $f^{-1}(B) \cap E \in \mathcal{M}$. (等价地, $f|_E$ 是 $\mathcal{M}_E$ -可测的, 其中 $\mathcal{M}_E = \{F \cap E : F \in \mathcal{M}\}$.)

给定集合 X , 若 $\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是一族可测空间, 且对每个 $\alpha \in A$ 有映射 $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$, 则存在唯一最小的 σ -代数, 即由集合 $f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ ($E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha, \alpha \in A$) 生成的 σ -代数. 它称为由 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 生成的 σ -代数. 特别地, 若 $X = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, 则 §1.2 定义的乘积 σ -代数是坐标映射 $\pi_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$ 生成的 σ -代数.

Proposition 2.1.6

设 $(X, \mathcal{M})$ 和 $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$ ($\alpha \in A$) 是可测空间, $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, $\mathcal{N} = \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha$, 且 $\pi_\alpha: Y \rightarrow Y_\alpha$ 是坐标映射. 则 $f: X \rightarrow Y$ 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -可测的当且仅当对每个 α , $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$ -可测的.

证明. 若 f 可测, 由可测映射的复合可测得出每个 f_α 可测. 反之, 若每个 f_α 可测, 则对所有 $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ 有 $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \mathcal{M}$, 故由命题 2.1 知 f 可测.

**Corollary 2.1.7**

函数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 是 $\mathcal{M}$ -可测的当且仅当 $\operatorname{Re} f$ 和 $\operatorname{Im} f$ 是 $\mathcal{M}$ -可测的.

证明. 由命题 1.5 有 $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, 结论成立.

有时为方便起见, 考虑取值于扩展实数系 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ 的函数. 我们通过 $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ 定义 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的 Borel 集.(若将 $\overline{\mathbb{R}}$ 赋予度量 $\rho(x, y) = |A(x) - A(y)|$, 其中 $A(x) = \arctan x$, 这与 Borel σ -代数的标准定义一致). 命题 2.3 易验证 $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ 由射线 $(a, \infty]$ 或 $[-\infty, a)$ ($a \in \mathbb{R}$) 生成. 我们定义 $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{M}$ -可测的, 若它是 $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ -可测的.

接下来, 我们建立可测性在常见代数及极限运算下的保持性.

Proposition 2.1.8

若 $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ 是 $\mathcal{M}$ -可测的, 则 $f + g$ 和 fg 也是.

证明. 定义 $F: X \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\phi: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 和 $\psi: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $F(x) = (f(x), g(x))$, $\phi(z, w) = z + w$, $\psi(z, w) = zw$. 由命题 1.5 得 $\mathcal{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, 故由命题 2.4 知 F 是 $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}})$ -可测的; 而由推论 2.2 知 ϕ 和 ψ 是 $(\mathcal{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ -可测的. 因此 $f + g = \phi \circ F$ 和 $fg = \psi \circ F$ 是 $\mathcal{M}$ -可测的.

Remark

命题 2.6 对 $\overline{\mathbb{R}}$ -值函数仍成立, 但需要对不定式 $\infty - \infty$ 和 $0 \cdot \infty$ 稍加处理 (按约定我们总定义 $0 \cdot \infty = 0$).

Proposition 2.1.9

若 $\{f_j\}$ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的 $\overline{\mathbb{R}}$ -值可测函数序列, 则函数

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \quad g_3(x) = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x),$$

$$g_2(x) = \inf_j f_j(x), \quad g_4(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

都是可测的. 若对每个 $x \in X$ 存在 $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$, 则 f 可测.

证明. 我们有

$$g_1^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}((a, \infty]), \quad g_2^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([-\infty, a)),$$

故由命题 2.3 知 g_1 和 g_2 可测. 更一般地, 若 $h_k(x) = \sup_{j > k} f_j(x)$, 则对每个 k 都有 h_k 是可测的,



因此 $g_3 = \inf_k h_k$ 可测, 类似可得 g_4 可测. 最后, 若 f 存在, 则 $f = g_3 = g_4$, 从而 f 可测.

Corollary 2.1.10

若 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, 则 $\max(f, g)$ 和 $\min(f, g)$ 也可测.

Corollary 2.1.11

若 $\{f_j\}$ 是复值可测函数序列, 且对于所有的 x 存在 $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$, 则 f 可测.

证明. 使用推论 2.5.

Definition 2.1.12 ▶ 函数的正部、负部与极坐标分解

若 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, 定义其**正部 (positive part)** 和**负部 (negative part)** 为

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

于是 $f = f^+ - f^-$.

若 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, 则有极坐标分解

$$f = (\operatorname{sgn} f)|f|, \quad \text{其中} \quad \operatorname{sgn} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Remark

若 f 可测, 则由推论 2.8 知 f^+ 和 f^- 可测. 同样, 若 f 可测, 则 $|f|$ 和 $\operatorname{sgn} f$ 也可测. 事实上, $z \mapsto |z|$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续, $z \mapsto \operatorname{sgn} z$ 在除原点外连续. 若 $U \subset \mathbb{C}$ 是开集, 则 $\operatorname{sgn}^{-1}(U)$ 是开集或形如 $V \cup \{0\}$ (V 是开集), 故 sgn 是 Borel 可测的. 因此 $|f| = |\cdot| \circ f$ 和 $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} \circ f$ 可测.

Definition 2.1.13 ▶ 特征函数、简单函数与函数的标准表示

设 $(X, \mathcal{M})$ 是可测空间. 若 $E \subset X$, 其特征函数 (**characteristic function**) χ_E (有时称为 E 的指示函数并记作 1_E) 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

X 上的**简单函数 (simple function)** 是 $\mathcal{M}$ 中集合的特征函数的有限复系数线性组合 (我们不允许简单函数取值 $\pm\infty$). 因此有

$$f = \sum_{j=1}^n z_j \chi_{E_j},$$



其中 $E_j = f^{-1}(\{z_j\})$, $\text{range}(f) = \{z_1, \dots, z_n\}$, 这一形式称为 f 的**标准表示 (standard representation)**, 它将 f 表示为不相交集 (其并为 X) 的特征函数的线性组合, 且系数互异.

Remark

χ_E 可测当且仅当 $E \in \mathcal{M}$. $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 是简单函数当且仅当 f 可测且值域是 $\mathbb{C}$ 的有限子集.

若 f 和 g 是简单函数, 则 $f+g$ 和 fg 也是.

标准表示中某个系数 z_j 可能为 0, 但项 $z_j \chi_{E_j}$ 仍视为标准表示的一部分, 因当 f 与其他函数交互时, 集合 E_j 可能有作用.

现在我们证明任意可测函数可用简单函数良好逼近.

Theorem 2.1.14

设 $(X, \mathcal{M})$ 是可测空间.

- 若 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ 可测, 则存在简单函数序列 $\{\phi_n\}$ 使得 $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f$, 且 ϕ_n 逐点收敛于 f , 并在使得 f 有界的任何集合上一致收敛于 f .
- 若 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 可测, 则存在简单函数序列 $\{\phi_n\}$ 使得 $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$, 且 ϕ_n 逐点收敛于 f , 并在使得 f 有界的任何集合上一致收敛于 f .

证明. (a): 对 $n = 0, 1, 2, \dots$ 和 $0 \leq k \leq 2^{2^n} - 1$, 令

$$E_n^k = f^{-1}((k \cdot 2^{-n}, (k+1)2^{-n}]), \quad F_n = f^{-1}((2^n, \infty]),$$

并定义

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2^n}-1} k \cdot 2^{-n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

(此公式形式混乱但图示清晰, 见教材图 2.1) 若 $x \in F_{n+1}$, 则 $\phi_{n+1}(x) = 2^{n+1} > 2^n \geq \phi_n(x)$. 若 $x \in E_{n+1}^k, k \geq 1$, 则由定义得 $x \in E_n^{[\frac{k}{2}]} \cup E_n^{[\frac{k}{2}]+1}$, 于是 $\phi_n(x) \leq ([\frac{k}{2}] + 1)2^{-n} \leq k \cdot 2^{-n} < \phi_{n+1}(x)$. 综上, 对所有 n 有 $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, 且在 $f \leq 2^n$ 的集合上有 $0 \leq f - \phi_n \leq 2^{-n}$. 故结论成立.

(b): 若 $f = g + ih$, 可对 g 和 h 的正负部分应用 (a), 得到非负简单函数序列 $\psi_n^+, \psi_n^-, \zeta_n^+, \zeta_n^-$ 分别递增至 g^+, g^-, h^+, h^- . 令 $\phi_n = \psi_n^+ - \psi_n^- + i(\zeta_n^+ - \zeta_n^-)$, 则易验证 ϕ_n 具有所需性质.

若 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的测度, 在研究可测函数时我们希望忽略 μ -零测集. 就此而言, 若 μ 是完备的, 则问题更简单.

Proposition 2.1.15

当且仅当测度 μ 完备时, 下列命题成立:

- 若 f 可测且 $f = g$ μ -a.e., 则 g 可测.
- 若对每个 $n \in \mathbb{N}$ 有 f_n 可测, 且 $f_n \rightarrow f$ μ -a.e., 则 f 可测.



证明. 先证充分性.

(a): 由条件可知存在可测集 E 满足 $\mu(E^c) = 0$, 且 $\forall x \in E, f(x) = g(x)$. 对任意 Borel 集 A 有

$$g^{-1}(A) = (g^{-1}(A) \cap E) \cup (g^{-1}(A) \cap E^c).$$

一方面, 由 $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ 得 $g^{-1}(A) \cap E = f^{-1}(A) \cap E$, 再由 f 可测得 $f^{-1}(A) \cap E$ 是可测集. 另一方面, $g^{-1}(A) \cap E^c \subset E^c$, 由 μ 的完备性可得 $g^{-1}(A) \cap E^c$ 是可测集. 于是 $g^{-1}(A)$ 是可测集, 从而由任意性得 g 可测.

(b): 由条件可知存在可测集 F 满足 $\mu(F^c) = 0$, 且 $\forall x \in F, f_n(x) \rightarrow f(x)$. 令 $g = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_n$, 则由命题 2.7 得 g 可测, 并且对 $x \in F$ 有 $g(x) = f(x)$. 对任意 Borel 集 A 有

$$f^{-1}(A) = (f^{-1}(A) \cap F) \cup (f^{-1}(A) \cap F^c).$$

由上述过程同理可得 $f^{-1}(A)$ 是可测集, 从而由任意性得 f 可测.

再证必要性.

在 (b) 中可取 $f_n = g$, 故只需要证明 (a).

设 $F \subset E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0$. 取 $f = \chi_E, g = \chi_F$, 则 $\forall x \in E^c \in \mathcal{M} f = g = 0$, 于是 $f = g$ μ -a.e., 从而 g 可测, 也即 $F \in \mathcal{M}$, 于是 μ 是完备的.

下结果表明, 忘记测度完备性不太可能导致严重错误.

Proposition 2.1.16

设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是测度空间, $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ 是其完备化. 若 f 是 X 上的 $\overline{\mathcal{M}}$ -可测函数, 则存在 $\mathcal{M}$ -可测函数 g 使得 $f = g$ $\overline{\mu}$ -a.e..

证明. 若 $f = \chi_E, E \in \overline{\mathcal{M}}$, 则由 $\overline{\mu}$ 的定义知结论显然; 因此若 f 是 $\overline{\mathcal{M}}$ -可测简单函数亦成立. 一般情形下, 由定理 2.10, 可选取一系列 $\overline{\mathcal{M}}$ -可测简单函数 $\{\phi_n\}$ 逐点收敛至 f , 且对每个 n , 令 ψ_n 为 $\mathcal{M}$ -可测简单函数, 满足除在某个 $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ (其中 $\overline{\mu}(E_n) = 0$) 外有 $\psi_n = \phi_n$. 选取 $N \in \mathcal{M}$ 使得 $\mu(N) = 0$ 且 $N \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 并令 $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{X \setminus N} \psi_n$. 则由推论 2.9 得 g 是 $\mathcal{M}$ -可测的, 于是在 N^c 上 $g = f$.

2.2 非负函数积分

本节我们考虑一个固定的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$, 并定义

$L^+ =$ 所有从 X 到 $[0, \infty]$ 的可测函数形成的空间.

**Definition 2.2.1 ▶ 积分**

令 ϕ 是 L^+ 内的一个简单函数, 且有标准表示 $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$, 我们定义 ϕ 的关于 μ 的积分 (integral) 为

$$\int \phi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

Remark

按约定, $0 \cdot \infty = 0$. 我们注意到 $\int \phi d\mu$ 可能为 ∞ . 若不会混淆, 也记 $\int \phi$ 表示 $\int \phi d\mu$. 有时显式写出 ϕ 的变量较方便, 尤其当 $\phi(x)$ 由含 x 的公式给出或涉及其他变量时, 此时使用记号 $\int \phi(x) d\mu(x)$. 最后, 若 $A \in \mathcal{M}$, 则 $\phi \chi_A$ 也是简单函数 (即 $\phi \chi_A = \sum_j a_j \chi_{A \cap E_j}$), 并定义 $\int_A \phi d\mu$ (或 $\int_A \phi, \int_A \phi(x) d\mu(x)$) 为 $\int \phi \chi_A d\mu$. 相同的记法约定也适用于下文定义的更一般函数的积分. 总结如下:

$$\int_A \phi d\mu = \int_A \phi = \int_A \phi(x) d\mu(x) = \int \phi \chi_A d\mu, \quad \int = \int_X.$$

Proposition 2.2.2

令 ϕ, ψ 是 L^+ 中的简单函数.

- 如果 $c \geq 0$, 则 $\int c\phi = c \int \phi$.
- $\int(\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$.
- 如果 $\phi \leq \psi$, 则 $\int \phi \leq \int \psi$.
- 映射 $A \mapsto \int_A d\mu$ 是 $\mathcal{M}$ 上的一个测度.

证明. (a): 由定义即得.

(b): 令 ϕ, ψ 的标准表示分别为 $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}, \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}$, 则 $E_j = \bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k), F_k = \bigcup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$, 并且这些集合要么相同, 要么不相交. 于是由 μ 的有限可加性得到

$$\int \phi + \int \psi = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) = \int (\phi + \psi).$$

(c): 如果 $\phi \leq \psi$, 则当 $E_j \cap F_k \neq \emptyset$ 时一定有 $a_j \leq b_k$, 于是有

$$\int \phi = \sum_{j,k} a_j \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j,k} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \int \psi.$$

(d): $A = \emptyset$ 时积分显然为 0. 设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ 是一列互不相交的集合, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 则有

$$\int_A \phi = \sum_j a_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j,k} a_j \mu(A_k \cap E_j) = \sum_k \int_{A_k} \phi.$$



因此该映射是一个测度.

我们现将积分推广至所有函数 $f \in L^+$ 上, 定义

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ 是简单函数} \right\}$$

由命题 2.13(c) 可知, 当 f 是简单函数时, 两个定义是等价的. 此外, 由定义可得出对于 L^+ 中的函数也有类似于命题 2.13(a)(c) 的性质.

Theorem 2.2.3 ▶ 单调收敛定理 (The Monotone Convergence Theorem, MCT)

令 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^+$, 满足 $f_n \leq f_{n+1}$, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, 则 $\int f = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$

证明. 由单调性可得 $\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \dots \leq \int f$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ 存在, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f$. 考虑任一简单函数 $\phi(x) = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j)$ 满足 $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$, 固定 $\alpha \in (0, 1)$, 令 $E_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha \phi(x)\}$. 于是由定义可知 $E_n \subset E_{n+1}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^\infty E_n = X$, $\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} \alpha \phi = \alpha \int_{E_n} \phi$. 由命题 2.13(d) 与定理 1.8(c) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j \cap E_n) = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j \cap X) = \int \phi(x),$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq \alpha \int \phi$, 从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq \int \phi$, 再取 ϕ 的上界得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq \int f$.

Theorem 2.2.4

令 $\{f_n\}$ 是 L^+ 中的一列有限或无限的函数列, $f = \sum_n f_n$, 则 $\int f = \int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$.

证明. 考虑两个函数 f_1, f_2 , 由定理 2.10, 我们可以找到两个非负简单函数列 $\{\phi_j\}, \{\psi_j\}$ 满足 $\phi_j \nearrow f_1, \psi_j \nearrow f_2$. 由单调收敛定理可得

$$\int (f_1 + f_2) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int (\phi_j + \psi_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi_j + \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_j = \int f_1 + \int f_2.$$

归纳可得对每个有限的 N , $\int \sum_{n=1}^N f_n = \sum_{n=1}^N \int f_n$. 再令 $N \rightarrow \infty$. 由于 $\sum_{n=1}^N f_n \leq \sum_{n=1}^{N+1} f_n$, 由控制收敛定理可得 $\int \sum_{n=1}^\infty f_n = \sum_{n=1}^\infty \int f_n$.

**Proposition 2.2.5**

令 $f \in L^+$, 则 $\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.e.}$

证明. 如果 $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ 是简单函数, 其中 $\forall j, a_j \geq 0$, 则 $\int f = 0$ 当且仅当对每个 j 有 $a_j = 0$ 或 $\mu(E_j) = 0$, 也即当且仅当 $f = 0 \text{ a.e.}$

现考虑 f 是一般函数的情况. 先证明充分性. 对任一简单函数 $\phi(x)$ 满足 $0 \leq \phi \leq f$, 一定有 $\phi = 0 \text{ a.e.}$ $\int \phi = 0$. 于是 $\int f = \sup_{0 \leq \phi \leq f} \int \phi = 0$. 再证明必要性. 令 $E_n = \left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x : f(x) > 0\}$. 如果 $f = 0 \text{ a.e.}$ 不成立, 则至少对于某个 n 有 $\mu(E_n) > 0$, 于是 $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$, 从而 $\int f \geq \int \frac{1}{n} \chi_{E_n} = \frac{1}{n} \mu(E_n) > 0$, 矛盾.

Corollary 2.2.6

令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^+, f \in L^+$, 并且对于 a.e. $x, f_n(x) \nearrow f(x)$, 则 $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

证明. 因为对于 a.e. $x, f_n(x) \nearrow f(x)$, 所以存在 $E \subset X$ 使得 $\forall x \in E, f_n(x) \nearrow f(x)$, 并且 $\mu(E^c) = 0$. 因此可得

$$\int f = \int_E f = \int f \chi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \chi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Remark**Lemma 2.2.7 ▶ Fatou 引理**

对于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^+$ 有 $\int(\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n$.

证明. 令 $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$, 则 $g_n \leq g_{n+1}, g_n \leq f_j, \forall j \geq n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. 由 MCT 可得

$$\int(\liminf f_n) = \int \lim g_n = \lim \int g_n \leq \liminf \int f_n.$$

Corollary 2.2.8

令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^+, f \in L^+$, 并且对于 a.e. $x, f_n(x) \rightarrow f(x)$, 则 $\int f \leq \liminf \int f_n$.



证明. 因为对于 a.e. $x, f_n(x) \rightarrow f(x)$, 所以存在 $E \subset X$ 使得 $\forall x \in E, f_n(x) \rightarrow f(x)$, 并且 $m(E^c) = 0$. 于是由 Fatou 引理可得

$$\int f = \int_E f \leq \liminf \int_E f_n = \liminf \int f_n.$$

Corollary

令 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^+, f \in L^+$, 并且对于 a.e. $x, f_n(x) \rightarrow f(x), f_j \leq f$, 则 $\int f = \lim \int f_n$.

Remark

Fatou 引理与 MCT 可以互相推导出, 从而是等价的.

Proposition 2.2.9

令 $f \in L^+, \int f < \infty$, 则 $\{x : f(x) = \infty\}$ 是零测集, 并且 $\{x : f(x) > 0\}$ 是 σ -有限的.

证明. 记 $\{x : f(x) = \infty\} := E_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \{x : f(x) > n\}$, 因此 E_∞ 是可测的, 并且 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in E_\infty, f(x) = \infty \geq n$. 假设 $\mu(E_\infty) > 0$, 则 $\int f d\mu \geq \int_{E_\infty} f d\mu \geq n \cdot \mu(E_\infty), \forall n \in \mathbb{N}$, 再令 $n \rightarrow \infty$ 即得 $\int f = \infty$, 矛盾, 从而 E_∞ 是零测集.

定义 $E_n = \left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$, 则 $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \{x : f(x) > 0\}$. 给定 $n \in \mathbb{N}$, 则 $\int f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu > \frac{\mu(E_n)}{n}$, 也即 $\mu(E_n) < n \int f d\mu < \infty$, 从而每个 E_n 的测度均有限, 于是 $\{x : f(x) > 0\}$ 是 σ -有限的.

2.3 复函数的积分

我们继续在测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上讨论. 上节定义的积分可自然延拓到实值可测函数 f , 即若 f^+ 和 f^- 是 f 的正部和负部, 且 $\int f^+$ 和 $\int f^-$ 中至少有一个是有限的, 则定义

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

我们主要关注 $\int f^+$ 和 $\int f^-$ 均有限的情形, 此时称 f 是**可积**的. 因 $|f| = f^+ + f^-$, 从而 f 可积当且仅当 $\int |f| < \infty$.

Proposition 2.3.1

X 上可积实值函数的集合是实向量空间, 且积分是其上的线性泛函.



证明. 第一结论由 $|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|$ 与 f, g 的可积性得出. 对于第二部分, 显然对任意 $a \in \mathbb{R}$ 有 $\int af = a \int f$. 为证可加性, 设 f 和 g 可积, 令 $h = f + g$. 则 $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, 故 $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. 由定理 2.15,

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+,$$

重组后得所求结果:

$$\int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g.$$

若 f 是复值可测函数, 称 f 是**可积的**, 如果 $\int |f| < \infty$. 更一般地, 若 $E \in \mathcal{M}$, 称 f 在 E 上可积, 如果 $\int_E |f| < \infty$. 由于 $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \leq 2|f|$, 故 f 可积当且仅当 $\operatorname{Re} f$ 和 $\operatorname{Im} f$ 均可积, 此时定义

$$\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f.$$

易证复值可积函数的空间是复向量空间, 且积分是其上的复线性泛函. 我们暂时记此空间为 $L^1(\mu)$ (或 $L^1(X, \mu), L^1(X), L^1$, 依上下文而定).

Proposition 2.3.2

若 $f \in L^1$, 则 $|\int f| \leq \int |f|$.

证明. $\int f = 0$ 与 f 是实值函数的情况均平凡, 这是因为

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

若 f 是复值函数且 $\int f \neq 0$, 令 $\alpha = \overline{\operatorname{sgn}(\int f)}$. 则 $|\int f| = \alpha \int f = \int \alpha f$. 于是 $\int \alpha f$ 是实数, 故

$$\left| \int f \right| = \operatorname{Re} \int \alpha f = \int \operatorname{Re}(\alpha f) \leq \int |\operatorname{Re}(\alpha f)| \leq \int |\alpha f| = \int |f|.$$

Proposition 2.3.3

- 若 $f \in L^1$, 则 $\{x : f(x) \neq 0\}$ 是 σ -有限的.
- 若 $f, g \in L^1$, 则对所有 $E \in \mathcal{M}$ 有 $\int_E f = \int_E g$ 当且仅当 $\int |f - g| = 0$, 也当且仅当 $f = g$ a.e..

证明. (a) 和 (b) 中第二个等价由命题 2.20 和 2.16 得出. 若 $\int |f - g| = 0$, 则由命题 2.22, 对任



意 $E \in \mathcal{M}$ 有

$$\left| \int_E f - \int_E g \right| \leq \int \chi_E |f - g| \leq \int |f - g| = 0,$$

故 $\int_E f = \int_E g$. 反之, 若 $f = g$ a.e. 不成立, 设 $u = \operatorname{Re}(f - g)$, $v = \operatorname{Im}(f - g)$, 则 u^+, u^-, v^+, v^- 中至少一个在正测度集上非零. 不妨设 $E = \{x : u^+(x) > 0\}$ 有正测度, 则因在 E 上 $u^- = 0$, 有 $\operatorname{Re}(\int_E f - \int_E g) = \int_E u^+ > 0$. 其他情形类似.

此命题表明: 就积分而言, 在测集上修改函数无影响. 事实上, 可仅对在补集为零测集的可测集 E 上定义的函数 f 积分, 只需在 E^c 上定义 f 为 0 (或其他值). 如此, 对积分而言, 可将几乎处处有限的 $\mathbb{R}$ -值函数视为实值函数.

鉴于此, 我们将 $L^1(\mu)$ 重新定义为 X 上几乎处处有定义的可积函数在意义下的等价类的集合, 其中 $f \sim g$ 当且仅当 $f = g$ a.e.. 新的 $L^1(\mu)$ 仍是复向量空间 (在逐点 a.e. 加法和数乘下). 尽管此后将 $L^1(\mu)$ 视为等价类空间, 我们仍用记号 “ $f \in L^1(\mu)$ ” 表示 f 是几乎处处定义的可积函数.

新定义的 $L^1(\mu)$ 还有两个优点. 首先, 若 $\bar{\mu}$ 是 μ 的完备化, 命题 2.12 给出了 $L^1(\bar{\mu})$ 和 $L^1(\mu)$ 间的一一对应, 故我们可认同这些空间. 其次, L^1 是度量空间, 距离函数为 $\rho(f, g) = \int |f - g|$ (三角不等式易证, 且显然 $\rho(f, g) = \rho(g, f)$; 但要使 $\rho(f, g) = 0$ 仅当 $f = g$, 需按命题 2.23b 认同几乎处处相等的函数). 我们称此度量下的收敛为 L^1 收敛, 即在 L^1 中 $f_n \rightarrow f$ 当且仅当 $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

现在介绍三个基本收敛定理中最后一个 (前两个是 MCT 和 Fatou 引理), 并推导其有用推论. 在 $\mathbb{R}$ 上的关于 Lebesgue 测度的积分 (如 Fatou 引理前讨论) 的背景下, 此定理的思想是: 若 $f_n \rightarrow f$ a.e. 且 $|f_n|$ 的图像被限制在平面有限面积区域内 (故其下面积不能逃逸至无穷远), 则 $\int f_n \rightarrow \int f$.

Theorem 2.3.4 ▶ 控制收敛定理 (The Dominated Convergence Theorem, DCT)

设 $\{f_n\}$ 是 L^1 中的序列, 满足

- $f_n \rightarrow f$ a.e.,
- 存在非负 $g \in L^1$ 使得对所有 n 有 $|f_n| \leq g$ a.e..

则 $f \in L^1$ 且 $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

证明. 设测度空间为 $(X, \mathcal{M}, \mu)$, f_n 均 $\mathcal{M}$ -可测, 将测度空间完备化为 $(X, \overline{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$, 则 f_n 也是 $\overline{\mathcal{M}}$ -可测的, 且 $f_n \rightarrow f$ $\bar{\mu}$ -a.e.. 由命题 2.11 得 f 在 $(X, \overline{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ 中可测, 再由命题 2.12 可得存在 $\hat{f}$ 是 $\mathcal{M}$ -可测的, 满足 $f = \hat{f}$ $\bar{\mu}$ -a.e. 记 $A = \{x : f(x) \neq \hat{f}(x)\} = E \cup F$, $E \in \mathcal{M}, F \in N, \mu(N) = 0$, 则 $\bar{\mu}(A) = \mu(E) = 0$, 于是 $A \subset E \cup N, \mu(E \cup N) = 0$, 且在 $(E \cup N)^c$ 上有 $f = \hat{f}$. 修改 $\hat{f}$ 在 $E \cup N$ 上的值, 可使得 $f = \hat{f}$ μ -a.e.. 因此在积分意义下 f 与 $\hat{f}$ 在原空间上等同, 从而 f 是可测的.

由条件可得 $|f| \leq g$ a.e., 于是有 $f \in L^1$. 取实部和虚部后可设 f_n 和 f 均是实值的, 此时有



$g + f_n \geq 0$ a.e. 和 $g - f_n \geq 0$ a.e.. 故由 Fatou 引理得,

$$\begin{aligned}\int g + \int f &\leq \liminf \int (g + f_n) = \int g + \liminf \int f_n, \\ \int g - \int f &\leq \liminf \int (g - f_n) = \int g - \limsup \int f_n.\end{aligned}$$

因此, $\liminf \int f_n \geq \int f \geq \limsup \int f_n$, 结论成立.

Theorem 2.3.5

设 $\{f_j\}$ 是 L^1 中的序列, 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty$. 则 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ a.e. 收敛于 L^1 中的函数, 且 $\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j$.

证明. 由定理 2.15, $\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty$, 故函数 $g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L^1$. 特别地, 由命题 2.20, $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|$ 对几乎所有 x 有限, 从而对每个这样的 x , 级数 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ 收敛. 此外, 对所有 n 均有 $\left| \sum_{j=1}^n f_j \right| \leq g$, 故可对部分和序列应用控制收敛定理, 得 $\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j$.

Theorem 2.3.6

若 $f \in L^1(\mu)$ 且 $\varepsilon > 0$, 则存在可积简单函数 $\phi = \sum a_j \chi_{E_j}$ 使得 $\int |f - \phi| d\mu < \varepsilon$ (即可积简单函数在 L^1 度量下稠密于 L^1). 若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度, ϕ 的定义中的集合 E_j 可取为有限个开区间的并. 此外, 存在在有界区间外为 0 的连续函数 g 满足 $\int |f - g| d\mu < \varepsilon$.

证明. 设 $\{\phi_n\}$ 如定理 2.10(b). 因 $|\phi_n - f| \leq 2|f|$, 由控制收敛定理可得, 当 n 充分大时, $\int |\phi_n - f| < \varepsilon$. 若 $\phi_n = \sum a_j \chi_{E_j}$, 其中 E_j 互不相交且 $a_j \neq 0$, 注意到 $\mu(E_j) = |a_j|^{-1} \int_{E_j} |\phi_n| \leq |a_j|^{-1} \int |f| < \infty$. 此外, 若 E 和 F 是可测集, 则 $\mu(E \Delta F) = \int |\chi_E - \chi_F|$. 因此若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度, 由命题 1.20 可在 L^1 度量下用开区间 I_k 的特征函数的有限和任意逼近 χ_{E_j} . 最后, 若 $I_k = (a, b)$, 可在 L^1 度量下用在有界区间 (a, b) 外为零的连续函数逼近 χ_{I_k} (例如, 给定 $\varepsilon > 0$, 取连续函数 g 在 $(-\infty, a]$ 和 $[b, \infty)$ 上为零, 在 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 上为 1, 在 $[a, a + \varepsilon]$ 和 $[b - \varepsilon, b]$ 上线性).

综上, 定理得证.

下面定理给出交换极限或导数与积分的准则.

**Theorem 2.3.7**

设 $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($-\infty < a < b < \infty$), 且对每个 $t \in [a, b]$, $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{C}$ 可积. 令 $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$.

a. 设存在 $g \in L^1(\mu)$ 使得对所有 x, t 有 $|f(x, t)| \leq g(x)$. 若对每个 x 有 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$, 则 $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$. 特别地, 若对每个 x 有 $f(x, \cdot)$ 连续, 则 F 连续.

b. 设 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 存在, 且存在 $g \in L^1(\mu)$ 使得对所有 x, t 有 $\left| \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)(x, t) \right| \leq g(x)$. 则 F 可微且 $F'(t) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)(x, t) d\mu(x)$.

证明. (a): 对任意收敛于 t_0 的序列 $\{t_n\} \subset [a, b]$, 应用控制收敛定理于 $f_n(x) = f(x, t_n)$.

(b): 注意到

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x), \quad h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0},$$

$\{t_n\}$ 仍为任意收敛于 t_0 的序列. 故 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 可测, 且由中值定理,

$$|h_n(x)| \leq \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x),$$

故可再次使用控制收敛定理

$$F'(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

上述证明中使用序列收敛至 t_0 的技巧在技术上是必要的, 因控制收敛定理仅处理函数序列. 但在类似情形下, 我们通常直接说“令 $t \rightarrow t_0$ ”, 并理解其基础是序列收敛.

在定理 2.27 中, 满足 f 或 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 估计的区间 $[a, b]$ 可能是 $f(x, \cdot)$ 在其上有定义的开区间 I (可能 $I = \mathbb{R}$) 的真子区间. 若 (a) 或 (b) 的假设对所有 $[a, b] \subset I$ 成立 (可能支配函数 g 依赖于 a 和 b), 则可得积分函数 F 在整个 I 上的连续性或可微性, 因这些性质是局部的.

特殊情形下, 当测度 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度时, 我们创造的积分称为 Lebesgue 积分. 现需研究 Lebesgue 积分与 Riemann 积分在 $\mathbb{R}$ 上的关系. 我们将使用 Darboux 关于 Riemann 积分的上下和的刻画.

Definition 2.3.8 ▶ 划分、Riemann 积分与 Riemann 可积

设 $[a, b]$ 是紧区间. $[a, b]$ 的划分 (partition) 是指一个有限序列 $P = \{t_j\}_{j=0}^n$ 满足 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.



设 f 是 $[a, b]$ 上的任意有界实值函数. 对每个划分 P , 定义

$$S_P f = \sum_{j=1}^n M_j(t_j - t_{j-1}), \quad s_P f = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}),$$

其中 M_j 和 m_j 是 f 在 $[t_{j-1}, t_j]$ 上的上确界和下确界. 然后定义

$$\overline{I}_a^b f = \inf_P S_P f, \quad \underline{I}_a^b f = \sup_P s_P f,$$

其中下确界和上确界取遍所有划分 P . 若 $\overline{I}_a^b f = \underline{I}_a^b f$, 其公共值即为 **Riemann 积分 (Riemann integral)** $\int_a^b f(x)dx$, 且 f 称为 **Riemann 可积 (Riemann integrable)** 的.

Theorem 2.3.9

设 f 是 $[a, b]$ 上的有界实值函数. 若 f Riemann 可积, 则 f Lebesgue 可测 (故因有界而在 $[a, b]$ 上可积), 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$.

证明. 设 f Riemann 可积. 对每个划分 P , 令

$$G_P = \sum_{j=1}^n M_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}, \quad g_P = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$$

(记号同上), 故 $S_P f = \int G_P dm$ 且 $s_P f = \int g_P dm$. 存在划分序列 $\{P_k\}$, 其网径 (即 $\max_j(t_j - t_{j-1})$) 趋于 0, 且每个划分包含前一个 (故 g_{P_k} 递增而 G_{P_k} 递减), 使得 $S_{P_k} f$ 和 $s_{P_k} f$ 收敛至 $\int_a^b f(x)dx$. 令 $G = \lim_{k \rightarrow \infty} G_{P_k}$ 和 $g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{P_k}$. 则 $g \leq f \leq G$, 且由控制收敛定理, $\int G dm = \int g dm = \int_a^b f(x)dx$. 故 $\int (G - g) dm = 0$, 由命题 2.16 知 $G = g$ a.e., 从而 $G = f$ a.e.. 因 G 可测 (是可测简单函数序列的极限) 且 m 完备, 故 f 可测, 且 $\int_{[a,b]} f dm = \int G dm = \int_a^b f(x)dx$.



Index

Definitions

0.1.1 一些常见符号	3
0.1.2 Cartesian 积与坐标映射	3
0.2.1 偏序与全序	3
0.2.2 序同构	4
0.2.3 极大 (小) 元与上 (下) 界	4
0.2.4 良序	4
0.3.1	7
0.3.6 可数 (可列) 与可数无限	9
0.3.9 连续统的势	9
0.5.1 扩张实数系	11
0.5.2 非负实数的 (不可数) 和	12
0.6.1 度量与度量空间	13
0.6.2 度量的等价性	13
0.6.3 球、开的与闭的	14
0.6.4 内部、闭包、稠密、无处稠密、可分 与收敛	14
0.6.6 连续与一致连续	15
0.6.8 柯西列与完备性	15
0.6.10 直径与有界	16
0.6.11 覆盖与完全有界	16
0.6.13 紧的	17
1.2.1 代数与 σ -代数	20
1.2.2 可数集 (或余可数集) 的 σ -代数	21
1.2.4 Borel σ -代数	21
1.2.6 乘积 σ -代数	22
1.2.11 基本集	24
1.3.1 测度与有限可加测度	24
1.3.2 可测空间、可测集与测度空间	25
1.3.3 有限、 σ -有限与半有限	25
1.3.5 零测集与几乎处处	27
1.3.6 完备 (测度)	28
1.4.1 外测度	28
1.4.3 μ^* -可测	29
1.4.5 预测度	31

1.5.1 Borel 测度	34
2.1.1 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -可测	42
2.1.4 $\mathcal{M}$ -可测、Lebesgue 可测与 Borel 可测	43
2.1.12 函数的正部、负部与极坐标分解	45
2.1.13 特征函数、简单函数与函数的标准 表示	45
2.2.1 积分	48
2.3.8 划分、Riemann 积分与 Riemann 可积	55

Lemmas

0.2.6 Zorn 引理	5
1.2.3	21
1.5.4	37
2.2.7 Fatou 引理	50

Theorems

0.3.4 Schröder-Bernstein 定理	8
1.3.4	26
1.3.7	28
1.4.4 Carathéodory 定理	30
1.4.14	32
1.5.5	37
1.5.6	38
1.5.8	39
2.1.14	46
2.2.3 单调收敛定理 (The Monotone Convergence Theorem, MCT)	49
2.2.4	49
2.3.4 控制收敛定理 (The Dominated Convergence Theorem, DCT)	53
2.3.5	54
2.3.6	54
2.3.7	55
2.3.9	56

Propositions

0.3.2	7
0.3.3	7
0.3.5	8
0.3.7	9
0.3.10	10
0.3.12	11
0.5.20	12
0.5.21	12
0.6.5	15
0.6.7	15
0.6.9	16
0.6.12	17
0.6.14	17
1.2.5	21
1.2.7	22
1.2.8	23
1.2.9	23
1.2.12	24
1.4.2	29
1.4.13	31
1.5.2	34
1.5.3	36
1.5.7	38
1.5.9	40
2.1.2	42
2.1.5	43
2.1.6	43
2.1.8	44
2.1.9	44

2.1.15	46
2.1.16	47
2.2.2	48
2.2.5	50
2.2.9	51
2.3.1	51
2.3.2	52
2.3.3	52

Corollarys

0.2.9	6
0.3.8	9
0.3.11	10
1.2.10	24
2.1.3	42
2.1.7	44
2.1.10	45
2.1.11	45
2.2.6	50
2.2.8	50

Axioms

0.2.8 选择公理	6
------------	---

Principles

0.2.5 Hausdorff 极大原理	5
0.2.7 良序原理	5