



常微分方程

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部

主编：李松泽、郭晨旭、但振鹏、刘彦麟

2026 年 5 月 10 日

写在前面的话

本笔记专为备考肖燕妮老师的《常微分方程》课程而整理，使用教材为周义仓等老师《常微分方程及其应用》。

需要强调的是，本笔记秉持“实用主义”原则，主要服务于高分目标。若想真正参透拓扑学的精髓，还需在笔记之外多拓展、多思考，并建议多与相关研究方向的学长学姐交流探讨。

教学内容是动态调整的。请务必结合当下的授课重点对本笔记进行补充和修正，防止因过度依赖旧资料（与本笔记“过拟合”）而遗漏新的考点。

目录

第一部分 一阶方程	4
1 线性方程	4
1.1 线性齐次方程	4
1.2 线性非齐次方程	5
1.3 Bernoulli 方程	5
2 变量可分离的方程	6
2.1 变量可分离方程的求解	6
2.2 齐次方程	7
3 全微分方程	8
3.1 全微分方程的定义与充要条件	8
3.1.1 定义	8



3.1.2 充要条件	8
3.2 全微分方程的积分	9
3.2.1 线积分法	9
3.2.2 偏积分法	9
3.2.3 凑微分法	9
3.3 积分因子	10
3.3.1 定义	10
3.3.2 积分因子的寻找方法	10

第二部分 隐式方程 13

4 变量替换法 13	13
4.1 其他变换	13
4.2 Ricatti 方程	14
5 一阶隐式微分方程 $F(x,y,y')=0$ 14	14
5.1 y' 可解	14
5.2 y 可解	14
5.3 x 可解	14
5.4 Clairaut 方程	14
5.5 不显含 x 或 y 的方程	15

第三部分 高阶方程 16

6 线性齐次常微分方程 16	16
7 某些特定变系数线性齐次常微分方程的解法 17	17
7.1 欧拉方程	17
7.2 降阶法	18
8 线性非齐次常系数方程的待定系数法 18	18
8.1 $f(t)$ 为多项式	18
8.2 $f(t)$ 为多项式与指数函数之积	19
8.3 $f(t)$ 为多项式与指数函数、正余弦函数之积	19

第四部分 微分方程组 20



9	基本定理	20
10	消元法和首次积分法	21
10.1	利用微分算子消元	21
10.2	首次积分法	22
11	常系数微分方程组	23
11.1	常系数线性齐次微分方程组	23
11.2	常系数线性非齐次微分方程组	27



第一部分 一阶方程

1 线性方程

一阶微分方程

$$y' + p(x)y = g(x). \quad (1)$$

关于未知函数 y 和其导数 y' 是线性的，故称为**线性方程**。本节讨论它的求解方法。

1.1 线性齐次方程

当方程 (1) 中右端函数 $g(x) = 0$ 时，称

$$y' + p(x)y = 0. \quad (2)$$

为**线性齐次方程**。对方程 (2) 两边同时乘以函数 $\exp\left(\int p(x) dx\right)$ 后得

$$y' \exp\left(\int p(x) dx\right) + p(x)y \exp\left(\int p(x) dx\right) = 0,$$

即

$$\left(y \exp\left(\int p(x) dx\right)\right)' = 0.$$

对上式两边积分，再整理后得方程 (2) 的通解为

$$y = C \exp\left(-\int p(x) dx\right).$$



1.2 线性非齐次方程

1. 积分因子法: 给方程两边乘以函数 $\exp\left(\int p(x)dx\right)$,

$$(y' + p(x)y) \exp\left(\int p(x)dx\right) = g(x) \exp\left(\int p(x)dx\right),$$

再对上式两边积分后整理得 (1) 的通解为

$$y = \exp\left(-\int p(x)dx\right) \left(C + \int g(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx\right),$$

其中, C 是任意常数. 2. 常数变易法: 先求出 (1) 对应的齐次方程的通解, 再把通解表达式中的任意常数 C 换为一个待定函数 $u(x)$, 即令

$$y = u(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right).$$

则

$$y' = u'(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right) - p(x)u(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right).$$

代入 (1) 整理得 $u(x)$ 满足

$$u'(x) = g(x) \exp\left(\int p(x)dx\right),$$

再积分得

$$u(x) = C + \int g(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx,$$

将 $u(x)$ 的表达式代回得通解的计算公式。

1.3 Bernoulli 方程

$$y' + p(x)y = g(x)y^\alpha \quad (3)$$

称为 **Bernoulli 方程**. 当 $\alpha = 0$ 时, (3) 本身就是线性方程, 当 $\alpha = 1$ 时, (3) 就是线性齐次方程. 当 $\alpha \neq 0, 1$ 时, 对方程 (3) 两边同乘以 $y^{-\alpha}$ (注意 y 是否可以为 0) 得

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = g(x). \quad (4)$$

令 $z = y^{1-\alpha}$, 方程 (4) 化为

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)g(x). \quad (5)$$

这是关于 z 的线性方程, 解得 z 后代入 $y = z^{1/(1-\alpha)}$. 即可. **例:** 求初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}, \quad y(1) = 1 \quad (6)$$

解: 这是一个 Bernoulli 方程, $\alpha = -1$. 两边同乘以 $2y$ 后令 $z = y^2$ 代入得

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x^2.$$



它的通解为

$$z = Cx + \frac{1}{2}x^3.$$

将 $z = y^2$ 代入得

$$y^2 = Cx + \frac{1}{2}x^3.$$

利用初始条件定出积分常数, 再解出 y 即可得到初始值问题 (6) 的解为

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(x + x^3)}.$$

2 变量可分离的方程

形如

$$y' = f(x)g(y) \quad (7)$$

的方程称为**变量可分离的方程**, 其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 分别是 x 和 y 的连续函数。(7) 的特点是方程右端是两个独立的一元函数之积。

2.1 变量可分离方程的求解

当 $g(y) \neq 0$ 时, 对方程 (7) 两边同除以 $g(y)$, 利用微分形式的不变性将 (7) 改写为

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (8)$$

对上式两边积分得到

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c. \quad (9)$$

这里把不定积分的任意常数明确地写出来了, 而把 $\int \frac{dy}{g(y)}$ 和 $\int f(x)dx$ 分别理解为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的某一个原函数。由 (9) 所确定的函数 $y = (x, c)$ 就是 (7) 的通解。注意, 在许多情况下, 不一定能从 (9) 明确解出 $y = (x, c)$, 这时 (9) 可以理解为 (7) 的**隐式解**。**注意:** 当 $g(y) = 0$ 时的 y 也可能为方程的解, 不要漏掉! **例:** 求微分方程

$$\frac{dx}{dt} = x \left(1 - \frac{x}{10}\right) \quad (10)$$

的所有解. 解: 方程两边同时除以 $x \left(1 - \frac{x}{10}\right)$, 再积分得

$$\int \frac{dx}{x \left(1 - \frac{x}{10}\right)} = \int dt + c_1$$

利用

$$\frac{1}{x \left(1 - \frac{x}{10}\right)} = \frac{1}{x} + \frac{1/10}{1 - \frac{x}{10}},$$

求出上面的积分得

$$\ln \left| \frac{x}{10 - x} \right| = t + c_1.$$



从上式中解出 x , 再将常数记为 c_2 得

$$x = \frac{10}{1 + c_2 e^t}, \quad c_2 \neq 0.$$

由 $x(1 - \frac{x}{10}) = 0$ 求出 (10) 的常数解为 $x = 0$ 和 $x = 10$, 故 (10) 的所有解为

$$x = \frac{10}{1 + c_2 e^t} \quad \text{和} \quad x = 0, x = 10.$$

2.2 齐次方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (11)$$

的方程称为齐次方程。令 $z = \frac{y}{x}$. 方程 (11) 就化为关于 z 的方程

$$z + x \frac{dz}{dx} = F(z), \quad (12)$$

整理后得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(z) - z}{x}. \quad (13)$$

(13) 是一个变量可分离的方程. 例: 求下面初始值问题的解:

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy, \quad y(1) = 0. \quad (14)$$

解:(14) 中方程是一个齐次方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

令 $y = xz$, 求导后代入方程得

$$x \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2},$$

分离变量得

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{x} dx.$$

积分上式得

$$\ln |z + \sqrt{1 + z^2}| = \ln |x| + \ln |C|.$$

整理后, 再用 $z = \frac{y}{x}$ 代入得

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx, \quad \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx.$$

最后利用初始条件 $y(1) = 0$ 可定出 $C = 1$. 代入上式后再解出 y , 即可得到初始值问题 (14) 的解为

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$



当方程的右端是一些线性分式函数时,也可以把它设法化为齐次方程来求解. 例: 求方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+3} \quad (15)$$

的通解. 解: 用坐标平移消去分子和分母中的常数, 令

$$x = u - 1, \quad y = v + 2.$$

代入式 (15) 后, 得到

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}.$$

这是一个齐次方程, 令 $v = uz$, 化为变量可分离的方程

$$u \frac{dz}{du} = \frac{1+z^2}{1-z}.$$

分离变量后积分

$$\begin{aligned} \frac{(1-z)dz}{1+z^2} &= \frac{du}{u}, \\ \arctan z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) &= \ln|u| + C. \end{aligned}$$

再将这些变量逐个还原, 整理后得原方程的通解为

$$\arctan \frac{y-2}{x+1} = \ln \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + C.$$

3 全微分方程

3.1 全微分方程的定义与充要条件

3.1.1 定义

若有函数 $F(x, y)$, 使得

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

则称

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (16)$$

为全微分方程. 此时, 微分方程 (16) 的解就是 $F(x, y) = C$.

3.1.2 充要条件

定理: 设函数 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 在一个矩形区域 R 中连续且有连续的一阶偏导数, 则 (16) 是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$



3.2 全微分方程的积分

当方程 (16) 是全微分方程时, 可以用三种方法来求解。

3.2.1 线积分法

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds.$$

3.2.2 偏积分法

例: 验证方程

$$(e^x + y)dx + (x - 2\sin y)dy = 0 \quad (17)$$

是全微分方程, 并求它的通解. 解: 由于

$$M(x, y) = e^x + y, \quad N(x, y) = x - 2\sin y,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

故 (17) 是全微分方程. 由于所求的函数 $F(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = e^x + y, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x - 2\sin y,$$

由偏导数的含意知只要将 y 看成常数, 将 $e^x + y$ 对 x 积分得

$$F(x, y) = \int (e^x + y) dx = e^x + xy + \varphi(y).$$

对 $F(x, y)$ 关于 y 求偏导得 $\varphi(y)$ 满足的方程为

$$x + \varphi'(y) = x - 2\sin y,$$

即 $\varphi'(y) = -2\sin y$, 只需取 $\varphi(y) = 2\cos y$ 即可, 所以方程 (17) 的通解为

$$e^x + xy + 2\cos y = C.$$

3.2.3 凑微分法

常用二元函数的全微分:

$$\begin{aligned} ydx + xdy &= d(xy), \\ \frac{ydx - xdy}{y^2} &= d\left(\frac{x}{y}\right), \\ \frac{-ydx + xdy}{x^2} &= d\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{ydx - xdy}{xy} &= d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= d\left(\arctan \frac{x}{y}\right), \\ \frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} &= \frac{1}{2}d\left(\ln \left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right). \\ e^x(dy + ydx) &= d(ye^x)\end{aligned}$$

例：验证方程

$$(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0, \quad (18)$$

是全微分方程，并求它满足初始条件 $y(0)=2$ 的解. 解: 对于方程 (18),

$$M(x, y) = \cos x \sin x - xy^2, \quad N(x, y) = y(1 - x^2),$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

故方程 (18) 是全微分方程，根据求二元函数微分的经验，将方程 (18) 重新分组整理得

$$\cos x \sin x dx - (xy^2 dx + yx^2 dy) + ydy = 0.$$

注意到

$$\cos x \sin x dx = d\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right), \quad xy^2 dx + yx^2 dy = d\left(\frac{1}{2}x^2 y^2\right), \quad ydy = d\left(\frac{1}{2}y^2\right),$$

所以，方程 (18) 的通解为

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

利用初始条件 $y(0) = 2$ 得 $C = 4$ ，最后得所求初始值问题的解为

$$\sin^2 x + y^2(1 - x^2) = 4.$$

3.3 积分因子

3.3.1 定义

如果有函数 $\mu(x, y)$ ，使得方程

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

是全微分方程，则 $\mu(x, y)$ 称为方程 (16) 的一个积分因子。

3.3.2 积分因子的寻找方法

1. 定理：微分方程 (16) 有一个仅依赖于 x 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}$$



仅与 x 有关. 同理, 微分方程 (16) 有一个仅依赖于 y 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$$

仅与 y 有关. **2. 几个常用积分因子** 下面的几个方程和对应的积分因子分别为

$$\begin{aligned} xdy - ydx + xydx &= 0, & \frac{1}{xy}, \\ xdy - ydx + x^2dy &= 0, & \frac{1}{x^2}, \\ xdy - ydx + y^2dy &= 0, & \frac{1}{y^2}, \\ xdy - ydx + (x^2 + y^2)dy &= 0, & \frac{1}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

例: 求微分方程

$$(3x^2 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0. \quad (19)$$

的通解。解：由于

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2(1 - 2xy),$$

所以方程不是全微分方程。将它的左端重新分组得

$$(3x^2dx + 2x^2ydy) + (ydx - xdy) = 0.$$

根据求积分因子的经验, $ydx - xdy$ 有前面提到的 4 个函数可以选择。再考虑到前面的这一组, 可以看出 $\frac{1}{x^2}$ 是 $3x^2dx + 2x^2ydy$ 的积分因子。所以选择 $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2}$ 作为方程的积分因子, 方程两边同乘以 $\frac{1}{x^2}$ 后得

$$3xdx + 2ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2} = 0.$$

由此可求得 (19) 的通解为

$$\frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{y}{x} = C.$$

3. 分组求积分因子 设微分方程 (16) 的左端可以分为两组, 即

$$(M_1(x,y)dx + N_1(x,y)dy) + (M_2(x,y)dx + N_2(x,y)dy) = 0, \quad (20)$$

其中, 第一组和第二组各有积分因子 $\mu_1(x,y)$ 和 $\mu_2(x,y)$, 使得

$$\begin{aligned} \mu_1(x,y)(M_1(x,y)dx + N_1(x,y)dy) &= dF_1(x,y), \\ \mu_2(x,y)(M_2(x,y)dx + N_2(x,y)dy) &= dF_2(x,y). \end{aligned}$$

由于对任意可微函数 $G_1(u)$ 和 $G_2(u)$, $\mu_1(x,y)G_1(F_1(x,y))$ 是第一组的积分因子, $\mu_2(x,y)G_2(F_2(x,y))$ 是第二组的积分因子。如果能选取 $G_1(u)$ 和 $G_2(u)$, 使得

$$\mu(x,y) = \mu_1(x,y)G_1(F_1(x,y)) = \mu_2(x,y)G_2(F_2(x,y)),$$



则 $\mu(x, y)$ 就是方程 (20) 的一个积分因子。例：求微分方程

$$(x^3y - 2y^2)dx + x^4dy = 0. \quad (21)$$

的通解。解：将方程左端分组

$$(x^3ydx + x^4dy) - 2y^2dx = 0.$$

前一组有积分因子 $\frac{1}{x^2}$ 和通积分 $xy = C$ ，后一组有积分因子 $\frac{1}{y^2}$ 和通积分 $x = C$ 。要寻找可微函数 G_1 和 G_2 ，使

$$\frac{1}{x^2}G_1(xy) = \frac{1}{y^2}G_2(x).$$

只要取

$$G_1(xy) = \frac{1}{(xy)^2}, \quad G_2(x) = \frac{1}{x^5},$$

从而得到原方程的积分因子

$$\mu = \frac{1}{x^5y^2}.$$

然后用它乘方程 (21) 得到

$$\frac{1}{(xy)^2}d(xy) - \frac{2}{x^5}dx = 0.$$

积分此式，不难求得方程的通解为

$$y = \frac{2x^3}{2Cx^4 + 1},$$

其中， C 为任意常数。外加持解 $x = 0$ 和 $y = 0$ ，它们是在用积分因子乘方程时丢失的解。



第二部分 隐式方程

4 变量替换法

形如 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$, 令 $z = ax + by + c$, 则

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + bf(z).$$

特例: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

a. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, 则

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{c_1 - \frac{a_1}{a_2}c_2}{a_2x+b_2y+c_2}\right) := \varphi(a_2x+b_2y+c_2).$$

b. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, 则可找到 x_0, y_0 , 使得

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} = \frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)}{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)}.$$

令 $X = x - x_0, Y = y - y_0$, 则原方程化为齐次方程. 形如 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$, 令 $z = xy$, 则

$$y = \frac{z}{x}, \quad dy = \frac{\frac{dz}{dx}x - z}{x^2}dx = \frac{x\frac{dz}{dx} - z}{x^2}dx.$$

从而代入并化简有变量可分离方程

$$\frac{z}{x}(f(z) - g(z))dx + g(z)dz = 0.$$

4.1 其他变换

:

有开方将被开方数作为整体, 否则凑微分或三角换元.

- $(\sqrt{\frac{y}{x}} - y)dx + (x - 1)dy = 0$: 令 $z = \frac{y}{x}$.
- $\frac{dy}{dx} + x = \sqrt{x^2 + y}$: 令 $z = \sqrt{x^2 + y}$.
- $(x + y)(xdy + ydx) = xy(dx + dy)$: 令 $u = x + y, v = xy$.
- $\frac{dy}{dx} + x(\sin 2y - x^2 \cos^2 y) = 0$: 两边同除 $\cos^2 y$ 产生 $\tan y$. $z = \tan y$.
- $\frac{dy}{dx} = \tan x(\tan y + \sec x \sec y)$: 令 $z = \cos x \sin y$,



4.2 Ricatti 方程

Ricatti 方程: $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + f(x)$:

a. p, q, f 常数: 变量可分离方程.

b. $p(x) = 0$: 线性方程.

c. $f(x) \equiv 0$: Bernoulli 方程.

d. $\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{1}{x}y + \frac{b}{x^2}$: 令 $z = xy$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx}x - z}{x^2},$$

代入得变量可分离方程:

$$x \frac{dz}{dx} = -az^2 + (l+1)z + b.$$

5 一阶隐式微分方程 $F(x, y, y') = 0$

5.1 y' 可解

$(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0 \Rightarrow (y' - x)(y' - y) = 0$ 化为显式方程.

5.2 y 可解

$y = f(x, y')$, 令 $z = y'$, 则 $y = f(z, x)$, 两边同时对 x 求导: $z = \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \frac{dz}{dx}$. 这是关于 z 的一阶显式方程, 求出 z 进而求 y .

例 1. $y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$ 化为 $(2z - x)(\frac{dz}{dx} - 1) = 0$.

5.3 x 可解

$x = f(y, y')$, 令 $z = y'$, 则 $x = f(y, z)$.

两边同时对 y 求导: $\frac{1}{z} = \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} \frac{dz}{dy}$. 这是关于 z 的一阶方程, 求出 z 进而求 y .

5.4 Clairaut 方程

$y = xy' + \varphi(y')$, 令 $z = y'$, $y = xz + \varphi(z)$.

两边对 x 求导有 $z = z + x \frac{dz}{dx} + \varphi'(z) \frac{dz}{dx}$. 从而 $(x + \varphi'(z)) \frac{dz}{dx} = 0$.



5.5 不显含 x 或 y 的方程

以不显含 x 为例: $f(y, y') = 0$: 令 $p = y'$, 则 $f(y, p) = 0$, 令 $y = \psi(t)$, $p = h(t)$, 令 $x = \varphi(t)$:
 $h(t) = p = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, 从而产生参数解 $\varphi(t) = \int \frac{\psi'(t)}{h(t)} + C$, $y = \psi(t)$.

例 2. $x^2 - 3p^2 = 1$

令 $x = pt$, 则 $(t^2 - 3)p^2 = 1$, 则 $p = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - 3}}$ 或 $k = \pm \sqrt{3}$.



第三部分 高阶方程

6 线性齐次常微分方程

我们先定义复值函数的概念：如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是区间 (a, b) 上的实值函数， $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位，那么称 $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ 为该区间上的复值函数。

如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (a, b) 上连续，我们称 $z(t)$ 在区间 (a, b) 上连续，类似地定义 $z(t)$ 在区间 (a, b) 上可微。不难验证实值函数的微分四则运算法则对于复值函数仍然成立。

定理 1. Euler 公式： $e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t$

现在我们考虑系数是常数的齐次线性方程的求解问题：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

该常微分方程的特征方程为 $F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$

解出该特征方程的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则关于原常微分方程的解，我们有如下定理：

定理 2.

- (1) 对于每一个单实根 λ_k ，方程有解 $e^{\lambda_k t}$ 。
- (2) 对于每一个 $m > 1$ 重根 λ_k ，方程有 m 个解 $e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, t^2 e^{\lambda_k t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda_k t}$
- (3) 对于每一个重数为 1 的共轭复根 $\alpha \pm i\beta$ ，原方程有解： $e^{\alpha t} \sin \beta t, e^{\alpha t} \cos \beta t$
- (4) 对于每一个重数为 $m > 1$ 的共轭复根 $\alpha \pm i\beta$ ，方程有 $2m$ 个如下形式的解：

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, t^2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

例 3.

求方程 $\frac{d^4 x}{dt^4} - 1 = 0$ 的通解。

解：特征方程 $\lambda^4 - 1 = 0$ 有四个解 $1, -1, i, -i$ ，有两个实根与两个复根，均是单根，因此方程的通解为

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \sin t + c_4 \cos t$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 是任意常数。



7 某些特定变系数线性齐次常微分方程的解法

7.1 欧拉方程

欧拉方程为如下形式的常微分方程:

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

通过自变量替换 $|t| = e^u$, 即 $u = \ln|t|$, 可以把原方程变为常系数齐次微分方程的形式.

例 4.

求解方程 $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} + x = 0$

解: 设 $u = \ln|t|$, 则

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dx}{du}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d(\frac{dx}{du})}{du} \frac{du}{dt} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2 x}{du^2} - \frac{dx}{du} \right)$$

把上式代入原方程得到 $\frac{d^2 x}{du^2} - 2 \frac{dx}{du} + x = 0$. 此方程通解为

$$x(t) = (c_1 + c_2 u) e^u$$

其中 c_1, c_2 是任意常数, 故原方程通解为

$$x(t) = (c_1 + c_2 \ln|t|) |t|$$

定理 3.

考虑二阶变系数线性方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

该方程可以经过线性齐次变换 $x = \exp(-\frac{1}{2} \int p(t) dt) y(t)$ 化为方程

$$y'' + [q(t) - \frac{1}{4} p^2(t) - \frac{1}{2} p'(t)] y = 0$$

特别的, $I(t) = q(t) - \frac{1}{4} p^2(t) - \frac{1}{2} p'(t)$ 为常数时, 原方程可以化为一个常系数线性齐次常微分方程求解.

例 5.

求方程 $t^2 x'' + tx' + (t^2 - \frac{1}{4})x = 0$ 的通解

解: 这里 $p(t) = \frac{1}{t}, q(t) = 1 - \frac{1}{4t^2}$, 且 $I(t) = q(t) - \frac{1}{4} p^2(t) - \frac{1}{2} p'(t) = 1$ 因此令 $x = \exp(-\frac{1}{2} \int p(t) dt) y = \frac{y}{\sqrt{t}}$, 我们就有 $y'' + y = 0$, 求得通解为

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

于是原方程的通解为 $x = c_1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + c_2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$.



7.2 降阶法

我们知道, 一个一元 n 次代数方程, 如果已经知道 1 个跟, 那么就可以通过因式分解将其变为 $n-1$ 次方程, 从此受到启发, 我们对于 n 阶线性齐次常微分方程, 有如下定理:

定理 4. 若 $x = x_1(t)$ 是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$$

的一个非零解, 那么通过线性变换 $x = x_1(t)y$ 以及 $u = y'$, 可以得到 $n-1$ 阶线性齐次常微分方程

$$\frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + b_1(t) \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(t)u = 0$$

例 6.

求方程 $tx'' - tx' + x = 0$ 的通解.

解: 观察发现 $x = t$ 为一个特解, 做变换 $x = ty$, 代入得 $t^2 y'' + (2t - t^2)y' = 0$. 再令 $u = y'$, 就有 $t^2 u' + (2t - t^2)u = 0$.

积分得

$$u = c_1 \frac{e^t}{t^2}, y = c_1 \int \frac{e^t}{t^2} dt + c_2$$

于是另一解 $x_2(t) = t \int \frac{e^t}{t^2} dt$, 显然这两解线性无关, 于是原方程通解为 $x = c_1 t + c_2 t \int \frac{e^t}{t^2} dt$

8 线性非齐次常系数方程的待定系数法

我们经常会遇到求解如下形式的常系数方程:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

其中 $f(t)$ 为非零函数, 我们已经知道由常数变易法可以求得该方程的一个特解, 进而求得通解, 下面我们对于一些特殊形式的 $f(t)$ 给出待定系数法的解法. 为了简便, 我们仅考虑二阶方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = f(t)$.

8.1 $f(t)$ 为多项式

针对此种情况, 我们有如下定理:

定理 5.

$f(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ 时, 原方程的一个特解 $\varphi(t)$ 的表达式为:

$$\varphi(t) = \begin{cases} B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n, & q \neq 0 \\ t(B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n), & q = 0, p \neq 0 \\ t^2(B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n), & q = p = 0 \end{cases}$$



8.2 $f(t)$ 为多项式与指数函数之积

$f(t) = (b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n)e^{\alpha t}$ 时, 我们希望将 $e^{\alpha t}$ 消去, 于是设 $x(t) = e^{\alpha t}y(t)$, 代入得到新的方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2\alpha + p)\frac{dy}{dt} + (\alpha^2 + p\alpha + q)y = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n$$

结合上小节定理, 我们有如下定理:

定理 6.

原方程的一个特解 $\varphi(t)$ 的表达式为:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n)e^{\alpha t}, & \alpha^2 + p\alpha + q \neq 0 \\ t(B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n)e^{\alpha t}, & \alpha^2 + p\alpha + q = 0, 2\alpha + p \neq 0 \\ t^2(B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n)e^{\alpha t}, & \alpha^2 + p\alpha + q = 0, 2\alpha + p = 0 \end{cases}$$

或者可以简记为下:

α 为方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的 k 重根 ($k = 0, 1, 2$) 时, 原方程的一个特解为

$$\varphi(t) = t^k(B_0 + B_1t + \cdots + B_nt^n)e^{\alpha t}$$

8.3 $f(t)$ 为多项式与指数函数、正余弦函数之积

最后来考虑 $f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$ 的情况. 其中 $A(t), B(t)$ 为多项式。

由欧拉公式, 设

$$\frac{A(t) - iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} = f_1(t), \frac{A(t) + iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t} = f_2(t)$$

我们就有 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, 且 $\overline{f_1(t)} = f_2(t)$.

于是只要根据定理 3.2.2 求出 $\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f_1(t)$ 的一个特解 $x_1(t)$, 原方程的一个特解就是 $\varphi(t) = x_1(t) + \overline{x_1(t)}$.



第四部分 微分方程组

9 基本定理

定义 1: 含有 n 个未知函数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一阶微分方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

定理 1: 解的存在唯一性定理

设 $A(t)$ 和 $F(t)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续, 则如下初始值问题在区间 (a, b) 内存在唯一的解 $x = x(t)$ 。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t), \\ x(t_0) = x_0 \quad t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

利用 Picard 迭代和矩阵范数

定理 3 设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ($t \in [a, b]$) 是线性齐次方程组的任意 n 个解, 则它们的 Wronskian 行列式 $W(t)$ 可表为

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s) ds \right), \quad t_0 \in [a, b].$$

定理 4 线性齐次方程组的解组 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ($t \in [a, b]$) 线性相关的充要条件是它们的 Wronskian 行列式 $W(t) \equiv 0, \forall t \in [a, b]$.

定理 5 (通解结构定理) 设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是方程组 (4.3.2) 的 n 个线性无关的解, 则

- (1) $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$ 是方程组 (4.3.2) 的通解, 其中 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 是任意常数;
- (2) 线性齐次方程组的任一解 $x(t)$ 均可表为 $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 的线性组合。

定理 6 线性齐次微分方程组一定存在 n 个线性无关的解。



证明: 根据解的存在唯一性定理, 方程组一定存在满足初始条件的

$$x_1(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad x_n(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t) (t \in [a, b])$ 且以该解组作出的 Wronskian 行列式在 t_0 处的取值为 $W(t_0) = 1 \neq 0$ 。因此, 由推论 4.2 知 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在 $[a, b]$ 上线性无关。

定理 7(非齐次方程组通解结构定理) 设 $\Phi(t)$ 是线性非齐次方程组的一个基本解矩阵, $\varphi_0(t)$ 是非齐次方程组的某一解, 则非齐次线性方程组的任一解 $\varphi(t)$ 都可表示为

$$\varphi(t) = \Phi(t)c + \varphi_0(t),$$

其中, c 是确定的常数列向量。

10 消元法和首次积分法

10.1 利用微分算子消元

微分方程组

$$\begin{cases} L_1 x_1 + L_2 x_2 = g_1(t), \\ L_3 x_1 + L_4 x_2 = g_2(t). \end{cases}$$

用算子 L_3 作用第一个方程的两边, 用算子 L_1 作用第二个方程的两边得

$$\begin{cases} L_3 L_1 x_1 + L_3 L_2 x_2 = L_3 g_1(t), \\ L_1 L_3 x_1 + L_1 L_4 x_2 = L_1 g_2(t). \end{cases}$$

第二个方程减去第一个方程得

$$(L_1 L_4 - L_3 L_2)x_2 = L_1 g_2(t) - L_3 g_1(t).$$

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} 2x'_1 - 2x'_2 - 3x_1 = t, \\ 2x'_1 + 2x'_2 + 3x_1 + 8x_2 = 2. \end{cases}$$

解设 $L_1 = 2D - 3, L_2 = -2D, L_3 = 2D + 3, L_4 = 2D + 8, g_1(t) = t, g_2(t) = 2$, 则

$$L_1 g_2(t) = -6, \quad L_3 g_1(t) = 2 + 3t,$$



$$(L_1 L_4 - L_3 L_2)x_2 = 8\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 16\frac{dx_2}{dt} - 24x_2 = -8 - 3t.$$

由上面的方程得

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\frac{dx_2}{dt} - 3x_2 = -1 - \frac{3}{8}t,$$

该方程是一个二阶线性常系数非齐次微分方程, 其通解为

$$x_2 = c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + \frac{t}{8} + \frac{5}{12}.$$

将上述代入原方程组的第一个方程中得

$$2\frac{dx_1}{dt} - 3x_1 = t + \frac{1}{4} + 2c_1 e^t - 6c_2 e^{-3t}.$$

上面的方程又是一个一阶线性非齐次微分方程, 其通解为

$$x_1 = -\frac{t}{3} - \frac{11}{36} - 2c_1 e^t + \frac{2}{3}c_2 e^{-3t} + c_3 e^{3t/2}.$$

把 x_1 和 x_2 代入原系统的第二个方程得 $c_3 = 0$, 故原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 e^t + \frac{2}{3}c_2 e^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}, \\ x_2 = c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + \frac{t}{8} + \frac{5}{12}. \end{cases}$$

10.2 首次积分法

定义 2

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中, 右端函数 $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在某个区域 $D \subset R^{n+1}$ 内对 $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ 是连续的, 并且对 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是连续可微的。

设 $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在区域 D 内连续可微且不是常数, 若把方程组的任一解 $x_i = x_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 代入 $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ 成为与 t 无关的常数 (此常数与所取的解有关), 则称 $\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = c$ 为方程组的一个首次积分, 有时也称函数 $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是方程组的首次积分。

- $\varphi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ 为首次积分 $\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} f_n = 0$;
- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 相互独立才可求出通解, 此即

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0.$$

例 2 利用首次积分求方程组

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{(y-x)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{(y-x)^2}$$



的通解。

解: 由第一个方程和第二个方程相除得 $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ 。因此, 得到原方程组的一个首次积分

$$\psi_1 = x^2 - y^2 = c_1.$$

再利用第一个方程减去第二个方程得

$$\frac{d(x-y)}{dt} = \frac{-(x-y)}{(x-y)^2}.$$

把此方程中 $x-y$ 看成未知函数, 并积分得

$$\psi_2 = t + \frac{1}{2}(x-y)^2 = c_2.$$

因为

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -2(x-y)^2 \neq 0,$$

故首次积分 $\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2$ 是相互独立的, 所以原方程组的通解为

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1, \\ \frac{1}{2}(x-y)^2 + t = c_2. \end{cases}$$

11 常系数微分方程组

11.1 常系数线性齐次微分方程组

定理 8 若 A 有 n 个不同特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 并且其对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 则线性齐次方程组的通解为

$$x(t) = c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \alpha_n e^{\lambda_n t}.$$

例 3 求方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

的通解。

解: 该方程组对应的矩阵 A 的特征根满足

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 6 \\ -10 & 4-\lambda & -12 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-5) = 0.$$



因此, A 的特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ 。

对特征根 $\lambda_1 = 2$, 其对应的特征向量 α_1 满足

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \alpha_1 = \lambda_1 \alpha_1.$$

由上述可求得特征向量 $\alpha_1 = (1, -1, -1)^T$ 。同理, 可求得特征根 λ_2 和 λ_3 对应的特征向量分别为 $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T, \alpha_3 = (3, -6, -2)^T$ 。因此, 线性齐次方程组的通解为

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} e^{5t}.$$

定理 9 若实系数线性齐次方程组有复值解 $x(t) = u(t) + iv(t)$, 则其实部 $u(t)$ 和虚部 $v(t)$ 都是方程组的解。

定理 10 A 有重特征根, 记重特征根 λ 的特征向量为 $\vec{\alpha}_1$ 。

a. 若重数是 2: 记 $(A - \lambda I)\vec{\alpha}_1 = 0$, 求出 $\vec{\alpha}_1$; 另记 $(A - \lambda I)\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1$, 求出 $\vec{\alpha}_2$; 对应两解

$$\vec{x}_1(t) = \vec{\alpha}_1 e^{\lambda t}, \quad \vec{x}_2(t) = (\vec{\alpha}_2 + t\vec{\alpha}_1)e^{\lambda t}.$$

b. 若重数是 3: 记 $(A - \lambda I)\vec{\alpha}_1 = 0$, 求出 $\vec{\alpha}_1$; 另记 $(A - \lambda I)\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1$, 求出 $\vec{\alpha}_2$; 另记 $(A - \lambda I)\vec{\alpha}_3 = \vec{\alpha}_2$, 求出 $\vec{\alpha}_3$; 对应三解

$$\vec{x}_1(t) = \vec{\alpha}_1 e^{\lambda t}, \quad \vec{x}_2(t) = (\vec{\alpha}_2 + t\vec{\alpha}_1)e^{\lambda t}, \quad \vec{x}_3(t) = (\vec{\alpha}_3 + t\vec{\alpha}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{\alpha}_1)e^{\lambda t}.$$

定理 11 记 $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ 的解为 $\exp(At)$ 。 A 特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (可有相等的特征值), 则

$$\exp(At) = \sum_{i=0}^{n-1} r_{i+1}(t)P_i.$$

其中

$$P_0 = I, \quad P_1 = A - \lambda_1 I, \quad P_2 = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I), \quad \dots, \quad P_i = \prod_{j=1}^i (A - \lambda_j I), \quad \dots, \quad P_n = \prod_{j=1}^n (A - \lambda_j I).$$



且 $r_i(t)$ 是初值为 $r_1(0) = 1, r_2(0) = \cdots = r_n(0) = 0$ 的满足下列方程组的解:

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= \lambda_1 r_1(t), \\ r_2'(t) &= \lambda_2 r_2(t) + r_1(t), \\ r_3'(t) &= \lambda_3 r_3(t) + r_2(t), \\ &\dots \\ r_k'(t) &= \lambda_k r_k(t) + r_{k-1}(t), \\ &\dots \\ r_n'(t) &= \lambda_n r_n(t) + r_{n-1}(t). \end{aligned}$$

特别地, 仅一个特征值时,

$$\exp(At) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda I)^i.$$

例 4 求方程组

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

的通解。

解方程的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3 = 0,$$

因此, $\lambda = 1$ 是一个三重特征根, 其相应的特征向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ 满足方程组

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

从而得 $\alpha_1 = \alpha_3$, α_2 是任意的, 因此有两个特征向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

α_1 和 α_2 可作为 λ 的特征子空间的基, 方程有两个线性无关的解

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t.$$



下面寻找方程第三个线性无关的解 $x_3(t)$, 由定理 4.18 知必存在两个不全为零的常数 β_1 和 β_2 及向量 α_3 满足

$$(A - \lambda E)\alpha_3 = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2,$$

即有

$$\begin{cases} -\alpha_{13} + \alpha_{23} = \beta_1, \\ -\alpha_{13} + \alpha_{33} = \beta_2, \\ -\alpha_{13} + \alpha_{33} = \beta_3. \end{cases}$$

其中 $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}$ 是 α_3 的分量, 方程组有解的充要条件是 $\beta_2 = \beta_3$, 其中 β_1 是任意的。若选取 $\beta_2 = \beta_3 = 1$, 则方程组隐含

$$\alpha_{13} = -1 + \alpha_{33},$$

其中 α_{23} 和 α_{33} 是任意常数。选取 $\alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$, 则有 $\alpha_3 = (-1, 0, 0)^T$ 。因此, 获得方程的第三个解

$$x_3(t) = \alpha_3 e^t + (\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2)te^t.$$

因为上面所得 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 是线性无关的, 所以方程组的通解为

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t.$$

例 5 求解方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解因为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3,$$

故 $\lambda = 2$ 是 A 的三重特征根, 又因

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A - 2E)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则由公式得

$$\exp(At) = e^{2t} \left[E + t(A - 2E) + \frac{t^2}{2!}(A - 2E)^2 \right]$$



$$= e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t-\frac{t^2}{2} & t & -t+\frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & t \\ t-\frac{t^2}{2} & t & 1-t+\frac{t^2}{2} \end{bmatrix},$$

因而方程组的通解为

$$x(t) = \exp(At)c.$$

11.2 常系数线性非齐次微分方程组

定理 12 如果 $\Phi(t)$ 是齐次方程组的基解矩阵, 则

(1) 向量函数

$$\varphi(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds$$

是非齐次方程组的解, 并且满足初始条件 $\varphi(t_0) = 0$;

(2) 非齐次方程组的通解为

$$x(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds.$$

方程组满足初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 可由下面的公式给出:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)F(s)ds.$$

此式称为非齐次线性微分方程组的常数变易公式。

例 6 求方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

的通解。

解: $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{bmatrix}$ 是对应的齐次方程组的基解矩阵, 求 $\Phi(t)$ 的逆矩阵得 $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$ 。由常数变易公式得方程组的特解为

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s} & -e^{-s} \\ e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - 2e^{2t} + e^t \end{bmatrix},$$

所以原方程的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \Phi(t)c + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - 2e^{2t} + e^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ -c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{1}{2}(e^{3t} - 2e^{2t} + e^t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$