

拓扑学课程笔记

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部

主编：数试 2301 高翊翔, 魏熙成, 贾志斌; 数试 2201 孟铃翔



写在前面的话

本笔记专为备考张强老师的《拓扑学》课程而整理, 使用教材为尤承业老师《基础拓扑学讲义》. 针对该课程近几年出题规律难寻、题量较大 (只是预测) 的特点, 本笔记旨在提供高效的应试策略.

张老师的授课风格高度忠实于教材 (“照书画图讲解”), 因此, **熟练掌握课上内容, 尤其是老师补充的习题讲解**, 是得分的关键. 建议考前反复温习基本定义与定理, **提升熟练度**, 以便在考场上快速解决基础题, 为思考新颖、复杂的题目预留充足时间.

需要强调的是, 本笔记秉持”实用主义”原则, 主要服务于高分目标. 若想真正参透拓扑学的精髓, 还需在笔记之外多拓展、多思考, 并建议多与相关研究方向的学长学姐交流探讨.

教学内容是动态调整的. 请务必结合当下的授课重点对本笔记进行补充和修正, 防止因过度依赖旧资料 (与本笔记”过拟合”) 而遗漏新的考点.

最后, 除了这份资料外, 数试支部陈嵘汉同志还为大家录制了全套的拓扑学课程视频, 网址为:
<https://space.bilibili.com/488335741/lists/4819329?type=season>

关于大家最关心的考试, 我们在本文最后整理了 23 级数试考过的卷子, 和 21 级数试当时的一套补考题, 以供大家参考. 陈嵘汉同志在 b 站也更新了 23 级期末卷的视频, 网址为:
<https://www.bilibili.com/video/BV1RM7xz9E4g/>



目录

1 拓扑空间与连续映射	5
1.1 拓扑空间	5
1.1.1 拓扑空间的定义	5
1.1.2 度量拓扑	6
1.1.3 拓扑空间中的几个基本概念	7
1.1.4 子空间	9
1.2 连续映射与同胚映射	9
1.2.1 连续映射的定义	9
1.2.2 连续映射的性质	10
1.2.3 同胚映射	11
1.3 乘积空间与拓扑基	13
1.3.1 乘积空间	13
1.3.2 乘积空间的性质	13
1.3.3 拓扑基	14
2 几个重要的拓扑性质	16
2.1 分离公理与可数公理	16
2.1.1 T_3 公理和 T_4 公理	18
2.1.2 可数公理	19
2.1.3 拓扑性质的遗传性与可乘性	22
2.2 Urysohn 引理及其应用	22
2.2.1 Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理	22
2.2.2 Urysohn 度量化定理	23
2.3 紧致性	23
2.3.1 紧致与列紧	23
2.3.2 紧致度量空间	24
2.3.3 紧致空间的性质	25
2.3.4 Hausdorff 空间的紧致子集	26
2.3.5 乘积空间的紧致性	27
2.3.6 局部紧致与仿紧 (不考)	28
2.4 连通性	29
2.4.1 连通性的定义	29
2.4.2 连通空间的性质	30
2.4.3 连通分支	33
2.4.4 局部连通性 (不考)	33
2.5 道路连通性	34



2.5.1	道路	34
2.5.2	道路连通空间	35
2.5.3	道路连通分支	37
2.5.4	局部道路连通 (不考)	37
2.6	拓扑性质与同胚	37
3	商空间与闭曲面	40
3.1	几个常见曲面	40
3.2	商空间与商映射	42
3.3	拓扑流形与闭曲面	47
3.4	闭曲面分类定理	49
4	同伦与基本群	52
4.1	映射的同伦	52
4.2	基本群的定义	57
4.2.1	道路类的逆与乘积	57
4.2.2	道路类运算的性质	57
4.2.3	基本群及其同态	58
4.2.4	基本群与基点	60
4.3	S^n 的基本群	63
4.3.1	S^1 基本群的初等计算	63
4.3.2	S^n 单连通 ($n \geq 2$)	66
4.3.3	T^2 的基本群	67
4.4	基本群的同伦不变性	68
4.4.1	同伦映射诱导的基本群同态间的关系	68
4.4.2	拓扑空间的同伦等价	69
4.4.3	形变收缩核	71
4.4.4	可缩空间	80
4.5	基本群的计算与应用	82
4.5.1	Van-Kampen 定理	82
4.5.2	闭曲面分类补充证明	89
4.5.3	Brouwer 不动点定理	89
4.5.4	代数基本定理的证明	93
4.5.5	曲面上的边界点	93
4.6	Jordan 曲线定理	94
5	复叠空间	95
5.1	复叠空间及其基本性质	95
5.1.1	复叠映射与复叠空间	95
5.1.2	映射提升问题	100
6	期末考试卷	102



6.1	23 级数试考试题	102
6.2	21 级数试补考题	104



拓扑空间与连续映射

本章按照《基础拓扑学讲义》第一章的结构展开，分为三节：拓扑空间、连续映射与同胚映射、乘积空间与拓扑基。课本中明确给出的定义、命题、定理与典型例子均在下文中体现，习题部分暂不录入。

1.1 拓扑空间

映射的连续性刻画拓扑变换的关键概念，因此我们首先要寻找一种能够脱离距离而刻画“开集”的结构。所谓拓扑空间，就是在一个集合上指定哪些子集应被视为开集。

1.1.1 拓扑空间的定义

设 X 是一个非空集合，记 2^X 为 X 的幂集，即 X 的全体子集构成的集合。

Definition 1.1.1 ▶ 拓扑空间

设 X 是一个非空集合。 X 的一个子集族 $\tau \subseteq 2^X$ 称为 X 的一个**拓扑**，如果它满足：

- (1) $X \in \tau$ 且 $\emptyset \in \tau$;
- (2) τ 中任意多个成员的并仍属于 τ ;
- (3) τ 中有限多个成员的交仍属于 τ 。

集合 X 与拓扑 τ 一起称为一个**拓扑空间**，记作 (X, τ) ； τ 的成员称为这个拓扑空间的**开集**。

上面三个条件通常称为**拓扑公理**。其中关于有限交的条件也可以等价地写成： τ 中两个成员的交仍在 τ 中。

Example 1.1.2 ▶ 平凡拓扑与离散拓扑

对任意非空集合 X ，子集族 $\{X, \emptyset\}$ 是 X 上的一个拓扑，称为**平凡拓扑**；子集族 2^X 也是 X 上的一个拓扑，称为**离散拓扑**。

如果 $X = \{a, b, c\}$ ，那么除了平凡拓扑与离散拓扑以外，还可以规定许多别的拓扑，例如 $\{X, \emptyset, \{a\}\}$ 和 $\{X, \emptyset, \{a, b\}\}$ 都是 X 上的拓扑。

Example 1.1.3 ▶ 余有限拓扑

设 X 是一个无限集合，令 $\tau_f = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ 是有限集}\}$ 。则 τ_f 是 X 上的一个拓扑，称为 X 上的**余有限拓扑**。

说明. 容易验证 $\emptyset, X \in \tau_f$ 。若 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_f$ ，则 $(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus U_\alpha)$ ；右边是若干有限集的交，仍为有限集，故 $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau_f$ 。若 $U_1, \dots, U_n \in \tau_f$ ，则 $(\bigcap_{i=1}^n U_i)^c = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i)$ ；右边是有限



个有限集的并，仍为有限集，故 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_f$ 。

Example 1.1.4 ▶ 余可数拓扑

设 X 是一个不可数集合，令 $\tau_c = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ 是可数集}\}$ 。则 τ_c 是 X 上的一个拓扑，称为 X 上的余可数拓扑。

说明. 同样有 $\emptyset, X \in \tau_c$ 。若 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_c$ ，则 $(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus U_\alpha)$ ；右边是若干可数集的交，至多可数，故 $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau_c$ 。若 $U_1, \dots, U_n \in \tau_c$ ，则 $(\bigcap_{i=1}^n U_i)^c = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i)$ ；右边是有限个可数集的并，仍为可数集，故 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_c$ 。

Example 1.1.5 ▶ 欧氏拓扑

在实数集 $\mathbb{R}$ 上，令 τ_e 为所有开区间的任意并所成的子集族，则 τ_e 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑，称为 $\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑。更一般地， $\mathbb{R}^n$ 上由欧氏距离所诱导的拓扑称为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏拓扑。

1.1.2 度量拓扑

拓扑空间是欧氏空间与度量空间的推广，因此我们先回顾度量与度量空间的概念。

Definition 1.1.6 ▶ 度量与度量空间

设 X 是一个集合，映射 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 X 上的一个度量，如果对任意 $x, y, z \in X$ 都有：

- (1) $d(x, y) \geq 0$ ，且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ ；
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ ；
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

这时称 (X, d) 为一个度量空间。

$\mathbb{R}^n$ 上的欧氏距离是最基本的例子： $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ 。相应的度量空间记作 $E^n = (\mathbb{R}^n, d)$ ，称为 n 维欧氏空间。

设 (X, d) 为度量空间我们来规定 X 的一个拓扑。设 $x_0 \in X$ ， $\varepsilon > 0$ 。记以 x_0 为中心、 ε 为半径的球形邻域为 $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\}$ 。

Proposition 1.1.7 ▶ 球形邻域的交

在度量空间 (X, d) 中，任意两个球形邻域的交是若干球形邻域的并。更具体地说，若 $U = B(x_1, \varepsilon_1) \cap B(x_2, \varepsilon_2)$ ，则对每个 $x \in U$ ，存在 $\varepsilon_x > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon_x) \subseteq U$ 。

证明 对任意 $x \in U$ ，由于 $x \in B(x_1, \varepsilon_1)$ 且 $x \in B(x_2, \varepsilon_2)$ ，则我们很轻易得到 $\varepsilon_1 - d(x, x_1)$ 与 $\varepsilon_2 - d(x, x_2)$ 都为正。取 $\varepsilon_x = \min\{\varepsilon_1 - d(x, x_1), \varepsilon_2 - d(x, x_2)\}$ ，便有 $B(x, \varepsilon_x) \subseteq U$ 。

**Principle 1.1.8 ▶ 度量拓扑**

设 (X, d) 是度量空间。令 τ_d 为所有球形邻域并集所成的子集族，则 τ_d 是 X 上的一个拓扑。称 τ_d 为由度量 d 决定的**度量拓扑**。

证明可参照课本，本文不过多赘述。因此，每个度量空间都自然地给出一个拓扑空间。欧氏空间 E^n 上由欧氏距离诱导的拓扑称为**欧氏拓扑**。

1.1.3 拓扑空间中的几个基本概念

本节我们重点介绍闭集、内点、内部、聚点、闭包、稠密、可分以及序列收敛等基本概念。

Definition 1.1.9 ▶ 闭集

设 (X, τ) 是拓扑空间， $A \subseteq X$ 。如果 $A^c = X \setminus A$ 是开集，则称 A 是 X 的一个**闭集**。

Proposition 1.1.10 ▶ 闭集的基本性质

拓扑空间中，闭集满足以下三条性质：

- (1) X 与 $\emptyset$ 都是闭集；
- (2) 任意多个闭集的交集是闭集；
- (3) 有限多个闭集的并集是闭集。

证明 用开集性质即可证明。

Definition 1.1.11 ▶ 内点、邻域与内部

设 A 是拓扑空间 X 的一个子集， $x \in A$ 。如果存在开集 U 使得 $x \in U \subseteq A$ ，则称 x 是 A 的一个**内点**，并称 A 是 x 的一个**邻域**。 A 的所有内点所成的集合称为 A 的**内部**，记作 $\mathring{A}$ 或 A° 。

Proposition 1.1.12 ▶ 内部的性质

对任意子集 $A, B \subseteq X$ ，有如下结论：

- (1) 若 $A \subseteq B$ ，则 $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ ；
- (2) $\mathring{A}$ 是包含在 A 中的所有开集的并，因此它是包含在 A 中的最大开集；
- (3) $\mathring{A} = A$ 当且仅当 A 是开集；
- (4) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ ；
- (5) $(A \cup B)^\circ \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$ 。

课本给出了明确的推导过程。特别指出：有限个集合交的内部等于内部的交，但无穷个集合交时相应结论未必成立；同样，一般不能把 $(A \cup B)^\circ \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$ 中的包含号改成等号。

**Definition 1.1.13 ▶ 聚点、导集与闭包**

设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$ 。如果 x 的每个邻域都含有 $A \setminus \{x\}$ 中的点, 则称 x 是 A 的一个**聚点**。 A 的所有聚点构成的集合称为 A 的**导集**, 记作 A' 。集合 $\overline{A} = A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**。

由定义不难看出, $x \in \overline{A}$ 当且仅当 x 的每个邻域都与 A 相交。

Proposition 1.1.14 ▶ 闭包与内部互为余补

若 A 与 B 在 X 中互为余集, 即 $B = X \setminus A$, 则 $\overline{A}$ 与 $\overset{\circ}{B}$ 也互为余集。

Proposition 1.1.15 ▶ 闭包的性质

对任意子集 $A, B \subseteq X$, 有:

- (1) 若 $A \subseteq B$, 则 $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
- (2) $\overline{A}$ 是所有包含 A 的闭集的交, 因此它是包含 A 的最小闭集;
- (3) $\overline{A} = A$ 当且仅当 A 是闭集;
- (4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- (5) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ 。

说明 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 可以扩展为有限情况, 但是无限情况不成立, 即 $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$

反例是记有理数为 $r_1, r_2, \dots$, 记 $A_n = \{r_n\}$, 则

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \overline{\{r_1, r_2, \dots\}} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} = \{r_1, r_2, \dots\}$$

拓扑空间 X 的子集 A 称为**稠密的**, 如果 $\overline{A} = X$ 。如果 X 有一个可数稠密子集, 则称 X 是**可分拓扑空间**。

Example 1.1.16 ▶ 可分性的两个典型例子

在欧氏拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau_e)$ 中, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数稠密子集, 因此该空间可分; 在余可数拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau_c)$ 中, 每个可数子集都是闭集, 不可能稠密, 因此该空间不可分。

设 $\{x_n\}$ 是拓扑空间 X 中的一个序列, $x_0 \in X$ 。如果点 x_0 的每个邻域都包含序列的几乎所有项, 则称 $\{x_n\}$ **收敛** 到 x_0 , 记作 $x_n \rightarrow x_0$ 。

拓扑空间中的序列可能收敛到多个点。例如在余有限拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 中, 只要序列各项两两不同, 那么它就收敛到每一点。又例如在余可数拓扑空间中, 若 A 是不可数真子集, 则 $\overline{A} = \mathbb{R}$, 但 A 中的序列未必能够收敛到 A 的聚点。因此在一般拓扑空间里, 序列收敛不能像度量空间那样充分刻画许多



拓扑概念。因此我们一般避免在拓扑空间中用收敛性来处理问题。

1.1.4 子空间

Definition 1.1.17 ▶ 子空间拓扑

设 (X, τ) 是拓扑空间, $A \subseteq X$ 且 $A \neq \emptyset$ 。定义 A 的子集族 $\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$ 。则 τ_A 是 A 上的一个拓扑, 称为由 τ 导出的 A 上的子空间拓扑; 拓扑空间 (A, τ_A) 称为 (X, τ) 的子空间。

对于子空间中的开集与闭集, 必须说明是在子空间内看还是在全空间内看, 因为这些概念具有相对性。

Proposition 1.1.18 ▶ 子空间中的闭集刻画

设 X 是拓扑空间, $C \subseteq A \subseteq X$ 。则 C 是 A 的闭集, 当且仅当存在 X 的闭集 F 使得 $C = F \cap A$ 。

证明. 先证必要性。若 C 是 A 的闭集, 则 $A \setminus C$ 是 A 的开集。由子空间拓扑的定义, 存在 X 中的开集 U , 使得 $A \setminus C = U \cap A$ 。于是 $C = A \setminus (U \cap A) = A \cap U^c$ 。记 $F = U^c$, 则 F 是 X 的闭集, 且 $C = F \cap A$ 。

再证充分性。若存在 X 的闭集 F , 使得 $C = F \cap A$, 则 F^c 是 X 的开集, 从而 $A \setminus C = A \setminus (F \cap A) = A \cap F^c$ 。这表明 $A \setminus C$ 是 A 的开集, 因此 C 是 A 的闭集。

Proposition 1.1.19 ▶ 子空间中的开集与闭集

设 X 是拓扑空间, $B \subseteq A \subseteq X$ 。若 B 是 X 的开集 (闭集), 则 B 也是 A 的开集 (闭集); 若 A 是 X 的开集 (闭集), 而 B 是 A 的开集 (闭集), 则 B 也是 X 的开集 (闭集)。

证明. 先证第一部分。若 B 是 X 的开集, 并且 $B \subseteq A$, 则 $B = B \cap A$ 。由于 B 在 X 中开, 按子空间拓扑的定义, B 在 A 中也是开集。若 B 是 X 的闭集, 并且 $B \subseteq A$, 则 $B = B \cap A$ 。由命题 1.1.18 的闭集刻画, B 是 A 的闭集。

再证第二部分。若 A 是 X 的开集, 而 B 是 A 的开集, 则由子空间拓扑的定义, 存在 X 的开集 U , 使得 $B = U \cap A$ 。由于 U 与 A 都是 X 中的开集, 所以 B 也是 X 中的开集。若 A 是 X 的闭集, 而 B 是 A 的闭集, 则由命题 1.1.15, 存在 X 的闭集 F , 使得 $B = F \cap A$ 。由于 F 与 A 都是 X 中的闭集, 所以 B 也是 X 中的闭集。

1.2 连续映射与同胚映射

连续映射是拓扑学中另一个最基本的概念和研究对象。

1.2.1 连续映射的定义

和分析学中一样, 连续性是一种局部性概念。

**Definition 1.2.1 ▶ 一点处的连续性**

设 X, Y 都是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射, $x \in X$ 。如果对于 Y 中 $f(x)$ 的任一邻域 V , 原像 $f^{-1}(V)$ 总是 x 的邻域, 则称 f 在 x 处连续。

把上面定义中的“任一邻域 V ”改成“任一开邻域 V ”, 定义的意义不变。等价地说, f 在点 x 处连续, 当且仅当: 对包含 $f(x)$ 的每个开集 V , 都存在包含 x 的开集 U , 使得 $f(U) \subseteq V$ 。

Proposition 1.2.2 ▶ 限制映射的连续性

设 $f: X \rightarrow Y$ 是映射, $A \subseteq X$, $x \in A$, 记 $f_A = f|_A: A \rightarrow Y$ 为 f 在 A 上的限制, 则: 若 f 在 x 连续, 则 f_A 在 x 也连续; 若 A 是 x 的邻域, 则当 f_A 在 x 连续时, f 在 x 也连续。

证明见课本 P22, 这个命题说明映射在一点处的连续性只与这一点附近的情形有关。

Definition 1.2.3 ▶ 连续映射

如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 在每一点 $x \in X$ 处都连续, 则称 f 是一个连续映射。

Principle 1.2.4 ▶ 连续映射的等价刻画

设 $f: X \rightarrow Y$ 是映射, 下列条件互相等价: f 是连续映射; Y 的任一开集在 f 下的原像是 X 的开集; Y 的任一闭集在 f 下的原像是 X 的闭集。

注意, 虽然拓扑空间中也有序列收敛的概念, 但一般不能用它来刻画连续性。课本中给出了反例: 令 X 为一个带余可数拓扑的不可数空间, 令 Y 为离散空间, 取单射 $f: X \rightarrow Y$ 。则对每个收敛序列 $x_n \rightarrow x$ 都有 $f(x_n) \rightarrow f(x)$, 但 f 在任何点都不连续。

1.2.2 连续映射的性质

首先我们列举出来一些常见的连续映射:

- (1) 恒同映射 $\text{id}: X \rightarrow X$ 是连续映射。
- (2) 若 A 是 X 的子空间, 则包含映射 $i: A \rightarrow X$ 是连续映射。
- (3) 常值映射也是连续映射。
- (4) 如果 X 是离散拓扑空间, 或 Y 是平凡拓扑空间, 则任意映射 $f: X \rightarrow Y$ 都连续。

Proposition 1.2.5 ▶ 复合映射的连续性

设 X, Y, Z 都是拓扑空间, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 x 处连续, 映射 $g: Y \rightarrow Z$ 在 $f(x)$ 处连续, 则复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 在 x 处连续。特别地, 两个连续映射的复合仍是连续映射。

设 $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ 是拓扑空间 X 的一个子集族。如果 $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = X$, 则称 $\mathcal{C}$ 是 X 的一个覆盖。若覆盖中的每个成员都是开集 (闭集), 则称之为开覆盖 (闭覆盖); 若覆盖只含有限个成员, 则称之为有限覆盖。

**Principle 1.2.6 ▶ 粘接引理**

设 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是 X 的一个有限闭覆盖。如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 在每个 A_i 上的限制都连续, 则 f 是连续映射。

证明 只需验证 Y 的每个闭集在 f 下的原像是闭集。对 Y 的任一闭集 B , 有 $f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^n f_{A_i}^{-1}(B)$; 每个 $f_{A_i}^{-1}(B)$ 都是 A_i 的闭集, 而 A_i 本身又是 X 的闭集, 所以有限并仍为 X 的闭集。具体证明请参照课本。

1.2.3 同胚映射**Definition 1.2.7 ▶ 同胚映射**

如果 $f: X \rightarrow Y$ 是一一对应, 并且 f 及其逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 都连续, 则称 f 是一个**同胚映射**, 也称**拓扑变换**, 简称**同胚**。若存在 X 到 Y 的同胚映射, 则称 X 与 Y **同胚**, 记作 $X \cong Y$ 。

需要注意条件 f^{-1} 连续不可忽视, 它不能从“一一对应”和“ f 连续”推出。

Example 1.2.8 ▶ 开区间与 E^1 同胚

开区间 (作为 E^1 的子空间) 同胚于 E^1 。

可取同胚映射为

$$f(x) = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Example 1.2.9 ▶ 单位球体内部与 E^n 同胚

E^n 中单位球体 $D^n = \{x \in E^n \mid \|x\| \leq 1\}$ 的内部 $\dot{D}^n$ 同胚于 E^n 。

可取同胚映射为

$$f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}, \quad x \in \dot{D}^n,$$

其逆映射为

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \|y\|}, \quad y \in E^n.$$

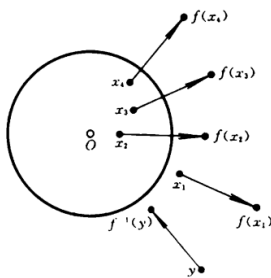
Example 1.2.10 ▶ 去掉原点后的欧氏空间

$E^n \setminus \{O\}$ 同胚于 $E^n \setminus D^n$ 。

可规定

$$f(x) = x + \frac{x}{\|x\|}, \quad x \in E^n \setminus \{O\}.$$

这个映射把每个点沿着过原点的射线向外平移一个单位长度。

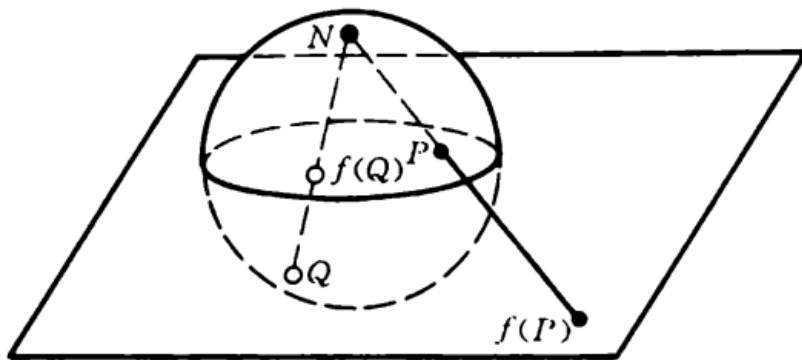


Example 1.2.11 ▶ 球面去一点后与平面同胚

球面 S^2 去掉一点后与 E^2 同胚。课本用球极投影给出这个同胚。

可取去北极点后的球极投影

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$



Example 1.2.12 ▶ 任意凸多边形都互相同胚

任意两个凸多边形（包含内部）互相同胚。

把两个凸多边形都分割成若干三角形，再在对应三角形之间建立仿射同胚，最后借助粘接引理把这些局部同胚拼接成整体同胚。

Example 1.2.13 ▶ 凸多边形与圆盘同胚

任意凸多边形都与闭圆盘 D^2 同胚。

只需要考虑正方形与圆盘同胚即可。

Definition 1.2.14 ▶ 嵌入映射

设 $f: X \rightarrow Y$ 是拓扑空间之间的映射。若 f 是单射、连续，并且当把 f 看成从 X 到其像空间 $f(X) \subseteq Y$ 的映射时， $f: X \rightarrow f(X)$ 是一个同胚映射，则称 f 为一个嵌入映射，也称 X 嵌入到 Y 中。



例如, 对任意子空间 $A \subseteq X$, 包含映射 $i: A \rightarrow X$ 是一个嵌入映射。

Definition 1.2.15 ▶ 拓扑概念与拓扑性质

在同胚映射下保持不变的概念称为**拓扑概念**; 在同胚映射下保持不变的性质称为**拓扑性质**。

例如开集、闭集、闭包、邻域、内点、内部、可分性等都属于拓扑概念或由它们刻画出来的拓扑性质。研究拓扑空间的同胚分类问题, 是拓扑学的基本任务之一。

1.3 乘积空间与拓扑基

1.3.1 乘积空间

设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一个子集族, 记由它生成的子集族为

$$\overline{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ 是 } \mathcal{B} \text{ 中若干成员的并}\}.$$

等价地, $U \in \overline{\mathcal{B}}$ 当且仅当对每个 $x \in U$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq U$ 。

现在设 (X_1, τ_1) 和 (X_2, τ_2) 是两个拓扑空间。

笛卡儿积 $X_1 \times X_2$ 上有两个自然的**投射** $j_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$, 定义为 $j_i(x_1, x_2) = x_i$ ($i = 1, 2$)。如果 $U_i \in \tau_i$, 则 $U_1 \times U_2 = (U_1 \times X_2) \cap (X_1 \times U_2) = j_1^{-1}(U_1) \cap j_2^{-1}(U_2)$, 因此任何使两个投射都连续的拓扑都必须包含所有 $U_1 \times U_2$ 这样的集合。

Proposition 1.3.1 ▶ 生成族给出拓扑

设 $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_i \in \tau_i\}$ 。则由 $\mathcal{B}$ 生成的子集族 $\overline{\mathcal{B}}$ 是 $X_1 \times X_2$ 上的一个拓扑。

Definition 1.3.2 ▶ 乘积拓扑与乘积空间

称上面得到的拓扑 $\overline{\mathcal{B}}$ 为 $X_1 \times X_2$ 上的**乘积拓扑**, 称拓扑空间 $(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{B}})$ 为 (X_1, τ_1) 与 (X_2, τ_2) 的**乘积空间**, 简记为 $X_1 \times X_2$ 。

用类似方法, 可以定义有限个拓扑空间的乘积空间。拓扑空间的“乘积”运算满足结合律。

1.3.2 乘积空间的性质

由定义可直接得到投射 $j_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ 的连续性。设 Y 是任意拓扑空间, $f: Y \rightarrow X_1 \times X_2$ 是映射, 记 $f_i = j_i \circ f: Y \rightarrow X_i$ 为 f 的两个分量。

Principle 1.3.3 ▶ 定理 1.3

对于任意拓扑空间 Y 和映射 $f: Y \rightarrow X_1 \times X_2$, 映射 f 连续, 当且仅当它的两个分量映射 f_1 与 f_2 都连续。

**Corollary 1.3.4 ▶ 乘积空间中的自然嵌入**

对任意 $b \in X_2$, 由 $x \mapsto (x, b)$ 规定的映射 $i_b: X_1 \rightarrow X_1 \times X_2$ 是嵌入映射。

证明参考课本 P32。

1.3.3 拓扑基

乘积拓扑与度量拓扑都是由某个较简单的子集族生成的, 这引出了拓扑基的概念。

Definition 1.3.5 ▶ 拓扑基

设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一个子集族。如果由 $\mathcal{B}$ 生成的子集族 $\overline{\mathcal{B}}$ 本身就是 X 的一个拓扑, 则称 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一个**拓扑基**。若 τ 是 X 的一个拓扑, 且 $\overline{\mathcal{B}} = \tau$, 则称 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 (X, τ) 的一个**拓扑基**。

Proposition 1.3.6 ▶ 集合拓扑基的判别准则

子集族 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的拓扑基, 当且仅当满足:

- (1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;
- (2) 若 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 则对每个 $x \in B_1 \cap B_2$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ 。

证明可对应课本命题 1.11。

Example 1.3.7 ▶ $\mathbb{R}$ 上的两个等价拓扑基

实数集 $\mathbb{R}$ 上的半开区间族 $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ 是一个拓扑基;

其中端点都取有理数的半开区间族 $\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ 也是一个拓扑基, 而且这两个拓扑基生成同一个拓扑。

证明. 实数集上的半开区间族显然满足拓扑基的覆盖性条件:

$$\bigcup_{[a,b) \in \mathcal{B}} [a, b) = \mathbb{R}.$$

对任意 $[a_1, b_1), [a_2, b_2) \in \mathcal{B}$, 若 $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, 令

$$a = \max\{a_1, a_2\}, \quad b = \min\{b_1, b_2\},$$

则 $[a, b) \in \mathcal{B}$, 且

$$x \in [a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2),$$

满足拓扑基的有限交封闭性条件。故 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 的拓扑基。

同时我们可以得到 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 是等价拓扑关系。



- 一方面, $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, 故 $\mathcal{B}'$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}'$ 包含于 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}$, 即 $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ 。
- 另一方面, 对任意 $[a, b) \in \mathcal{B}$, 可取有理数 b' 满足 $a < b' < b$, 则

$$[a, b) = \bigcup_{\substack{a < b' < b \\ b' \in \mathbb{Q}}} [a, b'),$$

其中每个 $[a, b') \in \mathcal{B}'$, 故 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ 。

因此 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, 即 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 是等价的拓扑基。

Proposition 1.3.8 ▶ 拓扑空间拓扑基的判别准则

设 (X, τ) 是拓扑空间, $\mathcal{B} \subseteq \tau$ 。则 $\mathcal{B}$ 是 (X, τ) 的拓扑基, 当且仅当: $\mathcal{B} \subseteq \tau$; $\tau \subseteq \overline{\mathcal{B}}$, 也就是说, τ 的每个开集都可以表示成 $\mathcal{B}$ 中一些成员的并。

Example 1.3.9 ▶ 子空间的拓扑基

若 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 (X, τ) 的一个拓扑基, $A \subseteq X$, 则子集族 $\mathcal{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ 是子空间 (A, τ_A) 的一个拓扑基。

利用拓扑基, 许多概念都可以改用“基元素语言”来刻画。例如: 若 $\mathcal{B}$ 是 (X, τ) 的拓扑基, 则 A 是 x 的邻域, 当且仅当存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq A$; $x \in \overline{A}$, 当且仅当每个包含 x 的基元素都与 A 相交。

Corollary 1.3.10 ▶ 用拓扑基刻画连续性

设 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 (X, τ) 的一个拓扑基。映射 $f: Y \rightarrow X$ 连续, 当且仅当对每个 $B \in \mathcal{B}$, 原像 $f^{-1}(B)$ 都是 Y 的开集。

当拓扑基中的成员形式比较规范时, 上述判别会特别方便。例如在度量空间中可只检查球形邻域; 在乘积空间中可只检查形如 $U_1 \times U_2$ 的基开集。



几个重要的拓扑性质

只有拓扑空间的概念是不够的, 还需要赋予空间额外的性质.

根据张老师期末划的重点, 这一章只考基础知识, 占比 25%, 其中 2.2 节不考, 局部紧致、局部有限、仿紧、局部连通、局部道路连通等局部的性质不考.

我个人认为这一章难度不大, 定理证明不长, 作为考试内容来说大都是送分题, 读者需要熟练掌握.

2.1 分离公理与可数公理

Definition 2.1.1 $\triangleright T_1$ 公理

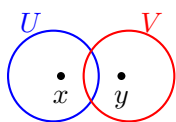
任何两个不同点 x, y, x 有邻域不含 y, y 有邻域不含 x .

Definition 2.1.2 $\triangleright T_2$ 公理

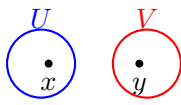
任何两个不同点, 有不相交的邻域.

Definition 2.1.3 $\triangleright T_0$ 公理

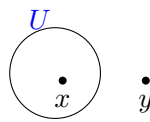
任何两个不同点, 有一个开集只包含其中一个点.



(a) T_1



(b) T_2



(c) T_0

图 2.1: T_1, T_2, T_0 分离公理示意图

Remark

- 满足 T_2 公理的拓扑空间称为 Hausdorff 空间.
- 显然 $T_2 \implies T_1$, 但反之不然, 反例为 $(\mathbb{R}, \tau_f)$.
- 将邻域改成开邻域, 意义不变.

Example 2.1.4 $\triangleright$ 习题 4

设 X 是 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, 证明其不动点集 $\text{Fix} f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ 是闭集.



证明. 只需证 $(\text{Fix}f)^c$ 是开集. 任取 $x \in (\text{Fix}f)^c$, 即 $x \neq f(x)$.

由 X 是 Hausdorff 空间, 存在 x 的开邻域 U 和 $f(x)$ 的开邻域 V , 使得 $U \cap V = \emptyset$.

由 f 的连续性, 对于 $f(x)$ 的开邻域 V , 存在 x 的开邻域 W , 使得 $f(W) \subset V$. 令 $G = U \cap W$, 是 x 的开邻域.

下证 $G \cap \text{Fix}f = \emptyset$: $\forall y \in G$, 有 $y \in U$ 且 $f(y) \in f(W) \subset V$. 由于 $U \cap V = \emptyset$, 故 $y \neq f(y)$. $G \subset (\text{Fix}f)^c$, $(\text{Fix}f)^c$ 是开集.

Example 2.1.5 ▶ 习题 6

记 $X \times X$ 的对角子集 $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$. 证明: 当 Δ 是 $X \times X$ 的闭集时, X 是 Hausdorff 空间.

证明. 要证对于任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 存在不相交的开集 U, V 使得 $x \in U, y \in V$.

由 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ 是 $X \times X$ 中的闭集, 其补集 $\Delta^c = \{(x, y) \in X \times X \mid x \neq y\}$ 是开集. $(x, y) \in \Delta^c$, 存在 X 中的开集 U 和 V , 使得 $(x, y) \in U \times V \subset \Delta^c$. 若存在 $z \in U \cap V$, 则 $(z, z) \in U \times V$. 但 (z, z) 显然属于 Δ , 这与 $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ 矛盾.

Proposition 2.1.6

X 满足 T_1 公理 $\iff X$ 的有限子集是闭集.

证明. “ $\implies$ ”: 只需证单点集是闭集. 取 $x \in X$, 当 $y \neq x$ 时, 由 T_1 公理, $\exists y$ 的邻域 $U \cap \{x\} = \emptyset, y \notin \overline{\{x\}}, \overline{\{x\}} = \{x\}, \{x\}$ 是闭集.

“ $\impliedby$ ”: 设 $x \neq y, \{y\}$ 是闭集, $X \setminus \{y\}$ 是开集, 是 x 的邻域, $y \notin X \setminus \{y\}$. 同理对 x .

Example 2.1.7 ▶ 习题 3

设 X 满足 T_1 公理, 证明 X 中任一子集 A 的导集 A' 是闭集.

证明. 只需证 $(A')^c$ 为开集. 对任意 $x \in (A')^c$, 存在 x 的开邻域 U , 使得 $(U \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$.

由 X 是 T_1 空间, 单点集 $\{x\}$ 为闭集, $V = U \setminus \{x\}$ 为开集. $\forall y \in V, \exists y$ 的邻域 $W \subset V, W \cap A = \emptyset, y \in (A')^c, V \subset (A')^c, U \subset (A')^c, x$ 是 $(A')^c$ 的内点.

Corollary 2.1.8

若 X 满足 T_1 公理, $A \subset X$, 点 x 是 A 的聚点, 则 X 的任一邻域与 A 的交是无穷集.

证明. 反证法: 设 $\exists x$ 的邻域 U 使得 $U \cap A$ 是有限集, 无妨设 U 是开集. 记 $B = (U \cap A) \setminus \{x\}$, 则 B 是有限集, 是闭集, $U \setminus B = U \cap B^c$ 是 x 的开邻域, 但它与 $A \setminus \{x\}$ 无交, 这与 x 是 A 的聚点矛盾.

**Proposition 2.1.9**

Hausdorff 空间中, 一个序列不会收敛到两个以上的点.

证明. 设 Hausdorff 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 , 又设 $x \neq x_0$. 取 x_0 与 x 的不相交邻域 U, V , 则由 $x_n \rightarrow x_0$ 知 U 中包含 $\{x_n\}$ 中无限项, $X \setminus U$ 只含有有限项. 又 $U \cap V = \emptyset, V \subset X \setminus U, V$ 只包含 $\{x_n\}$ 中有限项, x_n 不收敛到 x .

2.1.1 T_3 公理和 T_4 公理**Definition 2.1.10 $\triangleright T_3$ 公理**

任一点与不含它的任一闭集有不相交的 (开) 邻域.

Definition 2.1.11 $\triangleright T_4$ 公理

任意两个不相交的闭集有不相交的 (开) 邻域. (当 $A \subset \overset{\circ}{U}$ 时, 称 U 是 A 的邻域).



图 2.2: T_3, T_4 分离公理示意图

Remark

若 X 满足 T_1 公理, 则 $T_4 \implies T_3 \implies T_2$. 若没有 T_1 公理成立的前提, 则不一定成立, 反例如下: $(\mathbb{R}, \tau)$: $\tau = \{(-\infty, a) \mid -\infty \leq a \leq +\infty\}$, 任意两个非空闭集总相交. 因此任意两个不相交的闭集 A, B , 必有一个为空集, 不妨设 $B = \emptyset$, 于是 $\mathbb{R}$ 与 $\emptyset$ 均为它们的不相交邻域. 这是一个满足 T_4 公理, 但不满足 T_1, T_2, T_3 的例子.

Proposition 2.1.12

度量空间 (X, d) 满足 T_1, T_2, T_3, T_4 公理.

证明. 显然 (X, d) 中单点集是闭集, 满足 T_1 . 下面验证满足 T_4 即可: 设 A, B 是不交闭集, 不妨设 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. $\forall x \in X$, 则 $d(x, A) + d(x, B) > 0$, 其中 $d(x, A) := \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}$. 规定 X 上的连续函数 f 为 $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$, 则当 $x \in A$ 时 $f(x) = 0, x \in B$ 时 $f(x) = 1, \forall t \in (0, 1), f^{-1}((-\infty, t))$ 和 $f^{-1}((t, +\infty))$ 是 A 和 B 的不交邻域, 得证满足 T_4 , 进而满足 T_3 与 T_2 .



Proposition 2.1.13

- (1) 满足 T_3 公理 $\iff \forall x$ 和它的开邻域 $W, \exists x$ 的开邻域 U , 使得 $\bar{U} \subset W$.
 (2) 满足 T_4 公理 $\iff \forall$ 闭集 A 和它的开邻域 $W, \exists A$ 的开邻域 U , 使得 $\bar{U} \subset W$.

证明. 只证 (2), (1) 同理. “ $\Leftarrow$ ”: 设 A, B 是不交闭集, B^c 是 A 的开邻域, 由条件, $\exists U$ 是 A 的开邻域使得 $\bar{U} \subset B^c$. 记 $V = (\bar{U})^c$, 是 B 的开邻域且 $V \cap U = \emptyset$, 得证 T_4 .

“ $\Rightarrow$ ”: $\forall$ 闭集 A, W 是它的一个开邻域. 记 $B = W^c$ 是闭集, $A \cap B = \emptyset$. 由 T_4 , A, B 有不相交的开邻域 U 和 V . 由 $\bar{U} \subset V^c \subset B^c = W$, 取 U 即为所求.

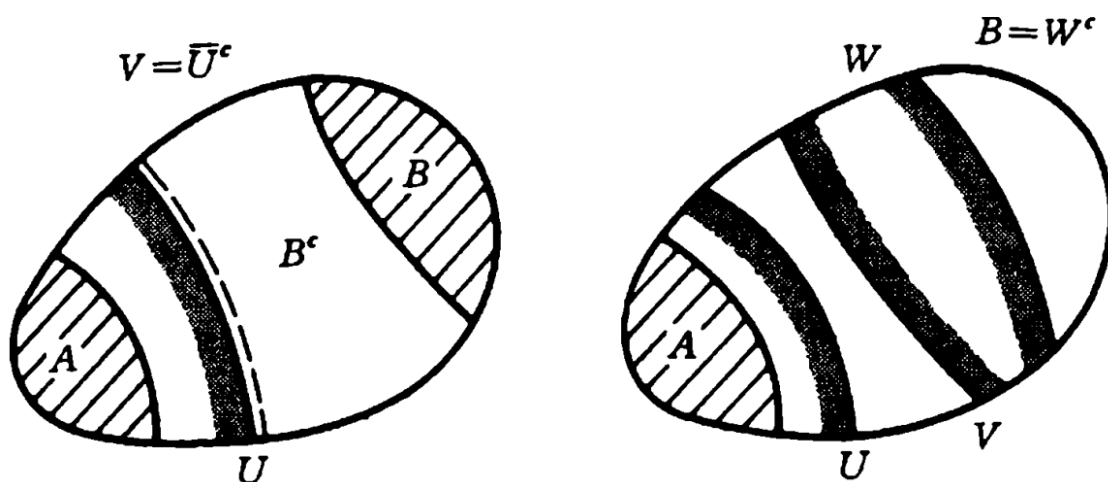


图 2.3: 证明示意图

Example 2.1.14 ▶ 习题 9

设 X 满足 T_3 公理, F 为 X 的闭子集, $x \notin F$. 证明: 存在 F 和 x 的开邻域 U 和 V , 使得 $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

证明. 由定义, 存在 X 中的开集 U 和 V_1 , 使得 $F \subset U, x \in V_1, U \cap V_1 = \emptyset$. 由 $U \cap V_1 = \emptyset$, 得 $U \subset V_1^c, \bar{U} \subset V_1^c$. 由 T_3 公理等价命题, 存在 x 的开邻域 V , 使得 $\bar{V} \subset V_1, V_1^c \subset \bar{V}^c$. 故而 $\bar{U} \subset V_1^c \subset \bar{V}^c, \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

2.1.2 可数公理

Definition 2.1.15 ▶ 邻域系与邻域基

设 $x \in X$, 把 x 的所有邻域的集合称为 x 的邻域系, 记作 $\mathcal{N}(x)$. 也即, $\mathcal{N}(x) := \{U \subset X \mid U \text{ 是 } x \text{ 的邻域}\}$.

$\mathcal{N}(x)$ 的一个子集 (即 x 的一族邻域) $\mathcal{U}$ 称为 x 的一个邻域基, 如果 x 的每个邻域至少包含 $\mathcal{U}$ 中的一个成员.

**Remark**

- 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的拓扑基, 则 $\mathcal{U} = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ 是 x 的邻域基.
- 对度量空间 $X, \{B(x, q) \mid q \in \mathbb{Q}_+\}$ 和 $\{B(x, \frac{1}{n})\}$ 是 x 的邻域基.

Definition 2.1.16 ▶ C_1 公理

任一点有可数的邻域基.

Example 2.1.17

- 度量空间满足 C_1 公理, 可数邻域基如 $\{B(x, \frac{1}{n})\}$.
- $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 不满足 C_1 公理: $\forall x \in \mathbb{R}$, 考虑 x 的任一可数邻域族 $\mathcal{U}$. $\forall U \in \mathcal{U}, U$ 是有限集的余集, $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^c$ 是可数集. 取 $y \notin \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^c$ 且 $y \neq x$, 则 $\forall U \in \mathcal{U}$ 有 $y \in U$, 得 $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ 是 x 的开邻域, 但它不包含任何 $U \in \mathcal{U}$. 于是 x 的任一可数邻域族均不是邻域基.

Proposition 2.1.18

若 X 在 x 处有可数邻域基, 则 x 有可数邻域基 $\{V_n\}$, 使得 $m > n$ 时 $V_m \subset V_n$.

证明. 取 x 的一个可数邻域基 U_n , 记 $V_n = \bigcap_{i=1}^n U_i$, 则 $V_n \subset U_n (\forall n)$, 得可数邻域基 $\{V_n\}$. 显然 $m > n$ 时 $V_m \subset V_n$.

Example 2.1.19 ▶ 习题 12

证明: 如果 X 是 C_1 空间, 且其序列最多只能收敛到一个点, 则 X 是 Hausdorff 空间.

证明. 反证法: 设 X 不是 Hausdorff 空间, 则存在两个不同点 x, y , 使得 x 的任何邻域与 y 的任何邻域都相交.

由 X 是 C_1 空间, 设 $\{U_n\}$ 和 $\{V_n\}$ 分别是 x 和 y 的单调递减的可数开邻域基. $\forall n$, 都有 $U_n \cap V_n \neq \emptyset$, 取 $x_n \in U_n \cap V_n$, 得序列 $\{x_n\}$. 对 x 的任一邻域 U , 存在 N_1 , 使得当 $n > N_1$ 时 $U_n \subset U, x_n \in U$, 即 $x_n \rightarrow x$. 同理, $x_n \rightarrow y$, 矛盾.

Proposition 2.1.20

若 X 是 C_1 空间, $A \subset X, x \in \overline{A}$, 则 A 中存在收敛到 x 的序列.

证明. 取 x 的可数邻域基 $\{V_n\}$, 使得 $m > n$ 时 $V_m \subset V_n$. 由 $x \in \overline{A}$ 知 $V_n \cap A \neq \emptyset, \forall n$, 取 $x_n \in V_n \cap A$, 得到序列 $\{x_n\}$. 任取 x 的邻域 $U, \exists n$ 使得 $V_n \subset U$. 从而 $\forall m \geq n$ 有 $x_m \in V_m \subset V_n \subset U$, 由收敛定义知 $x_n \rightarrow x$.

**Corollary 2.1.21**

若 X 是 C_1 空间, $x_0 \in X, f: X \rightarrow Y$ 满足: 当 $x_n \rightarrow x_0$ 时 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, 则 f 在 x_0 连续.

证明. 反证法: 设 f 在 x_0 不连续, 则存在 $f(x_0)$ 的邻域 V 使得 $f^{-1}(V)$ 不是 x_0 的邻域. 也即, $x_0 \in \overline{(f^{-1}(V))^c}$, 取 $(f^{-1}(V))^c$ 中的序列 $\{x_n\} \rightarrow x_0$. 由条件知 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, 对几乎所有 $n, f(x_n) \in V, x_n \in f^{-1}(V)$, 矛盾.

Definition 2.1.22 ▶ C_2 公理

有可数的拓扑基.

Remark

- C_2 公理很苛刻, 以至于许多度量空间也不满足. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中规定离散度量 $d(x, y)$, 得离散拓扑空间 $(\mathbb{R}, d)$. 任一拓扑基必须以每个单点集 $\{x\}$ 为成员, 因此不可数.
- $C_2 \implies C_1$. 反之不然 (见 2.1 习题 18).
- C_2 空间是可分空间.

Example 2.1.23 ▶ 参考试题

请叙述基本概念: C_1 、 C_2 公理 (4 分)

Proposition 2.1.24

可分度量空间是 C_2 空间.

证明. 设 (X, d) 是可分度量空间, A 是它的一个可数稠密子集. 记 $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) \mid a \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$, 则 $\mathcal{B}$ 是可数开集族. 下证 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基: 只要证 $\forall$ 开集 U 及 $\forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$. 取 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$, 取 $n > \frac{2}{\varepsilon}, a \in A$ 使得 $d(x, a) < \frac{1}{n}, x \in B(a, \frac{1}{n}), \forall y \in B(a, \frac{1}{n}), d(a, y) < \frac{1}{n}, d(x, y) < d(x, a) + d(a, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$, 得 $B(a, \frac{1}{n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$.

Example 2.1.25 ▶ Hilbert 空间 E^ω

张老师没讲, 不是重点.

Theorem 2.1.26 ▶ Lindelöf 定理

若拓扑空间 X 满足 C_2, T_3 公理, 则它也满足 T_4 公理.

证明从略, 张老师没讲, 不是重点.



2.1.3 拓扑性质的遗传性与可乘性

Remark

- 可分性是可乘的（见 1.3 习题 5），但不可遗传（见 2.1 习题 18）.
- T_1, T_2, T_3, C_1, C_2 : 既是可遗传的, 也是可乘的.
- T_4 : 二者皆无.

2.2 Urysohn 引理及其应用

这一节的定理证明张老师没讲, 读者会用定理做课后题即可.

2.2.1 Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理

Theorem 2.2.1 ▶ Urysohn 引理

若拓扑空间 X 满足 T_4 公理, 则对于 X 的任意两个不相交闭集 A, B , 存在 X 上的连续函数 f , 它在 A 和 B 上分别取值为 0 和 1.

Theorem 2.2.2 ▶ Tietze 扩张定理

若 X 满足 T_4 公理, 则定义在 X 的闭子集 F 上的连续函数可连续地扩张到 X 上.

Example 2.2.3 ▶ 习题 2

设 X 满足 T_4 公理, A 是 X 的闭子集, 则连续映射 $f: A \rightarrow E^n$ 可扩张到 X 上.

证明. 以分量形式书写 $f: f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

对每个 f_i 使用 Tietze 扩张定理, 将 $f_i: A \rightarrow E^1$ 扩张到 X 上变为 $\tilde{f}_i: X \rightarrow E^1$, 得到扩张 $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \dots, \tilde{f}_n(x))$.

Example 2.2.4 ▶ 习题 3

拓扑空间 Y 的子集 B 称为 Y 的一个收缩核, 如果存在连续映射 $r: Y \rightarrow B$, 使得 $\forall x \in B, r(x) = x$, 称 r 为 Y 到 B 的一个收缩映射. 设 D 是 E^n 的收缩核, X 满足 T_4 公理, A 是 X 的闭集. 证明连续映射 $f: A \rightarrow D$ 可扩张到 X 上.

证明. 收缩映射 $r: E^n \rightarrow D$ 满足 $\forall x \in D, r(x) = x$, 包含映射 $i: D \rightarrow E^n$, 故 $r \circ i = D \rightarrow D$ 是恒同映射. 注意到 $f = (r \circ i) \circ f = r \circ (i \circ f)$, 而 $i \circ f: A \rightarrow E^n$ 可扩张到 X 上, 变为 $\tilde{f}: X \rightarrow E^n$, 得到 f 的扩张 $r \circ \tilde{f}$.

**Example 2.2.5 ▶ 习题 4**

设 $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$, X 满足 T_4 公理. 证明从 X 的闭子集 A 到 S^n 的连续映射 f 可扩张到 A 的一个开邻域上.

证明. 包含映射 $i: S^n \rightarrow E^{n+1}$, 则 $i \circ f: A \rightarrow E^{n+1}$ 可扩张到 X 上, 变为 $g: X \rightarrow E^{n+1}$.

记 $U = g^{-1}(E^{n+1} \setminus \{0\})$ 为 A 的开邻域, 令 $r: E^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ 为 $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, 则 $r \circ (g|_U): U \rightarrow S^n$ 是 f 的扩张.

2.2.2 Urysohn 度量化定理**Definition 2.2.6 ▶ 可度量化**

拓扑空间 (X, τ) 称为可度量化的, 如果可以在 X 上规定一个度量 d , 使得 $\tau_d = \tau$.

Proposition 2.2.7

拓扑空间 X 可度量化 $\iff$ 存在从 X 到一个度量空间的嵌入映射.

证明. “ $\implies$ ”: 取 X 上度量 d , 使得 τ_d 是 X 的原有拓扑, 则 $id: X \rightarrow (X, d)$ 是嵌入映射.

“ $\impliedby$ ”: 设 $f: X \rightarrow (Y, d_B)$ 是嵌入映射. 记 $B = f(X)$, d_B 是 d 在 B 上诱导的度量, 则 $f: X \rightarrow f(X)$ 是同胚.

定义度量 $\rho(x, x') = d_B(f(x), f(x'))$, 则 $f^{-1}: (B, d_B) \rightarrow (X, \rho)$ 是保持度量的一一对应, 从而是同胚.

即得 $id = f^{-1} \circ f: X \rightarrow (X, \rho)$ 是同胚, 即 τ_ρ 是 X 的原有拓扑.

Theorem 2.2.8 ▶ Urysohn 度量化定理

拓扑空间 X 如果满足 T_1, T_4, C_2 公理, 则 X 可嵌入到 Hilbert 空间 E^ω 中.

2.3 紧致性**2.3.1 紧致与列紧**

这一小节的概念读者在数学分析中学过了.

Definition 2.3.1 ▶ 列紧

称拓扑空间 (X, τ) 是列紧的, 若每个序列都有收敛 (有极限点) 的子序列.

**Proposition 2.3.2**

定义在列紧拓扑空间 X 上的连续函数 $f: X \rightarrow E^1$ 有界, 并达到最大、最小值.

Definition 2.3.3 ▶ 紧致

称拓扑空间 (X, τ) 是紧致的, 如果每个开覆盖都有有限的子覆盖.

Example 2.3.4 ▶ 紧致性举例

- $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 是紧致的.
证明. 取开覆盖 $\mathcal{U}$, 任取 $U \in \mathcal{U}$, 则 U^c 是有限集. 取 $\mathcal{U}$ 中有限个开集 $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ 覆盖 U^c , 则 $(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cup U$ 是 $\mathcal{U}$ 的有限子覆盖.
- E^1 不是紧致的.
证明. 令 $\mathcal{U} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 无法从中提取有限子覆盖.

Example 2.3.5 ▶ 习题 3

证明: 有限个紧致子集之并集紧致.

证明. 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是拓扑空间 X 中的有限个紧致子集, 记 $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

设 $\mathcal{U}$ 是 A 在 X 中的一个开覆盖, 则对每个 $i, \mathcal{U}$ 也是 A_i 的一个开覆盖. 由每个 A_i 是紧致的, 存在 $\mathcal{U}$ 的有限子族 $\mathcal{U}_i$ 覆盖 A_i . 令 $\mathcal{U}^* = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, 则 $\mathcal{U}^*$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个有限子族. $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \subset$

$\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{V \in \mathcal{U}_i} V \right) = \bigcup_{V \in \mathcal{U}^*} V$, 得有限子覆盖.

2.3.2 紧致度量空间

这一小节的证明张老师没讲, 读者有能力自行推导, 故略.

Proposition 2.3.6

紧致 C_1 空间是列紧的.

Proposition 2.3.7

列紧度量空间是紧致的.

Proposition 2.3.8

在度量空间中: 列紧 $\iff$ 紧致.

**Remark**

E^n 的子集 A 紧致 $\iff A$ 为有界闭集.

2.3.3 紧致空间的性质**Definition 2.3.9** ▶ 紧致子集

若 $A \subset X$ 作为子空间是紧致的, 则称 A 为 X 的紧致子集.

Definition 2.3.10 ▶ A 在 X 中的一个开覆盖

若 X 中的开集族 $\mathcal{U}$ 满足 $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, 则称 $\mathcal{U}$ 是 A 在 X 中的一个开覆盖.

Proposition 2.3.11

A 是 X 的紧致子集 $\iff A$ 在 X 中的任一开覆盖都有有限子覆盖.

证明. “ $\implies$ ”: 设 $\mathcal{U}$ 是 A 在 X 中的开覆盖, 则 $\mathcal{U}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}\}$ 是 A 的开覆盖. 由 A 紧致, $\mathcal{U}_A$ 有有限子覆盖 $\{U_1 \cap A, \dots, U_n \cap A\}$, 得 $\{U_1, \dots, U_n\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的有限子覆盖.

“ $\impliedby$ ”: 设 $\mathcal{V}$ 是 A 的开覆盖. 由子空间拓扑定义: $\forall V \in \mathcal{V}, \exists X$ 中开集 U 使得 $V = U \cap A$, 所有如此得到的 U 构成 A 在 X 中的开覆盖 $\mathcal{U}$. 由条件 $\mathcal{U}$ 有有限子覆盖 $\{U_1, \dots, U_n\}$, 于是 $\{U_1 \cap A, \dots, U_n \cap A\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的有限子覆盖.

Proposition 2.3.12

紧致空间的闭子集紧致.

证明. 设 X 是紧致拓扑空间, A 是 X 的闭子集. 设 $\mathcal{U}$ 是 A 在 X 中的一个开覆盖, 则 $\mathcal{U} \cup \{A^c\}$ 构成 X 的开覆盖. 由 X 是紧致的, 故 $\mathcal{U} \cup \{A^c\}$ 有有限子覆盖 $\{U_1, U_2, \dots, U_n, A^c\}$. 于是 $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个有限子覆盖 (A 的覆盖).

Proposition 2.3.13

紧致空间在连续映射下的像也是紧致的.

证明. 设 X 紧致, $f: X \rightarrow Y$ 连续. 下证 $f(X)$ 是 Y 的紧致子集. 设 $\mathcal{V}$ 是 $f(X)$ 在 Y 中的开覆盖, 则 $\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 紧致, 存在有限子覆盖 $\{f^{-1}(V_1), \dots, f^{-1}(V_n)\}$, 即 $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_i)$, $f(X) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(V_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. 于是 $\{V_1, \dots, V_n\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的有限子覆盖, $f(X)$ 是 Y 的紧致子集.

**Corollary 2.3.14**

定义在紧致空间上的连续函数有界, 且达到最大、最小值.

证明. $f: X \rightarrow E^1$, 由 X 紧致知 $f(X)$ 是 E^1 的紧致子集, 是有界闭集.

Remark

紧致性是拓扑性质.

Example 2.3.15 ▶ 习题 15

证明度量空间 X 紧致的充分必要条件是 X 上任一连续函数都是有界的.

证明. “ $\Rightarrow$ ”: 显然.

“ $\Leftarrow$ ”: 反证法. 设 X 不紧致, 则也不是列紧的.

因此存在一个没有收敛子列的序列 $\{x_n\} \subset X$, 无妨设各不相同. 集合 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的无穷闭子集. 在子空间 A 上定义连续函数 $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $g(x_n) = n$. 显然 g 是无界的. 由度量空间满足 T_4 公理, 由 Tietze 扩张定理, 存在 g 在整个空间 X 的连续扩张 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. 显然 f 是 X 上的连续函数且无界, 矛盾.

2.3.4 Hausdorff 空间的紧致子集**Proposition 2.3.16**

设 A 是 Hausdorff 空间 X 的紧致子集, $x \notin A$, 则 x 与 A 有不相交的邻域.

证明. $\forall y \in A$, 由 $x \notin A$ 知 $x \neq y$. 由 X 是 Hausdorff 空间, 存在 x, y 的开邻域 U_y 和 V_y 使得 $U_y \cap V_y = \emptyset$. 当 y 遍历 A 时, $\{V_y \mid y \in A\}$ 构成 A 在 X 中的开覆盖. 由 A 是紧致的, 有有限子覆盖 $\{V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_n}\}$. 令 $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$, $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, 则 V, U 分别是 A 和 x 的开邻域. $\forall i \leq n, U \cap V_{y_i} \subset U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset, U \cap (\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}) = \emptyset$, 即 $U \cap V = \emptyset$.

Corollary 2.3.17

Hausdorff 空间的紧致子集是闭集.

Example 2.3.18 ▶ 习题 12 (参考试题)

设 X 是 Hausdorff 空间, 证明 X 的任意多个紧致子集之交集也紧致. (10 分)

证明. 设 $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 Hausdorff 空间 X 中的一族紧致子集, 记 $K = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$.

由 X 是 Hausdorff 空间, 每个紧致子集 K_λ 在 X 中都是闭集. 而任意多个闭集之交仍为闭集, 故 K 是 X 中的闭集. $\forall \lambda_0 \in \Lambda, K$ 都是紧致空间 K_{λ_0} 中的一个闭子集, 故紧致.

**Theorem 2.3.19**

设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的一一对应, X 紧致, Y 是 Hausdorff 空间, 则 f 是同胚.

证明. 要证 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 连续, 只要证 f 是闭映射. 取紧致空间 X 的闭子集 A , A 紧致, $f(A)$ 紧致. 而 Y 是 Hausdorff 空间, $f(A)$ 紧致, 则 $f(A)$ 是闭集.

Proposition 2.3.20

Hausdorff 空间的不相交紧致子集 A, B 有不相交的邻域.

证明. $\forall x \in B$, 得 x 与 A 的不相交邻域. 遍历 x , 得一系列邻域, 再利用紧致性得有限项, 分别做并、交运算即可.

Proposition 2.3.21

紧致 Hausdorff 空间满足 T_3, T_4 公理.

证明. 只要证满足 T_4 . 设 A, B 是紧致 Hausdorff 空间的不交闭子集, 则 A, B 均紧致, 有不交邻域.

2.3.5 乘积空间的紧致性

紧致性没有遗传性, 但具有可乘性.

Lemma 2.3.22

设 A 是 X 的紧致子集, $y \in Y$. 在 $X \times Y$ 中, W 是 $A \times \{y\}$ 的邻域, 则存在 A 和 y 的开邻域 U 和 V , 使得 $U \times V \subset W$.

证明. $\forall x \in A, (x, y)$ 是 W 内点, $\exists U_x, V_x$ 是 x, y 的开邻域使得 $(x, y) \in U_x \times V_x \subset W$. $\{U_x \mid x \in A\}$ 是 A 在 X 中开覆盖, 而 A 是 X 的紧致子集, 有有限子覆盖 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$. 令 $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}, V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, 则 U, V 分别是 A 和 y 的开邻域, $U \times V \subset \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subset W$.

Theorem 2.3.23

若 X, Y 紧致, 则 $X \times Y$ 也紧致.

证明. 设 $\mathcal{U}$ 是 $X \times Y$ 的开覆盖, 下证它有有限子覆盖. $\forall y \in Y, X \times \{y\} \cong X$, 从而 $X \times \{y\}$ 紧致. $\mathcal{U}$ 也是 $X \times \{y\}$ 在 $X \times Y$ 中的开覆盖, 有有限子覆盖 $U_1, U_2, \dots, U_n$. 令 $W_y = \bigcup_{i=1}^n U_i$, 则 W_y 是 $X \times \{y\}$ 的邻域. 由引理, $\exists y$ 的开邻域 V_y 使得 $X \times V_y \subset W_y$, 故 $X \times V_y$ 可被 $\mathcal{U}$ 中有限个开集覆盖. 又 $\{V_y \mid y \in Y\}$ 是紧致空间 Y 的开覆盖, 有有限子覆盖 $\{V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_m}\}$. 即



$X \times Y = \bigcup_{i=1}^m (X \times V_{y_i})$. 其中每个 $X \times V_{y_i}$ 都能被 $\mathcal{U}$ 中有限项覆盖, 故 $X \times Y$ 能被 $\mathcal{U}$ 中有限项覆盖.

Remark

定理的结论容易推广到有限乘积的情形. 对于无穷乘积情形, 有 **Tychonoff 定理**: 如果规定 $\prod X_\alpha$ 上的拓扑是乘积拓扑, 则当每个 X_α 都紧致时, $\prod X_\alpha$ 也紧致.

2.3.6 局部紧致与仿紧 (不考)

Definition 2.3.24 ▶ 局部紧致

若 $\forall x \in X$ 都有紧致邻域, 则称 X 是局部紧致的.

Remark

- 紧致空间是局部紧致的.
- E^n 是局部紧致的.

Proposition 2.3.25

设 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间, 则: (1) X 满足 T_3 公理.
(2) $\forall x \in X, x$ 的紧致邻域构成它的邻域基.
(3) X 的开子集也是局部紧致的.

Definition 2.3.26 ▶ 局部有限

若 X 的每一点有邻域 V , 它只同 $\mathcal{U}$ 中有限个成员相交, 则拓扑空间 X 的覆盖 $\mathcal{U}$ 称为局部有限的.

Definition 2.3.27 ▶ 加细

设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 均为 X 的覆盖. 若 $\mathcal{U}'$ 的每个成员 $\subset \mathcal{U}$ 的某个成员中, 则称 $\mathcal{U}'$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细. 若 $\mathcal{U}'$ 还是开覆盖, 则 $\mathcal{U}'$ 是 $\mathcal{U}$ 的开加细.

Definition 2.3.28 ▶ 仿紧

若 X 的每个开覆盖都有局部有限的开加细, 则拓扑空间 X 称为仿紧的.

**Remark ▶ 一些论断**

- 紧致空间是仿紧的.
- 仿紧的 Hausdorff 空间满足 T_4 公理.
- 局部紧致, 并满足 C_2 的 Hausdorff 空间是仿紧的.
- 度量空间是仿紧空间.

2.4 连通性

2.4.1 连通性的定义

Definition 2.4.1 ▶ 连通

拓扑空间 X 称为连通的, 如果它不能分解为两个非空不相交开集的并.

Remark ▶ 连通性的等价描述

连通性是拓扑性质, 以下关于连通性的说法是等价的:

- X 不能分解为两个非空不相交闭集的并.
- X 没有既开又闭的非空真子集.
- X 的既开又闭的子集只有 X 与 $\emptyset$.

Example 2.4.2

- $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 连通.
- $(\mathbb{R}, \tau_c)$ 连通.
- E^1 连通.

证明. (E^1 连通)

设 A 是 E^1 的非空真闭子集, 要证 A 不是开集. 不妨设 $0 \notin A$ 但 A 中含有正数, 记 a 是 A 中正数的下确界. 由于 A 闭, 则 $a \in A$ 且 $a > 0$, 而 $(0, a) \cap A = \emptyset$, a 不是 A 的内点, A 不是开集. E^1 不存在非空的既开又闭的真子集, 故 E^1 连通.

Example 2.4.3 ▶ 习题 1

证明平凡拓扑空间连通; 包含两个以上点的离散拓扑空间不连通.

证明. ① 设 (X, τ) 为平凡拓扑空间, 则 $\tau = \{X, \emptyset\}$, X 的既开又闭子集只有 $X, \emptyset$.

② 设 (X, τ) 为包含两个以上点的离散拓扑空间, 任取 $x \in X$, 则 $\{x\}$ 既是开集也是闭集. 由于 X 至少有两个点, $\{x\}$ 是 X 的非空真子集.



Example 2.4.4 ▶ 习题 4

设 X_1, X_2 是连通空间 X 的开子集, $X_1 \cup X_2 = X, X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ 且连通, 证明 X_1, X_2 都连通.

证明. 由对称性只证 X_1 连通, 反设 X_1 不连通, 则存在 X_1 的非空不交开子集 A, B 使得 $A \cup B = X_1$, 下面断言: $X_1 \cap X_2$ 必包含于 A 或 B 之中.

如若不然, 则 $(X_1 \cap X_2) \cap A \neq \emptyset$ 且 $(X_1 \cap X_2) \cap B \neq \emptyset$, 记 $A_1 = (X_1 \cap X_2) \cap A, B_1 = (X_1 \cap X_2) \cap B$, 由 A, B, X_1, X_2 均为开集, 则 A_1, B_1 也是开集, 做交并运算得:

$$A_1 \cup B_1 = ((X_1 \cap X_2) \cap A) \cup ((X_1 \cap X_2) \cap B) = (X_1 \cap X_2) \cap (A \cup B) = (X_1 \cap X_2) \cap X_1 = X_1 \cap X_2$$

$$A_1 \cap B_1 = ((X_1 \cap X_2) \cap A) \cap ((X_1 \cap X_2) \cap B) = (X_1 \cap X_2) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

这说明 $X_1 \cap X_2$ 不连通, 矛盾, 故断言成立.

不妨设 $X_1 \cap X_2 \subset B$, 下面考虑 A 与 $B \cup X_2$, 显然是 X 的两个非空开集:

- 不交: $A \cap (B \cup X_2) = (A \cap B) \cup (A \cap X_2)$, 由 $A \cap B = \emptyset, A \subset X_1$ 且 $X_1 \cap X_2 \subset B$, 得证不交.
- 覆盖: $A \cup (B \cup X_2) = (A \cup B) \cup X_2 = X_1 \cup X_2 = X$.

这与 X 连通矛盾.

Example 2.4.5 ▶ 习题 7

证明: X 不连通 $\iff$ 存在定义在 X 上的连续函数 $f: X \rightarrow E^1$, 使得 $f(X)$ 恰好由两个点组成.

证明. “ $\implies$ ”: 若 X 不连通, 则存在非空既开又闭真子集 U_1 , 令 $U_2 = X \setminus U_1$.

$$\text{规定 } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_1 \\ 1, & x \in U_2 \end{cases}.$$

易证 f 连续, $f(X) = \{0, 1\}$ 恰好由两个点组成.

“ $\impliedby$ ”: 设存在连续函数 $f: X \rightarrow \{a, b\}$, 令 $A = f^{-1}(\{a\}), B = f^{-1}(\{b\})$, 两者都是非空闭集, 易证 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = f^{-1}(\{a, b\}) = X$, 故 X 不连通.

2.4.2 连通空间的性质

Proposition 2.4.6

连通空间在连续映射下的像也是连通的.

证明. 设 X 连通, $f: X \rightarrow Y$ 连续, 要证 $f(X)$ 连通.

不妨设 $f(X) = Y$, 设 B 是 Y 的既开又闭的非空子集, 则 $f^{-1}(B)$ 是 X 的既开又闭的子集. 又由 f 是满射, $f^{-1}(B)$ 非空, 由 X 的连通性知 $f^{-1}(B) = X$, 从而 $B = f(X) = Y$.

**Example 2.4.7**

S^1 是连通的.

证明. 有连续满射 $f: E^1 \rightarrow S^1, f(x) = e^{i2\pi x}$.

Definition 2.4.8 ▶ 区间

E^1 上的子集 A 称为区间, 如果当 $a, b \in A$ 时, 总有 $\{x: a \leq x \leq b\} \subset A$, 也即 A 是凸集.

Example 2.4.9

设 $A \subset E^1$, 则 A 连通 $\Leftrightarrow A$ 是区间.

证明张老师留作作业.

Corollary 2.4.10

连通空间上的连续函数的像集是区间.

Lemma 2.4.11

若 X_0 是 X 的既开又闭的子集, A 是 X 的连通子集, 则要么 $A \cap X_0 = \emptyset$, 要么 $A \subset X_0$.

证明. $A \cap X_0$ 是 A 的既开又闭子集, 由 A 连通, 则要么 $A \cap X_0 = \emptyset$, 要么 $A \cap X_0 = A$, 即 $A \subset X_0$.

Proposition 2.4.12

若 X 有一个连通的稠密子集, 则 X 连通.

证明. 设 A 是 X 的连通稠密子集, X_0 是 X 的既开又闭子集, 若 $X_0 \neq \emptyset$, 则 $A \cap X_0 \neq \emptyset$. 由引理, $A \subset X_0, X = \overline{A} \subset X_0$, 即 $X_0 = X$, 故 X 连通.

Corollary 2.4.13

若 A 是 X 的连通子集, $A \subset Y \subset \overline{A}$, 则 Y 连通.

Proposition 2.4.14 ▶ (羊肉串定理)

如果 X 有一个连通覆盖 $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ 中每个成员都连通), 并且 X 有一连通子集 A , 它与 $\mathcal{U}$ 中每个成员都相交, 则 X 连通.



证明. 取 X_0 为 X 的既开又闭子集, 要证明 $X_0 = \emptyset$ 或 X .

由引理, $A \cap X_0 = \emptyset$ 或 $A \subset X_0$.

若 $A \cap X_0 = \emptyset$, 则 $\forall U \in \mathcal{U}$, 因为 $U \cap A \neq \emptyset$, 所以 $U \not\subset X_0$, 由引理 $U \cap X_0 = \emptyset$, 于是 $X_0 = (\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) \cap X_0 = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (U \cap X_0) = \emptyset$.

若 $A \subset X_0$, 则 $\forall U \in \mathcal{U}, U \cap X_0 \supset U \cap A \neq \emptyset$, 由引理 $U \subset X_0$, 于是 $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subset X_0, X_0 = X$.

Example 2.4.15

E^2 是连通的.

证明. 记 $B_x = \{(x, y) \mid y \in E^1\}, \forall x \in E^1$, 则 $\{B_x \mid x \in E^1\}$ 是 E^2 的连通覆盖. 记 $A = \{(x, 0) \mid x \in E^1\}$, 则 A 连通, 且 $A \cap B_x \neq \emptyset, \forall x \in E^1$, 由羊肉串定理, E^2 连通. 归纳可知 E^n 连通.

Example 2.4.16 ▶ 拓扑学家的连通曲线

考虑 E^2 的子集 $X = A \cup B$, 其中:

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in (0, 1) \right\}, \quad B = \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

证明 X 是连通的.

证明. 通过连续映射 $x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x})$ 可知 A 是连通的. $X = A \cup B = \overline{A}$, 即 A 是 X 的连通稠密子集, 故而 X 连通.

Example 2.4.17

S^n 是连通的空间.

证明. $\forall x \in S^n$, 则 $S^n \setminus \{x\} \cong E^n$ 是连通的 (球极投影). 显然 $S^n \setminus \{x\}$ 是 S^n 的稠密子集.

Remark ▶ 总结: 证明连通性的方法

1. 4 条等价描述 (常用的是证明不存在非空既开又闭的真子集).
2. 连通空间在连续映射下的像也连通.
3. 若 X 有连通稠密子集, 则 X 连通.
4. 羊肉串定理.

Theorem 2.4.18

若 X, Y 连通, 则 $X \times Y$ 连通.



证明. $\{X \times \{y\} \mid y \in Y\}$ 是 $X \times Y$ 的连通覆盖, 取定 $x \in X$, 则 $\{x\} \times Y$ 连通, 且与每一个 $X \times \{y\}$ 都相交, 由羊肉串定理, $X \times Y$ 连通.

2.4.3 连通分支

Definition 2.4.19 ▶ 连通分支

拓扑空间 X 的一个子集称为 X 的连通分支, 如果它是连通的, 并且不是 X 的其他连通子集的真子集 (即极大连通子集).

Proposition 2.4.20

X 的每个非空连通子集包含在唯一的一个连通分支中.

证明. 设 A 是 X 的一个非空连通子集, 记 $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid F \text{ 连通}, F \cap A \neq \emptyset\}$, 令 $Y = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$, 则 $A \subset Y$, 由羊肉串定理, Y 连通.

若连通子集 $B \supset Y$, 则 $B \cap A = A \neq \emptyset$, 从而 $B \in \mathcal{F}$, $B \subset Y$, 得 Y 是连通分支.

若 Y' 也是包含 A 的连通分支, 则 $Y' \in \mathcal{F}$, $Y' \subset Y$, 由于 Y' 的极大性, 必有 $Y' = Y$.

Remark

单点 x 作为子空间连通, x 包含在唯一的连通分支中 $\implies X$ 的所有连通分支构成 X 的覆盖, 且两两不交.

Example 2.4.21

记 X 是 E^1 中全体有理数构成的子空间, 因为 X 中多于一点的子空间都不连通 (不是区间), 故 X 中每个连通分支均是单点集.

Proposition 2.4.22

连通分支是闭集.

证明. 设 A 是 X 的一个连通分支, 则 $\overline{A}$ 也是连通的, 由 A 的极大性推出 $\overline{A} = A$.

2.4.4 局部连通性 (不考)

Definition 2.4.23 ▶ 局部连通

若 $\forall x \in X$, x 的所有连通邻域构成 x 的邻域基, 则称 X 为局部连通的.

**Remark**

- 当 X 局部连通时, 如果 U 是点 x 的邻域, 则必有 x 的连通邻域 $V \subset U$.
- 连通空间不一定局部连通, 例子为拓扑学家的连通曲线.

Proposition 2.4.24

局部连通空间的连通分支是开集.

证明. 设 X 局部连通, A 是 X 的连通分支, $\forall x \in A$, 由于 x 有一个连通邻域 V , 它也必须包含在 A 中, 所以 x 是 A 的内点.

2.5 道路连通性

2.5.1 道路

Definition 2.5.1 ▶ 道路

设 X 是拓扑空间. 从 $I = [0, 1]$ 到 X 的一个连续映射 $a: I \rightarrow X$ 称为 X 上的一条道路. $a(0)$ 和 $a(1)$ 称为起点和终点, 统称端点.

Remark

- 道路是映射, 而非映射的像集. 存在像集相同的不同映射.
- 若 $a(I)$ 为一个点 x , 即 a 是常值映射, 称其为点道路, 记为 e_x .
- 闭路: 起点与终点重合的道路.

Definition 2.5.2 ▶ 道路的两端运算

- 逆道路: 一条道路 $a: I \rightarrow X$ 的逆也是 X 上的道路, 记作 $\bar{a}$, 规定为 $\bar{a}(t) = a(1-t)$, $\forall t \in I$.
- 乘积道路: X 上的两条道路 a 与 b 如果满足 $a(1) = b(0)$, 则可规定它们的乘积 ab 为:

$$ab(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Remark ▶ 道路运算的性质

1. $\bar{\bar{e}}_x = e_x$
2. $(\bar{\bar{a}}) = a$
3. 当 ab 有意义时, $\bar{b}\bar{a}$ 有意义, 且 $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

这些性质是建立基本群的基础.



2.5.2 道路连通空间

Definition 2.5.3 ▶ 道路连通

拓扑空间 X 称为道路连通的, 如果 $\forall x, y \in X$, 存在 X 中分别以 x 和 y 为起点和终点的道路.

Example 2.5.4 ▶ E^n 中的凸集是道路连通的

若 A 是 E^n 中的凸集, 则 A 是道路连通的.

证明. $\forall x, y \in A$, 可作道路 a 为 $a(t) = (1-t)x + ty$ ($t \in I$). a 分别以 x, y 为起点和终点.

Example 2.5.5 ▶ 拓扑学家的正弦曲线不是道路连通的

证明: 若 X 上的道路 a 的起点 $a(0) \in B$, 则 $a(I) \subset B$. 从而 B 中的点不能与 A 中点用道路连结, A, B 是 X 的两个道路分支.

证明. 记 $J = a^{-1}(B)$, 它是 I 的非空闭集. 只需证 J 是开集, 即可由 I 连通推得 $J = I$.

设 $t \in J$, 则 $a(t) \in B$, 不妨设 $a(t) = (0, y), y \neq -1$. 此时, $U = \{(x, y) \in X : y \neq -1\}$ 即为 $a(t)$ 的开邻域. 由 a 连续性, $\exists t$ 的邻域 W 使得 $a(W) \subset U$.

因为 I 是局部连通的, 不妨设 W 连通, 从而 $a(W)$ 连通, $a(W)$ 包含于 U 的包含 $a(t)$ 的连通分支 $B \setminus \{(0, -1)\}$ 中. 这意味着 $W \subset J, t$ 是 J 的内点, 故 J 是开集.

Example 2.5.6 ▶ 习题 1

证明 S^n 道路连通 ($n \geq 1$).

证明. $\forall x_0, x_1 \in S^n$, 取 $y \in S^n \setminus \{x_0, x_1\}$. 则 $S^n \setminus \{y\} \cong E^n$. 由于 E^n 是道路连通的, 故 x_0, x_1 之间存在路径.

Proposition 2.5.7

道路连通空间一定连通.

证明. 设 X 道路连通. $\forall x_0, x_1 \in X$, 存在 X 中道路 a 使得 $a(0) = x_0, a(1) = x_1, x_0, x_1$ 在 X 的同一个连通子集 $a(I)$ 中, 属于同一连通分支. 这意味着 X 只有一个连通分支.

Example 2.5.8 ▶ 参考试题

- 请叙述基本概念: 拓扑空间的连通与道路连通性 (4 分)
- 连通与道路连通等价吗 (10 分)

**Proposition 2.5.9**

道路连通空间在连续映射下的像也是道路连通的.

证明. 设 X 道路连通, $f: X \rightarrow Y$ 连续. $\forall y_0, y_1 \in f(X)$, 取 $x_i \in f^{-1}(y_i), i = 0, 1$.

由于 X 道路连通, 存在道路 a 使得 $a(0) = x_0, a(1) = x_1$. 于是 $f \circ a$ 是 $f(X)$ 中的道路, 且 $(f \circ a)(0) = y_0, (f \circ a)(1) = y_1$.

Example 2.5.10 ▶ 习题 3

证明道路连通性可乘.

证明. 设 X, Y 道路连通. 设 $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$. $X \cong X \times \{y_0\}, X \times \{y_0\}$ 道路连通, $\exists$ 从 (x_0, y_0) 到 (x_1, y_0) 的道路 a , 同理存在从 (x_1, y_0) 到 (x_1, y_1) 的道路 b , 再作道路乘积即得.

Example 2.5.11 ▶ 习题 6

若 X_1, X_2 都是闭集, $X = X_1 \cup X_2$, 且 X 与 $X_1 \cap X_2$ 均道路连通, 则 X_1 与 X_2 都道路连通.

证明. 只需证 X_1 道路连通. 任取 $x_0, x_1 \in X_1$.

由于 X 道路连通, 存在道路 $a: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $a(0) = x_0, a(1) = x_1$.

由于 X_1 是闭集, a 是连续映射, 故 $J = a^{-1}(X_1)$ 是 $[0, 1]$ 的闭子集.

考虑 J 在 $[0, 1]$ 中的余集 $I \setminus J$, 它是一个开集, 可以表示为至多可数个互不相交开区间的并:

$$I \setminus J = \bigcup_k (u_k, v_k)$$

对于每一个开区间 (u_k, v_k) , 其端点 u_k, v_k 必属于闭集 J , 即 $a(u_k), a(v_k) \in X_1$.

同时, 对于 $t \in (u_k, v_k)$, 有 $a(t) \in X \setminus X_1 \subset X_2$. 由于 X_2 是闭集且 a 连续, 由极限性质可知端点像 $a(u_k) = \lim_{t \rightarrow u_k^+} a(t)$ 和 $a(v_k) = \lim_{t \rightarrow v_k^-} a(t)$ 也必须属于 X_2 .

因此, $a(u_k), a(v_k) \in X_1 \cap X_2$.

由于 $X_1 \cap X_2$ 道路连通, 存在道路 $b_k: [u_k, v_k] \rightarrow X_1 \cap X_2$ 连结 $a(u_k)$ 与 $a(v_k)$.

现在我们构造新映射 $\tilde{a}: [0, 1] \rightarrow X_1$:

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} b_k(t), & t \in (u_k, v_k) \\ a(t), & t \in J \end{cases}$$

即得 $\tilde{a}$ 是连结 x_0, x_1 且完全位于 X_1 中的道路.



2.5.3 道路连通分支

Definition 2.5.12

在拓扑空间 X 中定义等价关系 $\sim: x \sim y \Leftrightarrow x, y$ 可用 X 上的道路连通. 在等价关系下分成的等价类称为 X 的道路连通分支, 简称道路分支.

Remark

- $\forall x \in X$ 属于 X 的唯一道路分支.
- X 的每个道路连通的子集包含在某个道路分支中.
- X 道路连通的充分必要条件是它只有一个道路分支.

Proposition 2.5.13

道路分支是极大的道路连通子集.

证明. 设 A 是 X 的道路分支. 先证 A 道路连通: $\forall x_0, x_1 \in A$, 由道路分支定义, 存在 X 上道路 a , 使得 $a(i) = x, i = 0, 1$. 由于 $a(I)$ 道路连通, 它必含于某一道路分支. 又因为 $a(I) \cap A \neq \emptyset$, 所以 $a(I) \subset A, a$ 是 A 上的道路.

再证极大性: 设 $A \subset B, B$ 道路连通, 则 B 所在的道路分支就是 A , 即 $A = B$.

2.5.4 局部道路连通 (不考)

Definition 2.5.14 ▶ 局部道路连通

若 $\forall x \in X, x$ 的所有道路连通邻域构成 x 的邻域基, 则称 X 局部道路连通.

Example 2.5.15 ▶ 甬形子集

设 X 是 E^2 的子集: $X = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}, \text{ 或 } y = 0\}$.

X 道路连通, 但不是局部道路连通.

Theorem 2.5.16

局部道路连通空间 X 的道路分支就是连通分支, 它们是既开又闭的; 当 X 连通时, 它一定道路连通.

2.6 拓扑性质与同胚

拓扑不变性是判断两个拓扑空间是否同胚的有力工具. 如果两个空间同胚, 则它们具有完全相同的拓扑性质; 反之, 若能找到一个拓扑性质, 使得一个空间满足而另一个不满足, 则二者一定不同胚.

**Remark ▶ 五种拓扑空间的性质汇总**

在实数集 $\mathbb{R}$ 上, 我们建立了多种拓扑. 通过对比它们在分离性、连通性、紧致性等方面的差异, 可以判定它们两两不同胚. 请读者自行验证此表.

空间	T_1	连通	紧致	T_2	道路连通
E^1 (欧氏拓扑)	✓	✓	×	✓	✓
$(\mathbb{R}, \tau_f)$ (余有限)	✓	✓	✓	×	✓
$(\mathbb{R}, \tau_c)$ (余可数)	✓	✓	×	×	×
$(\mathbb{R}, \tau)$ (注 1)	×	✓	×	×	×
$(\mathbb{R}, \tau_s)$ (注 2)	✓	×	×	✓	×

注 1: $\tau = \{(-\infty, a) \mid -\infty \leq a \leq +\infty\}$.

注 2: τ_s 为半开区间 $[a, b)$ 作为拓扑基生成的拓扑.

Example 2.6.1 ▶ 参考试题

- 什么是离散拓扑、平凡拓扑, 欧氏拓扑、余可数拓扑、余有限拓扑 (5 分)
- 什么是 T_2 公理, 以上哪些满足 T_2 公理 (5 分)
- $\mathbb{R}$ 上赋予以上拓扑, 哪些是连通的, 为什么 (5 分)

Proposition 2.6.2 ▶ 常见空间的区分

- $S^1 \not\cong E^1$: 因为 S^1 是紧致的, 而 E^1 不是.
- $[a, b] \not\cong [0, +\infty)$: 前者紧致, 后者不紧致.
- $(0, +\infty) \cong E^1 \not\cong [0, +\infty)$.

证明. 反证法. 设存在同胚 $f: [0, +\infty) \rightarrow E^1$. 则其限制映射 $f|_{(0, +\infty)}: (0, +\infty) \rightarrow E^1 \setminus \{f(0)\}$ 也是同胚.

然而, $(0, +\infty)$ 是连通的, 而 $E^1 \setminus \{f(0)\}$ (欧氏直线去掉一点) 是不连通的. 矛盾! 故二者不同胚.

Example 2.6.3 ▶ 习题 3

若 $f: S^1 \rightarrow E^1$ 连续, 则 f 不是单射, 也不是满射.

证明. ① **非满射**: 因为 S^1 紧致, 连续映射下的像 $f(S^1)$ 必是 E^1 的紧致子集. 在 E^1 中, 紧致子集必是有界的, 而 E^1 无界, 故 $f(S^1) \neq E^1$.

② **非单射**: 反设 f 是单射. 由于 S^1 连通, 连续映射下的像 $f(S^1)$ 必是 E^1 的连通子集. 在 E^1 中, 连通且紧致的非单点子集必为闭区间 $[a, b]$. $f: S^1 \rightarrow [a, b]$ 是连续双射, 且定义域是紧致的, 像域是 Hausdorff 的, 则 f 是同胚. 由习题 2, 矛盾.



Example 2.6.4 ▶ 习题 4

若 $f: S^2 \rightarrow E^1$ 连续, 证明: 存在 $t \in E^1$ 使得 $f^{-1}(t)$ 是不可数集; 并且在 $f(S^2)$ 中, 原像为可数集的点不多于 2 个.

证明. 由于 S^2 连通且紧致, 其连续像 $f(S^2)$ 必为 E^1 中的紧致区间 $[a, b]$ (可能退化为一点, 此时结论是平凡的). 考虑 $t \in (a, b)$, 如果原像 $f^{-1}(t)$ 是可数集, 由于 S^2 去掉可数个点后仍然是道路连通的, $S^2 \setminus f^{-1}(t)$ 仍是连通空间. 然而, f 连续, $f(S^2 \setminus f^{-1}(t)) = [a, t) \cup (t, b]$, 将连通空间映射为不连通空间, 矛盾. 因此, 对于所有内点 $t \in (a, b)$, $f^{-1}(t)$ 必须是不可数集. 只有两个端点 a 和 b 的原像可能不具备这种“割断”性质, 故原像为可数集的点不多于 2 个.

Example 2.6.5 ▶ 习题 5

证明: $S^2 \not\cong S^1$.

证明. 利用“去掉点后分支个数”这一拓扑不变性:

- 在 S^1 中, 去掉任意两个点, 空间就不再连通.
- 在 S^2 中, 去掉任意可数个点, 空间依然是道路连通的.



商空间与闭曲面

3.1 几个常见曲面

Definition 3.1.1 ▶ 平环和 Möbius 带

把矩形面块弯曲并将两侧边粘接, 得到一截圆柱面 (如图 3.1). 它同胚于平面上由两个同心圆所夹的环带, 因此拓扑上称它为平环. 确切地说, 只要属于该拓扑等价类, 都称作平环.

制造平环时, 如果先将矩形拧转 180° , 再将侧边粘接 (如图 3-2 所示), 所得空间就是著名的 *Möbius* 带.

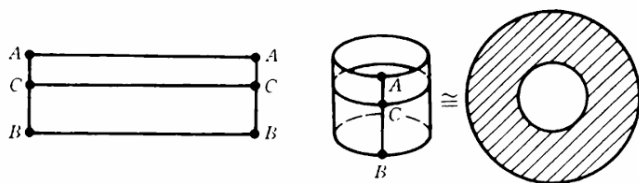


图 3-1

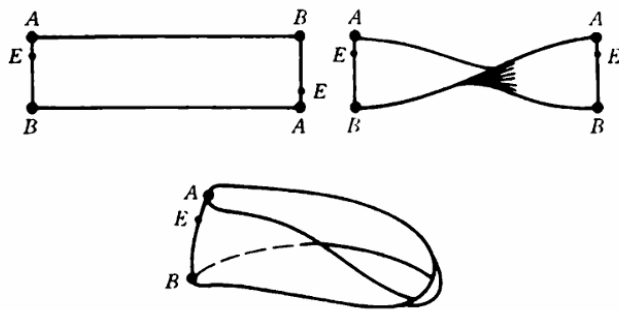


图 3-2

Example 3.1.2 ▶ 课后题 2

沿着 *Möbius* 带的中腰线剪开, 得到的是平环.

证明. 沿着 *Möbius* 带的中腰线剪开, 可以看作两条纸带互相首尾连接, 且每次连接时旋转 180° , 一共旋转 360° . 此时生成的即为课后题 1 的图像. 课后题 1 的图像与平环可以每个点一一对应 (即两者展开后的长方形上的点一一对应), 该映射为拓扑等价.

**Definition 3.1.3 ▶ 环面和 Klein 瓶**

环面和 *Klein* 瓶都可以用一截圆柱面（平环）将两个截面互相粘接而得到. 如果每一直母线段的两端粘合, 得到的是环面, 两个截面是以相同的方向相粘接的. 如果让两个截面方向相反地粘接, 就是 *Klein* 瓶.

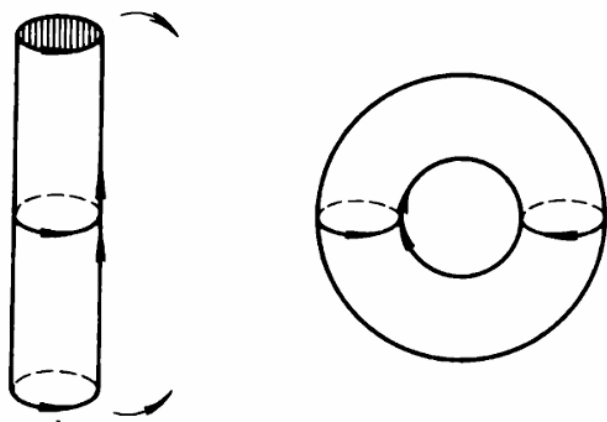


图 3-3

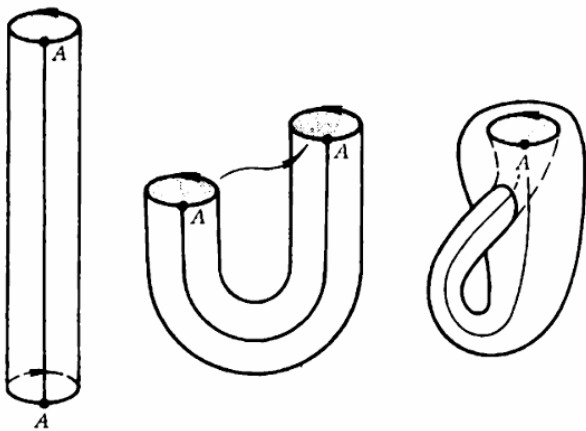


图 3-4

Proposition 3.1.4 ▶ T^2

圆周绕着与它共面但相离的轴线旋转得到环面（图 3-5），称此圆周上的点旋出的圆为纬圆，以轴线为界的半平面与环面的交线称为经圆； $S^1 \times S^1$ 是环面. 一般地记 $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$, 称为 n 维环面. 这里讨论的是 2 维环面 T^2 . 和平环一样, 环面和其他曲面都是一个拓扑等价类中空间的统称.

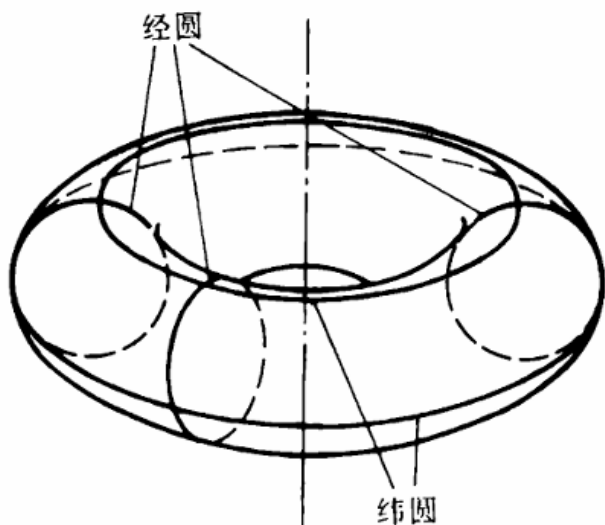


图 3-5

Definition 3.1.5 ▶ 射影平面 P^2

射影平面记作 P^2 , 它是射影几何学中的概念. 拓扑学中, 有几种描述它的方法, 其中之一是把圆盘 D^2 (它同胚于矩形面块) 的边界 S^1 上每一对对径点 (同一直径的两个端点) 粘合, 得到射影平面. 这种图形不好想象, 我们之后会学到它的其他描述方法 (见 3.2.19), 并在闭曲面的分类中运用它.

3.2 商空间与商映射

Definition 3.2.1 ▶ 商集和粘合映射

设拓扑空间 X 上作某种粘合得到新空间. 如果把要粘在一起的点称为互相等价的点, X 上就有了一个等价关系, 每个等价类被粘合为新空间上的一个点. 一般地, 一个集合 X 上如果有等价关系 $\sim$, 相应的等价类的集合记作 $X/\sim$, 称为 X 关于 $\sim$ 的**商集**. 把 X 上的点对应到它所在等价类, 得到映射 $p: X \rightarrow X/\sim$, 称为**粘合映射**.

Definition 3.2.2 ▶ 商拓扑和商映射

设 (X, τ) 是拓扑空间, $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系. 规定商集 $X/\sim$ 上的子集族

$$\tilde{\tau} := \{V \subset X/\sim \mid p^{-1}(V) \in \tau\},$$

则 $\tilde{\tau}$ 是 $X/\sim$ 上的一个拓扑, 称为 τ 在 $\sim$ 下的**商拓扑**, 称 $(X/\sim, \tilde{\tau})$ 是 (X, τ) 关于 $\sim$ 的**商空间**. ($\tilde{\tau}$ 是 $X/\sim$ 上使得粘合映射 p 连续的最大的拓扑.)

**Proposition 3.2.3**

设 X, Y 是两个拓扑空间, $\sim$ 是 X 上的一个等价关系, $g: X/\sim \rightarrow Y$ 是一映射. 则 g 连续 $\Leftrightarrow g \circ p$ 连续.

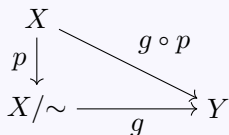
证明

$\Rightarrow$. 由于 p 连续, 当 g 连续时, 复合映射 $g \circ p$ 也连续 (见右图所示的交换图表).

$\Leftarrow$. 须要对 Y 的任一开集 V , 验证 $g^{-1}(V)$ 是 $X/\sim$ 的开集. 这是因为

$$p^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ p)^{-1}(V)$$

是 X 的开集 (根据 $g \circ p$ 连续), 按商拓扑的定义, $g^{-1}(V)$ 确是开集.

**Definition 3.2.4** ▶ 商空间

设 A 是拓扑空间 X 的一个子集 (通常是闭子集), 把 A 捏为一点 (也就是将 A 看作一个等价类, 别的点各自成一等价类), 得到的商空间记作 X/A .

Example 3.2.5 ▶ 常用的商空间

对任一拓扑空间 X , 记 $CX := X \times I/X \times \{1\}$, 称为 X 上的拓扑锥.

如果 $X \subset E^n$, 取 $a \in E^{n+1} \setminus E^n$, 规定 E^{n+1} 的子集

$$aX := \{ta + (1-t)x \mid t \in I, x \in X\},$$

称为 X 上以 a 为顶点的几何锥.

Definition 3.2.6 ▶ 商空间

设 X 和 Y 是拓扑空间, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为商映射, 如果

1. f 连续;
2. f 是满的;
3. 设 $B \subset Y$, 如果 $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集, 则 B 是 Y 的开集.

Proposition 3.2.7

如果 $f: X \rightarrow Y$ 是商映射, 则 $X/\sim^f \cong Y$.

证明



记 $p: X \rightarrow X/\sim$ 是粘合映射. 由 $\sim$ 的意义显然有一一对应 $g: X/\sim \rightarrow Y$, 使得 $g \circ p = f$, 等价地 $g^{-1} \circ f = p$. 用定理 3.2.3, 得到 g 和 g^{-1} 的连续性. 因此 g 是同胚.

Remark 3.2.8

粘合映射 p 是一种商映射. 或者说从 X 到 Y 的商映射 f 可以看作先进行一个粘合映射 p , 映射到 $X/\sim$, 再同伦到 Y 上. 而将 f 看作商映射的话, Y 就是 X 对应的商空间.

Proposition 3.2.9

连续的满映射 $f: X \rightarrow Y$ 如果还是开映射或闭映射, 则它是商映射.

证明

f 已满足 (1) 和 (2). 当 f 是开映射时, 如果 $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集, 则 $B = f(f^{-1}(B))$ (由 (2)) 是 Y 的开集, 因此 (3) 成立. 当 f 是闭映射时, 可类似地证明 (3) 的等价条件.

Proposition 3.2.10

如果 X 紧致, Y 是 Hausdorff 空间, 则连续满映射 $f: X \rightarrow Y$ 一定是商映射.

证明 设 A 是 X 的闭集, 则 A 紧致, 从而 $f(A)$ 紧致. 由于 Y 是 Hausdorff 空间, $f(A)$ 是 Y 的闭集. 于是 f 是闭映射. 再用命题 3.2.9, f 是商映射.

Proposition 3.2.11

商映射的复合也是商映射.

证明 设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 都是商映射. $g \circ f$ 显然是满的连续映射. 设 $C \subset Z$, 使得 $(g \circ f)^{-1}(C)$ 是开集. 由 f 是商映射和 $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C)$, 得出 $g^{-1}(C)$ 是开集, 再从 g 是商映射推出 C 是开集. 因此 $g \circ f$ 满足条件 (3).

Remark 3.2.12

上面三个命题主要用在证明映射是否为商映射; 或者证明商空间是否同伦于另一个空间, 已经给出商映射的构造, 需要证明其为商映射的时候.

Example 3.2.13

记 S^1 为 D^2 的边界圆周, 则 $D^2/S^1 \cong S^2$. 也就是说把 D^2 的边界捏为一点得到球面 S^2 . (就是包包子, 把包子皮边缘捏在一起成了一个球面)

证明 作 $f: D^2 \rightarrow S^2$ 为

$$f(re^{i2\pi\theta}) = (2\sqrt{r(1-r)}\cos\theta, 2\sqrt{r(1-r)}\sin\theta, 2r-1),$$



则 f 满、连续, 并且 D^2 紧致, S^2 是 Hausdorff 空间, 从而 f 是商映射. 不难看出, $\overset{f}{\sim}$ 就是实现捏合 S^1 为一点的等价关系. 于是, $D^2/S^1 = D^2/\overset{f}{\sim} \cong S^2$.

Example 3.2.14 ▶ 课后题 7

证明 $E^2/D^2 \cong E^2$.

证明用复数表示 E^2 上的点, 规定连续满映射 $f: E^2 \rightarrow E^2$ 为

$$f(re^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & r \leq 1, \\ (r-1)e^{i\theta}, & 1 \leq r. \end{cases}$$

只要再证明 f 是闭映射, 就可知道 f 是商映射. 等价关系 $\overset{f}{\sim}$ 就是把 D^2 捏为一点, 从而 $E^2 \cong E^2/\overset{f}{\sim} = E^2/D^2$.

设 A 是 E^2 的闭集.

(1) 如果 A 是有界闭集, 则 A 紧致, 从而 $f(A)$ 紧致, 是 E^2 的闭集.

(2) 如果 A 与 D^2 不相交, 则 $d(A, 0) = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. 利用 $f|_{E^2 \setminus D^2}: E^2 \setminus D^2 \rightarrow E^2 \setminus \{0\}$ 是同胚映射, 得到 $f(A)$ 是 $E^2 \setminus \{0\}$ 的闭集, 并且 $f(A) \subset E^2 \setminus B(0, \varepsilon)$, 从而是 E^2 的闭集.

(3) 一般情形, 将 A 表成 $A = A_1 \cup A_2$, 其中 A_1, A_2 分别适合 (1), (2) 的要求, 从而 $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2)$ 是 E^2 的闭集.

Proposition 3.2.15

把平环 X 的一条边界上的对径点都粘合, 得到 Möbius 带.

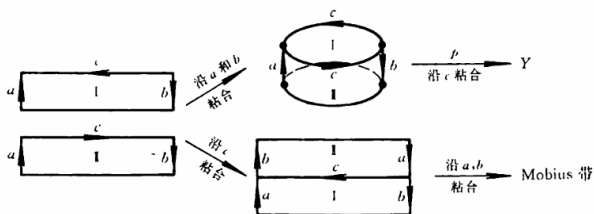


图 3-6

Proposition 3.2.16

将三角形两边“同向”地粘接得到 Möbius 带.

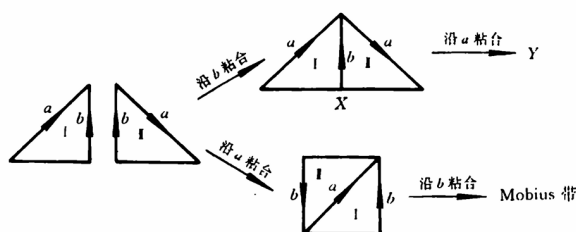


图 3-7

Remark 3.2.17

上面两个证明的过程都是先把原图形拆分,再按要求拼接(证明很简单,我们这里略过).这种方法在后续部分非常常见,也方便我们对一些闭曲面进行直观理解.

Proposition 3.2.18 P^2 的其他定义

设 S^2 为单位球面. 作映射 $f: S^2 \rightarrow P^2$ 为: $\forall x \in S^2$, $f(x)$ 是由 x 与原点 O 决定的直线, 则 f 是商映射. 把 S^2 上的每对对径点看成一个等价类. 因此 S^2 上粘合每一对对径点, 所得商空间就是 P^2 .

Remark 3.2.19

这里的定义与前文定义是等价的. 课本上给出了一边的推导, 即把 D^2 同伦为半球面. 另一半的推导也很简单, 有兴趣的同学可以试着证明一下.

一种证明方法是把球面沿着赤道分成上下两部分, 把下半部分绕竖轴转 180° , 此时原来上下半球的对径点就变成了正上方和正下方的两点. 此时将两个半球“拍扁”到赤道面上, 对应点粘合, 就映射到了 D^2 , 再将圆的边沿的对径点粘结, 就成了前文的定义.

Proposition 3.2.20

沿边界, 将 Möbius 带与 D^2 粘合在一起, 商空间就是 P^2 .

证明 3.2.15 说明 Möbius 带是平环粘合外边界上对径点所得商空间. 因此 X 是平环的外边界粘合对径点, 内边界粘接一圆盘所得空间(图 3-8). 如先粘接圆盘, 则可看出 X 是 P^2 .

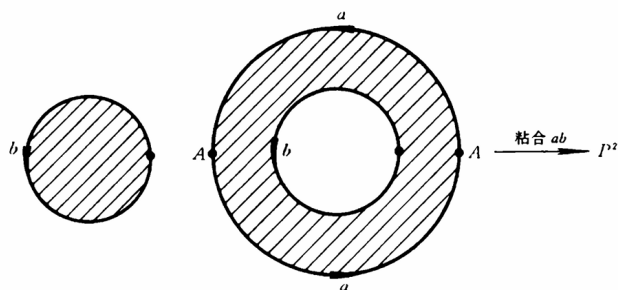




图 3-8

Definition 3.2.21

设 $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ ($i = 1, 2$) 是映射. 规定映射

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

为 $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$.

Proposition 3.2.22

设 $f : X \rightarrow Y$ 是商映射, Z 是局部紧致的 Hausdorff 空间, $\text{id} : Z \rightarrow Z$ 表示恒同映射, 则

$$f \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$$

也是商映射.

注: 该定理仅需了解, 不作重点.

3.3 拓扑流形与闭曲面

Definition 3.3.1 ▶ n 维 (拓扑) 流形

一个 Hausdorff 空间 X 称为 n 维 (拓扑) 流形, 如果 X 的任一点都有一个同胚于 E^n 或 E_+^n 的开邻域.

这里 E_+^n 是半个 n 维欧氏空间, 规定为

$$E_+^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \mid x_n \geq 0\}.$$

按照这个定义, E^n 本身就是一个 n 维流形, S^n , D^n 和 T^n 等也都是 n 维流形.

Example 3.3.2

二次锥面并不是流形.

证明 取顶点 O 的一个小开邻域 U . 去掉顶点 O , $U \setminus \{O\}$ 会变成两个不连通的开集, 对应锥面的上半部分和下半部分. 但是, $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}_+^2$ 去掉任意一点后, 仍然是连通的. 这说明 U 和 $\mathbb{R}^2$ (或 $\mathbb{R}_+^2$) 不可能同胚, 因为同胚会保持连通性.

**Definition 3.3.3 ▶ 内点与边界点**

设 M 是 n 维流形. 点 $x \in M$ 如果有同胚于 E^n 的开邻域, 就称 x 是 M 的内点 (注意此概念区别于第一章给出的子集内点的概念), 否则称为边界点. 全体内点的集合称为 M 的内部, 它是 M 的一个开集.

Remark 3.3.4

$n \neq m$ 时 $E^n \not\cong E^m$ (否则流形的维数就失去意义了); 还有, $E_+^n \not\cong E^n$ (否则就没有内点与边界点的区分了). 这些事实现在还不能证明, 以后将用基本群或同调群工具予以证明.

如果 n 维流形有边界点, 则记 ∂M 是它的边界点的集合. 可以证明 ∂M 是一个没有边界点的 $(n-1)$ 维流形.

Definition 3.3.5 ▶ 闭曲面

没有边界点的紧致连通曲面称为闭曲面.

S^2 和 T^2 都是闭曲面. E^2 不是闭曲面. D^2 , 平环和 Möbius 带不是闭曲面, 因为它们有边界点 (下章证明, 现在只能从直观上接受). 射影平面 P^2 和 Klein 瓶都是闭曲面 (将其展开成平面, 对每一个点找合适的邻域).

一般地, 假设 Γ 是一个偶数边的多边形, 如果成对地粘接 Γ 的边, 那么所得的商空间是闭曲面.

Definition 3.3.6 ▶ 环柄

在环面上挖去一个开圆盘, 说是在环面上挖一个洞, 把所得空间称为环柄.

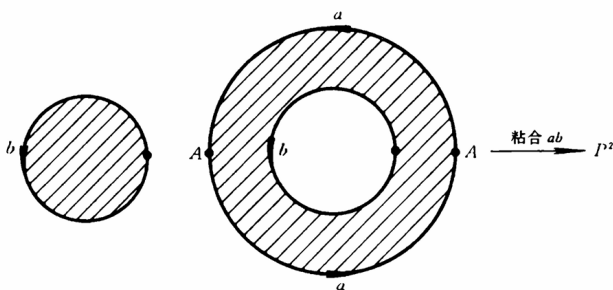


图 3-9

Definition 3.3.7 ▶ nT^2

如果在球面上安 n 个环柄, 把得到的闭曲面记作 nT^2 , 称作亏格为 n 的可定向闭曲面. 不难想象, 安环柄时洞口的位置和大小不影响拓扑等价类. 如果若干环柄连成了一个圈, 那么会相当于多了一个环柄.

**Definition 3.3.8** ▶ 交叉帽和 mP^2

在球面上挖一洞, 并在洞口粘接一条 Möbius 带 (图中的 Möbius 带是用 3.2.15 中的方法构造的), 把这种手术称为在球面上安交叉帽. 安了 m 个交叉帽的球面称为亏格为 m 的不可定向闭曲面, 记作 mP^2 .

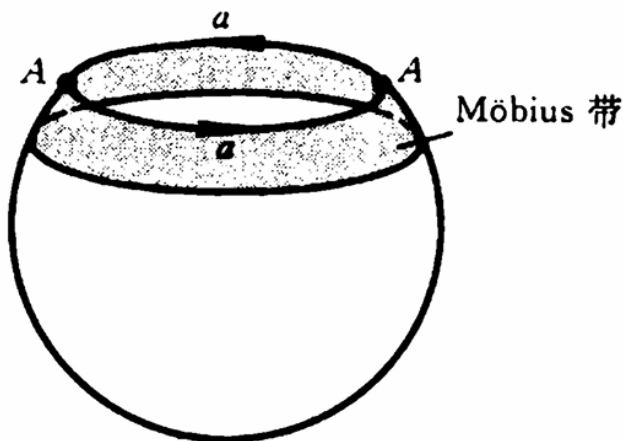


图 3-10

Example 3.3.9

Klein 瓶是 $2P^2$. (证明可以用后面的闭曲面分类定理)

3.4 闭曲面分类定理

Proposition 3.4.1 ▶ 闭曲面分类定理

$\{nT^2\}$ 和 $\{mP^2\}$ 不重复地列出了闭曲面的所有拓扑类型.

定理的结论有两部分:

1. 任一闭曲面或属 nT^2 型 (对某个非负整数 n), 或属 mP^2 型 (对某个正整数 m).
2. $\forall n, m, nT^2 \not\cong mP^2$; 当 $n \neq n'$ 时, $nT^2 \not\cong n'T^2$; 当 $m \neq m'$ 时, $mP^2 \not\cong m'P^2$.

注: (2) 的证明现在还无法进行. (1) 的证明过程不是重点, 这里略过, 想了解的同学可以阅读课本. 下面我们只挑重要的定义和判断闭曲面的方法.

Definition 3.4.2 ▶ 闭曲面的多边形表示

一个偶数边的多边形 Γ 如果把边成对的粘接, 则得到的商空间为闭曲面. 记 φ 是所说的粘合关系. 如果 Γ 在 φ 之下的商空间同胚于闭曲面 S , 就说 Γ 和 φ 一起构成 S 的一个多边形表示, 记作 (Γ, φ) . 粘合关系 φ 可以按下面约定在 Γ 上表出: 要粘接的边对标以同一字母, 并用箭头表示粘接方式.

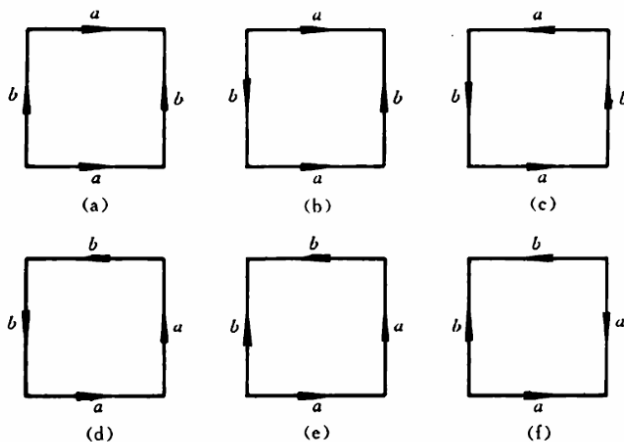


图 3-11

描述一个表示的另一方法是选定 Γ 的一个顶点和一个转向 (逆时针或顺时针), 然后依次写出标在各边上的字母, 并在右上角加或不加 -1 来表明其方向与转向相逆或一致. 例如若取左下角顶点和逆时针方向, 则图 3-25 中的 (b), (c), (e) 分别写出为

$$aba^{-1}b, \quad abab, \quad aabb^{-1}.$$

Definition 3.4.3 ▶ 标准多边形表示

提出“标准多边形表示”这个概念, 在这种表示中, 要求粘合法则有一定的规律. 标准多边形表示有两类, 它们用文字形式写出为

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}, \quad (\text{I}_n)$$

$$a_1a_1a_2a_2\cdots a_ma_m. \quad (\text{II}_m)$$

有 (I_n) 这种表示的是 nT^2 型曲面, 有 (II_m) 这种表示的是 mP^2 型曲面.

Definition 3.4.4

在 (Γ, φ) 中, Γ 的在 φ 下要粘接的边对称称为同向对, 如果两边标有相同的方向; 否则称反向对. 例如在 (I_n) 中, 只出现反向对, (II_m) 中只有同向对.

Γ 的所有顶点在粘合关系 φ 下分成若干等价类, 称它们为顶点类 (粘合在一起的多边形顶点就是一类). 例如图 3.16 中的 (a)、(b) 和 (d) 都只有一个顶点类; (c) 和 (e) 有两个顶点类; (f) 有三个顶点类.

**Remark 3.4.5 ▶ 判断闭曲面类型的步骤**

1. 把符号表示的多边形画出来.
2. 寻找有无同向对. 有就是 mP^2 , 没有就是 nT^2 .
3. 数出顶点类的数量.
4. 计算标准化表示时的边数. 它可以从原表示的边数 l 和顶点类个数 k 求出:

$$\text{边数} = l - 2k + 2.$$

$l = 2m$ 或 $l = 4n$, 这样, 从原表示可以直接知道曲面的类型.

Definition 3.4.6 ▶ 联通和

两个闭曲面各挖去一个圆盘的内部, 然后把洞口对接, 所得闭曲面称为原来两个闭曲面的联通和. 如果原来闭曲面为 M 和 N , 则它们的联通和记作 $M \# N$.

- (1) 若 M 为 mT^2 型, N 为 nT^2 型, $M \# N$ 是 $(m+n)T^2$.
- (2) 若 M 为 mP^2 型, N 为 nP^2 型, $M \# N$ 是 $(m+n)P^2$.
- (3) 若 M 为 mP^2 型, N 为 nT^2 型, $M \# N$ 是 $(m+2n)P^2$.

Example 3.4.7 ▶ 数试 21 级拓扑学补考试卷第三题

请指出下列闭曲面的拓扑类型;

(A)

(B)

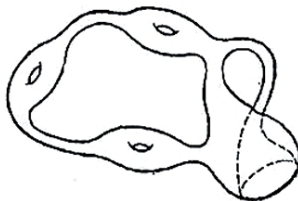
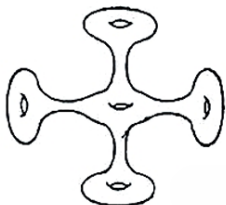


图 3-12

A 是五个 T^2 的联通和, 即为 $5T^2$; B 有三个环面和一个 $Klein$ 瓶, 整体又连成一个环, 所以是 $(2+2*4)P^2$ 即为 $10P^2$.



同伦与基本群

4.1 映射的同伦

Definition 4.1.1 ▶ 同伦

设 $f, g \in C(X, Y)$. 如果有连续映射 $H : X \times I \rightarrow Y$, 使得 $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$, 则称 f 与 g 同伦, 记作 $f \simeq g : X \rightarrow Y$, 或简记为 $f \simeq g$; 称 H 是连接 f 和 g 的一个同伦 (或称伦移), 记作 $H : f \simeq g$ (或 $f \stackrel{H}{\simeq} g$), 如图 4.1 所示.

Definition 4.1.2 ▶ t -切片

对每个 $t \in I$, 同伦 H 决定 $h_t \in C(X, Y)$ 为: $h_t(x) = H(x, t)$, 于是得到单参数连续映射族 $\{h_t \mid t \in I\}$, 称 h_t 为 H 的 t -切片. 根据定义 $h_0 = f, h_1 = g$. 由 $t \rightarrow h_t$ 决定了映射 $h : I \rightarrow C(X, Y)$. 在 $C(X, Y)$ 上的一种特殊拓扑 (所谓紧开拓扑) 下, h 是连续的. 于是, 一个同伦决定了 $C(X, Y)$ 中的一条道路; 反过来 $C(X, Y)$ 中一条道路决定了一个同伦.

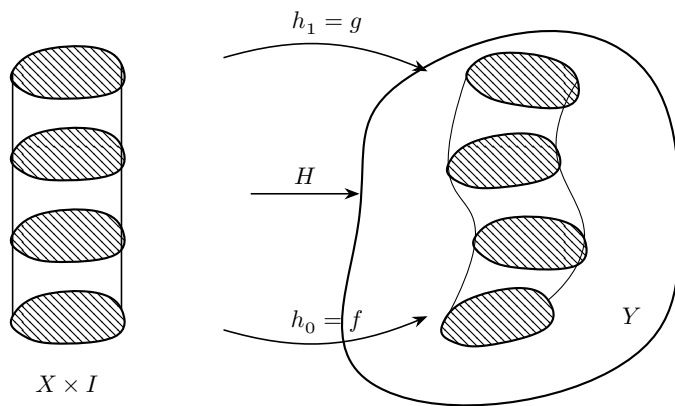


图 4.1: 同伦示意图

Example 4.1.3

设 $f, g \in C(X, E^n)$. 规定 $H : X \times I \rightarrow E^n$ 为

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

容易验证 H 是 f 到 g 的同伦. H 的直观意义为: 当 t 从 0 变到 1 时, $h_t(x)$ 从 $f(x)$ 到 $g(x)$ 作匀速直线运动. 因此称这种同伦为直线同伦. 直线同伦构造的基础是线段 $\overline{f(x)g(x)} \subset E^n$. 因此, 把



E^n 换成 E^n 的凸子集, 同样可构造直线同伦.

Example 4.1.4

若 $f, g \in C(X, S^n)$, 使得 $\forall x \in X, f(x) \neq -g(x)$, 则可规定 f 到 g 的同伦 H 为

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}$$

(如图 4.2 所示). H 有意义是因为原点 $O \notin \overline{f(x)g(x)}, \forall x \in X$, 从而对任何 $t \in I, \|(1-t)f(x) + tg(x)\| \neq 0$.

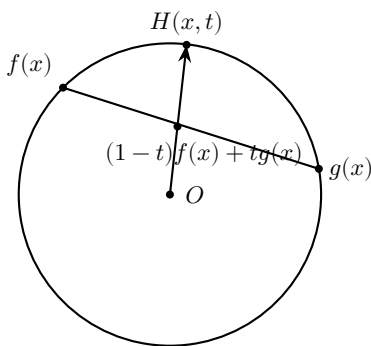


图 4.2: 示意图

Example 4.1.5 ▶ 23 级数试考试题

如果连续映射 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 与恒同映射不同伦, 则 f 有不动点.

证明. 用反证法. 假设 f 没有不动点, 即对于任意 $z \in S^1$, 都有 $f(z) \neq z$.

规定 S^1 上的对径映射为 $h: S^1 \rightarrow S^1$, 即 $h(z) = -z$. 由于 $f(z) \neq z$, 且 $z = -(-z) = -h(z)$, 我们得到 $f(z) \neq -h(z)$. 这意味着 $f(z)$ 与 $h(z)$ 对于任意 z 都不互为对径点. 根据例 4.1.4, 可知 $f \simeq h$.

接下来补充证明 $h \simeq \text{id}_{S^1}$: 我们将 S^1 视为复平面上的单位圆. 定义同伦映射 $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ 为

$$H(z, t) = e^{i\pi t} \cdot z.$$

显然 H 是连续的 (相当于将圆周整体旋转). 验证端点条件:

$$H(z, 0) = e^0 \cdot z = z = \text{id}_{S^1}(z),$$

$$H(z, 1) = e^{i\pi} \cdot z = -1 \cdot z = -z = h(z).$$

因此 h 同伦于恒同映射 id_{S^1} .

综上所述, 由同伦的传递性可得 $f \simeq \text{id}_{S^1}$. 这与题目已知条件“ f 与恒同映射不同伦”相矛盾. 故假设不成立, f 必有不动点.

**Example 4.1.6**

设 $f, g \in C(X, S^1)$, 使得 $\forall x \in X, f(x) = -g(x)$, 则 $f \simeq g$. 连结 f 和 g 的一个同伦可构造如下: 把 S^1 看作复平面上的单位圆周, 其上点用单位复数 $e^{it} (t \in \mathbb{R})$ 表示, 令

$$H(x, t) = e^{it\pi} \cdot f(x).$$

直观上看, $h_t(x)$ 是把 $f(x)$ 绕原点转 $t\pi$ 角.

Proposition 4.1.7 ▶ 等价关系

同伦关系是 $C(X, Y)$ 中的一种等价关系 (注意传递性的证明过程).

Definition 4.1.8 ▶ 映射类

把 $C(X, Y)$ 在同伦关系下分成的等价类称为**映射类**. 所有映射类的集合记作 $[X, Y]$. (例 4.1.3 说明, 当 Y 是 E^n 的凸集时, $[X, Y]$ 中只有一个映射类)

Example 4.1.9

设 X 是单点空间 $\{x\}$. 则 $C(\{x\}, Y)$ 与 Y 之间有一个自然的一一对应: $f \rightarrow f(x)$. $\forall y \in Y$, 记 f_y 为像点是 y 的映射. 则 f_{y_1} 到 f_{y_2} 的一个同伦就是 Y 中从 y_1 到 y_2 的一条道路, $f_{y_1} \simeq f_{y_2} \iff y_1$ 和 y_2 在 Y 的同一路径分支中 (下方例 4.1.9). 因此 $[\{x\}, Y]$ 与 Y 的道路分支的集合有一个一一对应关系. 特别当 Y 道路连通时, $[\{x\}, Y]$ 只有一个映射类.

Example 4.1.10

$f_{y_1} \simeq f_{y_2} \iff y_1$ 与 y_2 在 Y 的同一路径分支中.

证明. (充分性 $\Leftarrow$) 假设 y_1 与 y_2 在 Y 的同一路径分支中. 则存在 Y 中的一条连续道路 $\alpha: I \rightarrow Y$, 使得 $\alpha(0) = y_1$ 且 $\alpha(1) = y_2$. 定义映射 $H: X \times I \rightarrow Y$ 为 $H(x, t) = \alpha(t)$. 由于 α 是连续映射, H 作为 α 与投影映射的复合也是连续的. 此外, 对于任意 $x \in X$, 有 $H(x, 0) = \alpha(0) = y_1 = f_{y_1}(x)$ 且 $H(x, 1) = \alpha(1) = y_2 = f_{y_2}(x)$. 因此 H 是 f_{y_1} 到 f_{y_2} 的同伦, 即 $f_{y_1} \simeq f_{y_2}$.

(必要性 $\Rightarrow$) 假设 $f_{y_1} \simeq f_{y_2}$. 则存在连续映射 $H: X \times I \rightarrow Y$, 使得对于任意 $x \in X$, 有 $H(x, 0) = y_1$ 且 $H(x, 1) = y_2$. 取定一点 $x_0 \in X$ (假设 X 非空), 定义道路 $\alpha: I \rightarrow Y$ 为 $\alpha(t) = H(x_0, t)$. 由于 H 是连续的, α 也是连续的. 验证端点可知 $\alpha(0) = H(x_0, 0) = y_1$, $\alpha(1) = H(x_0, 1) = y_2$. 这表明 y_1 与 y_2 之间存在连续道路, 即它们位于 Y 的同一路径分支中.

Proposition 4.1.11 ▶ 同伦关系的复合

若 $f_0 \simeq f_1: X \rightarrow Y$, $g_0 \simeq g_1: Y \rightarrow Z$, 则 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1: X \rightarrow Z$ (证明的关键在于柱化, 对 F 进行柱化的意义在于让 F 适合 G 的定义域, 从而可以复合同伦 F, G).

**Definition 4.1.12 ▶ 零伦**

如果 f 同伦于一个常值映射, 则称 f 是零伦的.

Example 4.1.13

设 X 是 E^n 的凸集, 则 $\text{id}_X : X \rightarrow X$ 零伦 (例 4.1.3). 设 e 是 X 到 X 的一个常值映射, 则 $\text{id}_X \simeq e$. 对任何拓扑空间 Y 和连续映射 $f : X \rightarrow Y$, $f = f \circ \text{id}_X \simeq f \circ e$, $f \circ e$ 是常值映射, 因此 f 是零伦的. 特别对道路连通空间 Y , $[X, Y]$ 只有一个映射类.

Example 4.1.14

如果连续映射 $f : X \rightarrow S^n$ 不满, 则 f 零伦.

证明. 因为 f 不是满射, 所以存在一点 $p \in S^n$ 使得 $p \notin f(X)$. 于是可以将 f 视为映射 $f : X \rightarrow S^n \setminus \{p\}$. 我们知道, n 维球面去掉一点 $S^n \setminus \{p\}$ 同胚于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$. 由于 $\mathbb{R}^n$ 是凸集, 根据例 4.1.3, 任何映入 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射都同伦于常值映射. 因为 $S^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$, 所以 f 作为映入 $S^n \setminus \{p\}$ 的映射同伦于常值映射, 即 f 在 $S^n \setminus \{p\}$ 中零伦. 由于 $S^n \setminus \{p\} \subset S^n$, f 在 S^n 中自然也是零伦的.

Remark 4.1.15

$I = [0, 1]$ 是凸集, 因此拓扑空间 X 上每条道路 (注意它是映射) 都同伦于点道路. 道路连通空间的任何两条道路都同伦. 这样, 道路的一般同伦并不能反映出空间的很多信息. 对道路, 下面所用的是一种有附加要求的同伦.

Definition 4.1.16 ▶ 相对于 A 同伦

设 $A \subset X, f, g \in C(X, Y)$. 如果存在 f 到 g 的同伦 H , 使得当 $a \in A$ 时, $H(a, t) = f(a) = g(a), \forall t \in I$, 则称 f 和 g 相对于 A 同伦, 记作 $f \simeq g \text{ rel } A$; 称 H 是 f 到 g 的相对于 A 的同伦, 记作 $H : f \simeq g \text{ rel } A$ (或 $f \stackrel{H}{\simeq} g \text{ rel } A$).

Example 4.1.17

设 Y 是 E^n 的凸集, $f, g \in C(X, Y)$. 如果 x 使得 $f(x) = g(x)$, 则 f 到 g 的直线同伦 H 满足 $H(x, t) = f(x) = g(x), \forall t \in I$. 记 $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, 则 $H : f \simeq g \text{ rel } A$.

Proposition 4.1.18 ▶ 等价关系

取定 $A \subset X$, 则 $C(X, Y)$ 中相对于 A 的同伦也是等价关系.

Proposition 4.1.19 ▶ 同伦关系的复合

设 $f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow Y \text{ rel } A, g_0 \simeq g_1 : Y \rightarrow Z \text{ rel } B$, 并且 $f_0(A) \subset B$, 则 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 \text{ rel } A$.

**Definition 4.1.20 ▶ 定端同伦**

设 a, b 是 X 上的两条道路, 如果 $a \simeq b \text{ rel } \{0, 1\}$, 则称 a 与 b 定端同伦 (图 4.3), 记作 $a \simeq b$.

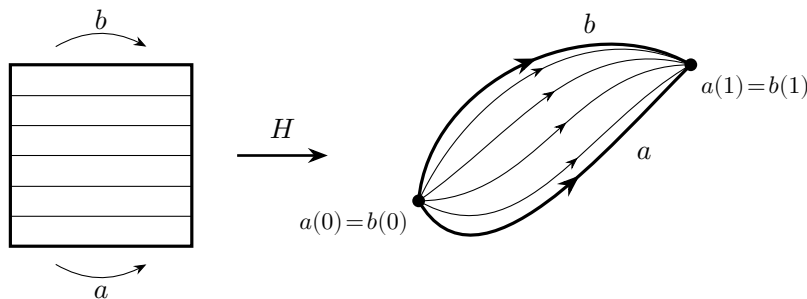


图 4.3: 定端同伦

Example 4.1.21

记 $p: I \rightarrow S^1$ 规定为 $p(t) = e^{i2\pi t}$. $f, g \in C(S^1, X)$. 证明

$$f \circ p \simeq g \circ p \iff f \simeq g \text{ rel } \{1\}.$$

证明. ($\implies$) 记 $H: I \times I \rightarrow X$ 是 $f \circ p$ 到 $g \circ p$ 的定端同伦, 则它把 $\{0, 1\} \times I$ 映为一点 x_0 . 规定 $G: S^1 \times I \rightarrow X$ 为 $G(e^{i2\pi t}, s) = H(t, s)$, 则 $G(1, s) = x_0, \forall s \in I$, 并且 $G(e^{i2\pi t}, 0) = H(t, 0) = f \circ p(t) = f(e^{i2\pi t})$, 同理 $G(e^{i2\pi t}, 1) = g(e^{i2\pi t})$, 即 $G: f \simeq g \text{ rel } \{1\}$.

($\impliedby$) 若 $G: f \simeq g \text{ rel } \{1\}$. 作 $H: I \times I \rightarrow X$ 为 $H(t, s) = G(e^{i2\pi t}, s)$. 验证 H 的性质: 首先, $H(t, 0) = G(e^{i2\pi t}, 0) = f(e^{i2\pi t}) = f \circ p(t)$; 其次, $H(t, 1) = G(e^{i2\pi t}, 1) = g(e^{i2\pi t}) = g \circ p(t)$. 最后检查端点条件: 由于 G 是相对于 $\{1\}$ 的同伦, $G(1, s) = x_0$ (常点), 故 $H(0, s) = G(1, s) = x_0$ 且 $H(1, s) = G(1, s) = x_0$. 因此 H 把两端点固定, 是 $f \circ p$ 到 $g \circ p$ 的定端同伦.

Definition 4.1.22 ▶ 道路类

X 的所有道路在 $\simeq$ 关系下分成的等价类称为 X 的**道路类**. X 的所有道路类的集合记作 $[X]$. 一条道路 a 所属的道路类记作 $\langle a \rangle$, 称 a 的起、终点为 $\langle a \rangle$ 的起、终点. 起终点重合的道路类称为**闭路类**. 称起 (终) 点为它的**基点**.



4.2 基本群的定义

4.2.1 道路类的逆与乘积

Proposition 4.2.1 ▶ 定义合理性

- (1) 如果 $a \simeq b$, 则 $\bar{a} \simeq \bar{b}$;
- (2) 如果 $a \simeq b, c \simeq d$, 并且 ac 有意义, 则 $ac \simeq bd$.

Definition 4.2.2 ▶ 道路类的逆与乘积

- (1) 规定道路类 α 的逆 $\alpha^{-1} = \langle \bar{a} \rangle$, 其中 $a \in \alpha$;
- (2) 若道路类 α 的终点与 β 的起点重合, 规定 α 与 β 的乘积 $\alpha\beta = \langle ab \rangle$, 其中 $a \in \alpha, b \in \beta$.

4.2.2 道路类运算的性质

Proposition 4.2.3 ▶ 道路与连续映射

设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, a, b 是 X 上两条道路.

- (1) 如果 $a \simeq b$, 则 $f \circ a \simeq f \circ b$;
- (2) 如果 a 与 b 可乘, 则 $f \circ a$ 与 $f \circ b$ 也可乘, 并且 $(f \circ a)(f \circ b) = f \circ (ab)$;
- (3) $\overline{f \circ a} = f \circ \bar{a}$.

Remark 4.2.4

根据 (1), f 导出一个对应 $f_\pi: [X] \rightarrow [Y]$ 为 $f_\pi\langle a \rangle = \langle f \circ a \rangle$;
 (2) 和 (3) 分别说明 f_π 保持乘积运算和逆运算:

$$f_\pi(\alpha\beta) = f_\pi(\alpha)f_\pi(\beta), \quad (f_\pi(\alpha))^{-1} = f_\pi(\alpha^{-1}).$$

Proposition 4.2.5 ▶ 结合律

道路类乘法有结合律.

Proposition 4.2.6 ▶ 单位元

设道路类 α 的起终点分别是 x_0 和 x_1 . 记 e_{x_0}, e_{x_1} 分别是 x_0, x_1 处的点道路, 则

- (1) $\alpha\alpha^{-1} = \langle e_{x_0} \rangle, \quad \alpha^{-1}\alpha = \langle e_{x_1} \rangle$;
- (2) $\langle e_{x_0} \rangle\alpha = \alpha = \alpha\langle e_{x_1} \rangle$.



4.2.3 基本群及其同态

Definition 4.2.7 ▶ 基本群

设 X 是一个拓扑空间, 取定 $x_0 \in X$. 把 X 的以 x_0 为基点的所有闭路类的集合记作 $\pi_1(X, x_0)$. 于是 $\pi_1(X, x_0)$ 中任何两个元素都是可乘的, 乘积仍在 $\pi_1(X, x_0)$ 中. 称 $\pi_1(X, x_0)$ 在道路类乘法运算下构成的群为 X 的以 x_0 为基点的**基本群**.

Example 4.2.8 ▶ 凸集的基本群

设 X 是 E^n 的凸集, $x_0 \in X$ 是任一点. 因为 x_0 处的任意两条闭路都定端同伦, 所以 $\pi_1(X, x_0)$ 只有一个元素, 它是平凡群.

Example 4.2.9 ▶ 平凡拓扑空间的基本群

设 X 是平凡拓扑空间 (即不可分空间). 证明对任何 $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ 是平凡群.

证明. 当 X 是平凡拓扑空间时, X 上的开集仅有空集 $\emptyset$ 和全空间 X . 根据连续映射的定义, 任何映射 $f: Y \rightarrow X$ 都是连续的, 因为任何开集的原像要么是空集, 要么是全空间, 均为 Y 中的开集. 于是, 对于 X 中任何两条具有相同起点和终点的道路 $a, b: I \rightarrow X$, 我们总可以构造一个映射 $H: I \times I \rightarrow X$, 该映射在平凡拓扑下必然连续.

这意味着 X 中任何两条定端道路都定端同伦. 特别地, 以 x_0 为基点的任何闭路都与恒同闭路 e_{x_0} 同伦. 因此, 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 只有一个元素, 即它是一个平凡群.

Example 4.2.10 ▶ 离散拓扑空间的基本群

设 X 是离散拓扑空间, $x_0 \in X$. 证明 $\pi_1(X, x_0)$ 是平凡群.

证明. 在离散拓扑空间中, 每一个单点集 $\{x\}$ 都是开集. 由于单位区间 $I = [0, 1]$ 是连通空间, 连续映射下的连通集的像必为连通集.

离散空间中的连通子集只能是单点集, 因此离散拓扑空间的每个道路分支都是单点集. 这意味着任何道路 $a: I \rightarrow X$ 都必须是常值映射.

由此可知, 以 x_0 为起终点的闭路只有一条, 即点道路 $e_{x_0}(t) = x_0$. 既然空间中只存在唯一的闭路, 那么在该基点下的基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 必然只有一个元素, 即它是平凡群.

Example 4.2.11

设 x_0 是 $(\mathbb{R}, \tau_2)$ 的一点, 其中 τ_2 是以 $\{[a, b] \mid a < b\}$ 为基产生的拓扑. 证明 $(\mathbb{R}, \tau_2)$ 在 x_0 的基本群是平凡群.

证明. 首先考虑 $(\mathbb{R}, \tau_2)$ 的连通性. 对于任何实数 c , 集合 $[c, +\infty)$ 在 τ_2 中显然是开集. 同时, 其补集 $(-\infty, c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [c-n, c)$ 也是开集的并, 故也是开集. 这说明在 τ_2 拓扑下, 任何射线 $[c, +\infty)$ 既是开集又是闭集.

对于任何两个不同的点 $x, y \in \mathbb{R}$ (设 $x < y$), 我们总可以取 $c \in (x, y)$, 使得 $x \in (-\infty, c)$ 且



$y \in [c, +\infty)$. 由于这两个集合都是开集且不相交, 这说明 $(\mathbb{R}, \tau_2)$ 的连通分支均为单点集. 由于单位区间 $I = [0, 1]$ 在标准拓扑下是连通空间, 任何连续映射 $f: I \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_2)$ 的像 $f(I)$ 必须是 $(\mathbb{R}, \tau_2)$ 中的连通子集. 根据前述分析, $f(I)$ 只能是一个单点. 由此可知, 任何以 x_0 为基点的闭路 $a: I \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_2)$ 必须满足 $a(t) = x_0$ 对所有 $t \in I$ 成立. 也就是说, 空间中唯一的闭路就是恒同闭路 e_{x_0} . 因此, 基本群 $\pi_1(\mathbb{R}, \tau_2, x_0)$ 只有一个元素, 是一个平凡群.

Definition 4.2.12 ▶ 基本群同态

设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 我们已建立保持乘法运算的对应 $f_\pi: [X] \rightarrow [Y]$. 如果 $x_0 \in X$, 记 $y_0 = f(x_0)$, 则当 $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ 时, $f_\pi(\alpha) \in \pi_1(Y, y_0)$. 因此 f_π 在 $\pi_1(X, x_0)$ 上的限制 $f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 是一个同态. 称同态 $f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 为 f 诱导出的基本群同态.

Proposition 4.2.13 ▶ 同态的复合

设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 都是连续映射, $x_0 \in X, y_0 = f(x_0), z_0 = g(y_0)$. 则

$$(g \circ f)_\pi = g_\pi \circ f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0).$$

Theorem 4.2.14 ▶ 基本群是拓扑不变量

若 $f: X \rightarrow Y$ 是同胚映射, $x_0 \in X, y_0 = f(x_0)$, 则

$$f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

是同构.

Example 4.2.15

设 $f: X \rightarrow Y$ 连续, $x_i \in X, y_i = f(x_i), i = 0, 1$. 记 ω 是从 x_0 到 x_1 的道路类. 证明下面的同态图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow \omega_\# & & \downarrow (f \circ \omega)_\# \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

证明. 为了证明图表可交换, 我们需要证明对于任何元素 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, 沿两条路径得到的结果相等, 即证明:

$$f_\pi \circ \omega_\# = (f \circ \omega)_\# \circ f_\pi$$

首先, 根据基点更换同态 $\omega_\#$ 的定义, 对于 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, 我们有:

$$\omega_\#([\alpha]) = [\omega^{-1} \cdot \alpha \cdot \omega]$$



接着作用诱导同态 f_π , 根据 f_π 保持乘积运算和逆运算的性质:

$$f_\pi(\omega_\#([\alpha])) = f_\pi([\omega^{-1} \cdot \alpha \cdot \omega]) = [f \circ (\omega^{-1} \cdot \alpha \cdot \omega)]$$

由于映射 f 与道路的复合满足 $f \circ (a \cdot b) = (f \circ a) \cdot (f \circ b)$, 上式可以进一步化为:

$$f_\pi(\omega_\#([\alpha])) = [f \circ \omega^{-1}] \cdot [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \omega] = [f \circ \omega]^{-1} \cdot [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \omega]$$

现在, 我们沿着图表的另一条路径计算. 首先作用 f_π :

$$f_\pi([\alpha]) = [f \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$$

记 $\eta = f \circ \omega$, 则 η 是 Y 中从 y_0 到 y_1 的道路. 作用 $(f \circ \omega)_\#$ (即 $\eta_\#$):

$$(f \circ \omega)_\#(f_\pi([\alpha])) = \eta_\#([f \circ \alpha]) = \eta^{-1} \cdot [f \circ \alpha] \cdot \eta$$

代入 $\eta = f \circ \omega$, 得:

$$(f \circ \omega)_\#(f_\pi([\alpha])) = [f \circ \omega]^{-1} \cdot [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \omega]$$

比较两条路径的计算结果可知, 它们对于任何 $[\alpha]$ 都是相等的. 因此, 该同态图表可交换.

Example 4.2.16

设 A 是 X 的收缩核, $i: A \rightarrow X$ 是包含映射, $r: X \rightarrow A$ 是收缩映射. 证明对于任何 $x_0 \in A$, $i_\pi: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 是单同态, $r_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ 是满同态.

证明. 根据收缩映射的定义, 映射 $r: X \rightarrow A$ 满足 $r \circ i = id_A$, 其中 id_A 是 A 上的恒等映射. 考虑其诱导的基本群同态. 根据复合映射的诱导同态等于诱导同态的复合, 对于基点 $x_0 \in A$, 我们有:

$$(r \circ i)_\pi = r_\pi \circ i_\pi: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$$

由于 $(id_A)_\pi$ 显然是 $\pi_1(A, x_0)$ 上的恒等同态 $id_{\pi_1(A, x_0)}$, 因此:

$$r_\pi \circ i_\pi = id_{\pi_1(A, x_0)}$$

这说明 i_π 是单射, 即 i_π 是单同态, r_π 是满射, 即 r_π 是满同态.

4.2.4 基本群与基点

Theorem 4.2.17 ▶ 基点属于同一道路分支的基本群同构

先设 x_0 与 x_1 是在 X 的同一道路分支中的两点. 设 ω 是从 x_0 到 x_1 的一个道路类. $\forall \alpha \in \pi_1(X, x_0), \omega^{-1}\alpha\omega \in \pi_1(X, x_1)$. 于是, 由 $\omega_\#(\alpha) = \omega^{-1}\alpha\omega$ 规定了对应 $\omega_\#: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, 则



(1) 如果 ω' 是从 x_1 到 x_2 的道路类, 则

$$(\omega\omega')_{\#} = \omega'_{\#} \circ \omega_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_2);$$

(2) $\omega_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ 是同构.

Remark 4.2.18

根据 (1), $\omega_{\#}^{-1} \circ \omega_{\#} = (\omega\omega^{-1})_{\#} = \langle e_{x_0} \rangle_{\#}$ 显然是恒同同构; 同理 $\omega_{\#} \circ \omega_{\#}^{-1}$ 也是恒同同构. 因此 $\omega_{\#}$ 是同构, $\omega_{\#}^{-1}$ 是它的逆. 从定义容易看出, 当 $\omega \in \pi_1(X, x_0)$, $\omega_{\#}$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 上的一个内自同构. 如果 X 是道路连通的, 则它的基本群的同构型与基点的选择无关. 这个同构型就叫作 X 的基本群, 记作 $\pi_1(X)$.

Definition 4.2.19 ▶ 单连通空间

道路连通并有平凡基本群的拓扑空间称为单连通空间.

Example 4.2.20

设 X 单连通, a, b 是 X 中有相同起、终点的道路, 证明 $a \simeq b$.

证明. 设道路 a 和 b 的共同起点为 x_0 , 共同终点为 x_1 , 即 $a(0) = b(0) = x_0$, $a(1) = b(1) = x_1$. 我们构造复合道路 $a \cdot b^{-1}$, 其中 b^{-1} 是 b 的逆道路. 显然, $a \cdot b^{-1}$ 是一条以 x_0 为起点和终点的闭路.

由于 X 是单连通空间, 根据定义, X 是道路连通的且对于任何基点 $x_0 \in X$, 其基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 都是平凡群. 这意味着 X 中任何以 x_0 为基点的闭路都定端同伦于恒同闭路 e_{x_0} .

因此, 我们有闭路的同伦类相等关系:

$$[a \cdot b^{-1}] = [e_{x_0}]$$

根据道路类运算的性质, 上式可以写为:

$$[a] \cdot [b]^{-1} = [e_{x_0}]$$

在等式两边同时右乘 $[b]$, 利用道路类乘法的结合律以及逆元素的性质, 得到:

$$([a] \cdot [b]^{-1}) \cdot [b] = [e_{x_0}] \cdot [b]$$

$$[a] = [b]$$

根据道路类相等的定义, 这说明道路 a 与 b 是定端同伦的, 即 $a \simeq b$.

**Proposition 4.2.21**

设 A 是 X 的一个道路分支, $x_0 \in A, i: A \rightarrow X$ 是包含映射. 则

$$i_\pi: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

是同构.

Remark 4.2.22

设 x_0, x_1 在 X 的不同的道路分支中. 记 A_i 是包含 x_i 的道路分支, 命题说明 $\pi_1(X, x_i) \cong \pi_1(A_i), i = 0, 1$. 一般来说, $\pi_1(A_0)$ 与 $\pi_1(A_1)$ 是没有什么联系的. 因此当 x_0, x_1 不在同一道路分支中时, $\pi_1(X, x_0)$ 与 $\pi_1(X, x_1)$ 没有关系.

Example 4.2.23

证明若 x_0, x_1 在 X 的同一路径分支中, 则从 x_0 到 x_1 的任意道路类决定相同的同构 $\iff \pi_1(X, x_0)$ 是交换群.

证明. 为了证明此题, 我们首先证明: 设 ω, ω' 是从 x_0 到 x_1 的两个道路类. 则 $\omega_\# = \omega'_\# \iff \omega\omega'^{-1}$ 属于 $\pi_1(X, x_0)$ 的中心.

根据定义, 对于任何 $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, 有 $\omega_\#(\alpha) = \omega^{-1}\alpha\omega$ 以及 $\omega'_\#(\alpha) = \omega'^{-1}\alpha\omega'$. $\omega_\# = \omega'_\#$ 当且仅当对于任意 α , 都有 $\omega^{-1}\alpha\omega = \omega'^{-1}\alpha\omega'$. 等式两边左乘 ω , 右乘 ω'^{-1} , 得 $\alpha\omega\omega'^{-1} = \omega\omega'^{-1}\alpha$. 这说明 $\omega\omega'^{-1}$ 与 $\pi_1(X, x_0)$ 中的任意元素可交换, 即 $\omega\omega'^{-1} \in Z(\pi_1(X, x_0))$. 引理证毕.

现在利用引理证明原命题:

($\Leftarrow$) 设 $\pi_1(X, x_0)$ 是交换群. 则其中心 $Z(\pi_1(X, x_0))$ 就是群本身. 对于从 x_0 到 x_1 的任意两个道路类 ω, ω' , 复合道路 $\omega\omega'^{-1}$ 是 x_0 处的闭路, 故 $\omega\omega'^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$. 由于群是交换的, 必有 $\omega\omega'^{-1} \in Z(\pi_1(X, x_0))$. 由引理可知 $\omega_\# = \omega'_\#$, 即任意道路类决定相同的同构.

($\Rightarrow$) 设从 x_0 到 x_1 的任意道路类决定相同的同构. 固定一个从 x_0 到 x_1 的道路类 ω . 对于 $\pi_1(X, x_0)$ 中的任意元素 β , 我们构造一个新的道路类 $\omega' = \beta^{-1}\omega$. 显然 ω' 也是从 x_0 到 x_1 的道路类. 根据假设, $\omega_\# = \omega'_\#$. 由引理可知, $\omega\omega'^{-1} \in Z(\pi_1(X, x_0))$. 代入 ω' 的定义:

$$\omega\omega'^{-1} = \omega(\beta^{-1}\omega)^{-1} = \omega\omega^{-1}\beta = \beta$$

因此 $\beta \in Z(\pi_1(X, x_0))$. 由于 β 是 $\pi_1(X, x_0)$ 中的任意元素, 这说明群中的每一个元素都属于中心, 即 $\pi_1(X, x_0)$ 是交换群.



4.3 S^n 的基本群

4.3.1 S^1 基本群的初等计算

Remark 4.3.1

S^1 的基本群计算是复叠空间的一个基本应用, 这里介绍初等计算方法, 直观上来讲, 不难想象其应当与“道路绕 S^1 的圈数 (运动员跑圈)”, 因此要用到“提升”的概念来严谨的记录运动员究竟跑了多少圈.

Definition 4.3.2 ▶ 映射 p 与提升

规定连续映射 $p: E^1 \rightarrow S^1$ 为 $p(t) = e^{i2\pi t}$. p 在局部上是同胚的: 记 $J_t = (t, t+1)$, 则 $p|_{J_t}: J_t \rightarrow S^1$ 是嵌入映射. 记 $p_t = p|_{J_t}: J_t \rightarrow S^1 \setminus \{e^{i2\pi t}\}$, p_t 是同胚映射. 并且

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{e^{i2\pi t}\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_{t+n}.$$

设 X 是一个拓扑空间, $f: X \rightarrow S^1$ 连续. X 到 E^1 的连续映射 $\tilde{f}: X \rightarrow E^1$ 如果满足 $p \circ \tilde{f} = f$, 即下面的映射图表可交换:

$$p \circ \tilde{f} = f$$

则称 $\tilde{f}$ 是 f 的一个**提升**. 因此直观来讲提升就是将缠在圆上的一圈圈胶带展开拉直, 从而能够量出其绕了几圈.

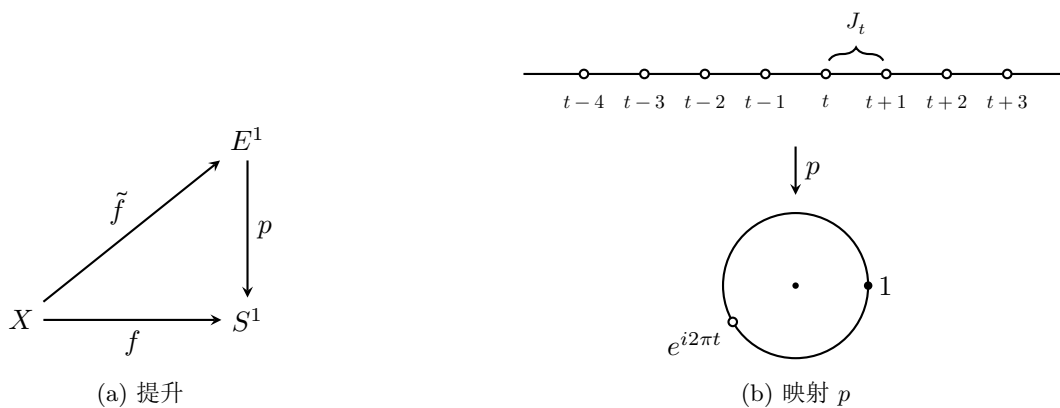


图 4.4: 示意图

Corollary 4.3.3 ▶ 道路提升性质

设 a 是 S^1 上的道路, $t_0 \in E^1$ 使得 $p(t_0) = a(0)$, 则存在 a 的唯一提升 $\tilde{a}$, 使得 $\tilde{a}(0) = t_0$.

证明. 1. **辅助结论 (局部提升的存在性)**: 首先证明, 若连续映射 $f: Y \rightarrow S^1$ 不是满射, 且存在 $y_0 \in Y, t_0 \in E^1$ 使得 $p(t_0) = f(y_0)$, 则存在 f 的提升 $\tilde{f}$ 满足 $\tilde{f}(y_0) = t_0$.

由于 f 不满, 必存在 $z \in S^1 \setminus f(Y)$. 此时 $f(Y) \subseteq S^1 \setminus \{z\}$. 回顾覆盖映射 p 的性质, 原像



$p^{-1}(S^1 \setminus \{z\})$ 是 E^1 中可数个不相交开区间的并, 每个开区间在 p 下都同胚于 $S^1 \setminus \{z\}$. 由于 $p(t_0) = f(y_0) \neq z$, 存在唯一的这样一个开区间 J 使得 $t_0 \in J$. 记 $p|_J$ 为 p 限制在 J 上的映射, 则 $p|_J: J \rightarrow S^1 \setminus \{z\}$ 是同胚映射. 我们可以定义 $\tilde{f} = (p|_J)^{-1} \circ f$. 显然 $\tilde{f}$ 是连续的, 且

$$p \circ \tilde{f} = p \circ (p|_J)^{-1} \circ f = f,$$

同时 $\tilde{f}(y_0) = (p|_J)^{-1}(f(y_0)) = (p|_J)^{-1}(p(t_0)) = t_0$. 辅助结论证毕.

2. 存在性证明: 取自然数 m , 将 $I = [0, 1]$ 等分成 m 个小区间 $I_1, I_2, \dots, I_m$, 其中 $I_i = [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$. 利用勒贝格数引理或一致连续性, 可选取足够大的 m , 使得 a 在每个小区间上的像 $a(I_i)$ 都不是整个 S^1 (即 $a|_{I_i}$ 不满).

利用上述辅助结论, 我们顺次构造提升:

- 对于 I_1 : 已知 $a|_{I_1}$ 不满且 $\tilde{a}(0) = t_0$, 存在唯一提升 $\tilde{a}_1: I_1 \rightarrow E^1$ 使得 $\tilde{a}_1(0) = t_0$.
- 对于 I_2 : 以 $\tilde{a}_1(\frac{1}{m})$ 为起点, 由于 $a|_{I_2}$ 不满, 存在提升 $\tilde{a}_2: I_2 \rightarrow E^1$ 使得 $\tilde{a}_2(\frac{1}{m}) = \tilde{a}_1(\frac{1}{m})$.
- 归纳地, $\forall i = 1, \dots, m-1$, 在 I_{i+1} 上存在提升 $\tilde{a}_{i+1}$ 使得 $\tilde{a}_{i+1}(\frac{i}{m}) = \tilde{a}_i(\frac{i}{m})$.

根据粘接引理, 由各个 $\tilde{a}_i$ 并合成的映射 $\tilde{a}: I \rightarrow E^1$ 是连续的, 它是 a 的提升, 并且满足 $\tilde{a}(0) = t_0$.

3. 唯一性证明: 设 $\tilde{a}, \tilde{a}'$ 都是 a 的提升, 且 $\tilde{a}(0) = \tilde{a}'(0) = t_0$. 作函数 $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $g(t) = \tilde{a}'(t) - \tilde{a}(t)$. 由于 $p(\tilde{a}(t)) = p(\tilde{a}'(t)) = a(t)$, 即 $e^{i2\pi\tilde{a}(t)} = e^{i2\pi\tilde{a}'(t)}$, 这推导出 $e^{i2\pi(\tilde{a}'(t) - \tilde{a}(t))} = 1$. 这意味着对于任意 $t, \tilde{a}'(t) - \tilde{a}(t)$ 必须是整数. 因为 $\tilde{a}, \tilde{a}'$ 连续, 所以 g 是连续函数. I 是连通空间, 取整数值连续函数必然是常值函数. 又因为 $g(0) = \tilde{a}'(0) - \tilde{a}(0) = 0$, 所以 $g(t) \equiv 0$, 即 $\tilde{a}'(t) = \tilde{a}(t)$ 对所有 $t \in I$ 成立.

Corollary 4.3.4 ▶ 圈数与同伦

设 a, b 是 S^1 上基点为 z_0 的闭路, 则 $q(a) = q(b) \iff a \simeq b$.

证明. ($\Leftarrow$) 设 $H: a \simeq b$ 是同伦映射. 为了证明 $q(a) = q(b)$, 我们首先证明一个辅助结论: 若 a, b 满足 $\forall t \in I, a(t) \neq -b(t)$, 则 $q(a) = q(b)$.

取 a 和 b 的提升 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$, 使得 $\tilde{a}(0) = \tilde{b}(0) = 0$. 规定 $f = \tilde{a} - \tilde{b}$, 则 f 是连续函数且 $f(0) = 0$. 假设 $q(a) \neq q(b)$, 不妨设 $q(a) > q(b)$, 则 $f(1) = q(a) - q(b)$ 是正整数. 由介值定理, 存在 t_0 使得 $f(t_0) = k + 1/2$ ($k \in \mathbb{Z}$). 这意味着 $\tilde{a}(t_0) - \tilde{b}(t_0)$ 是半整数, 作用 p 后得到 $a(t_0) = -b(t_0)$, 与条件矛盾. 故断言成立.

回到充分性的证明. 记 h_t 是 H 的 t -切片. 由于 H 在紧集 $I \times I$ 上一致连续, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 道路 h_{t_1} 与 h_{t_2} 足够接近, 满足 $\forall s \in I, h_{t_1}(s) \neq -h_{t_2}(s)$.

由上述断言可知, $q(h_{t_1}) = q(h_{t_2})$. 这说明整数值函数 $t \mapsto q(h_t)$ 是局部常值的. 由于 I 连通, 它必须是常值函数. 因此 $q(a) = q(h_0) = q(h_1) = q(b)$.

($\Rightarrow$) 设 $q(a) = q(b)$. 作 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 是 a, b 的提升, 使得 $\tilde{a}(0) = \tilde{b}(0) = 0$. 由 $q(a) = \tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)$ 及 $q(b) = \tilde{b}(1) - \tilde{b}(0)$ 可知, $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$.

此时 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 是欧氏空间 $E^1 (\cong \mathbb{R})$ 中具有相同起点和终点的两条道路. 由于 $\mathbb{R}$ 是凸集, 我们可以构造线性同伦 $\tilde{H}(s, t) = (1-t)\tilde{a}(s) + t\tilde{b}(s)$, 使得 $\tilde{a} \simeq \tilde{b}$ (定端).

令 $H = p \circ \tilde{H}$. 由于 p 连续, H 即为 S^1 上连接 a 与 b 的同伦, 故 $a \simeq b$.

**Theorem 4.3.5** ▶ S^1 的基本群

$\pi_1(S^1, z_0)$ 是自由循环群 (同构于整数加群 $\mathbb{Z}$).

证明. 设 $\alpha \in \pi_1(S^1, z_0)$. 规定 $q(\alpha) = q(a)$, 其中 $a \in \alpha$ 是代表道路. (注: 由前述引理可知, 同伦的道路具有相同的圈数, 故该映射定义良好). 得到映射:

$$q : \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow \mathbb{Z}$$

1. 证明 q 是同态: 设 $\alpha = \langle a \rangle, \beta = \langle b \rangle$. 作 a, b 的提升 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$, 使得 $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(0)$ (即 b 的提升起点接在 a 的提升终点上). 此时, $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$ 是乘积道路 $a \cdot b$ 的提升. 它的起点为 $\tilde{a}(0)$, 终点为 $\tilde{b}(1)$. 于是:

$$\begin{aligned} q(\alpha\beta) &= \tilde{b}(1) - \tilde{a}(0) \\ &= \tilde{b}(1) - \tilde{b}(0) + \tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) \quad (\text{利用 } \tilde{a}(1) = \tilde{b}(0)) \\ &= q(b) + q(a) \\ &= q(\beta) + q(\alpha) \end{aligned}$$

这说明 q 保持运算, 是群同态.

2. 证明 q 是单同态: 由引理 4.3.4 可知, $q(a) = q(b) \iff a \simeq b$. 对于同态核中的元素 α , 若 $q(\alpha) = 0$, 即 $q(a) = 0 = q(e_{z_0})$, 则 $a \simeq e_{z_0}$, 即 α 是群的单位元. 因此 $\ker q = \{0\}$, q 是单同态.

3. 证明 q 是满同态: 记 $a_0 : I \rightarrow S^1$ 为标准生成元 $a_0(t) = e^{i2\pi t}$. 显然其提升可取为 $\tilde{a}_0(t) = t$, 故 $q(a_0) = 1$, 即 $q(\langle a_0 \rangle) = 1$. 由于 q 是同态, 对任何正整数 n , $q(\langle a_0 \rangle^n) = nq(\langle a_0 \rangle) = n$; 同理 $q(\langle \bar{a}_0 \rangle^n) = -n$. 因此 q 是满同态.

综上所述, q 是同构映射. 于是, $\pi_1(S^1, z_0)$ 是由 $\langle a_0 \rangle$ 生成的自由循环群.

Example 4.3.6

设映射 $f : S^1 \rightarrow S^1$ 规定为 $f(z) = -z$. 试描述同态 $f_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, -1)$.

证明. 为了描述诱导同态, 我们需要先确定定义域和值域基本群的生成元. 记 $a_0 : I \rightarrow S^1$ 为 $a_0(t) = e^{i2\pi t}$, 这是一个以 1 为基点的闭路, 其同伦类 $\langle a_0 \rangle$ 生成了 $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. 相应地, 记 $b_0 : I \rightarrow S^1$ 为 $b_0(t) = -e^{i2\pi t}$. 由于 $b_0(0) = b_0(1) = -1$, 这是一条以 -1 为基点的闭路. 由于 b_0 实际上是将 a_0 旋转了 π 角度, 它同样环绕原点一周, 因此其同伦类 $\langle b_0 \rangle$ 是 $\pi_1(S^1, -1) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元 (可建立同构映射严谨证明).

现在我们考察 f_* 对生成元的作用. 根据诱导同态的定义, $f_*(\langle a_0 \rangle) = \langle f \circ a_0 \rangle$. 计算复合路径 $f \circ a_0$: 对于任意 $t \in I$, 有

$$(f \circ a_0)(t) = f(a_0(t)) = -(e^{i2\pi t}) = -e^{i2\pi t}.$$

显然, $(f \circ a_0)(t) = b_0(t)$. 这意味着 f_* 将 $\pi_1(S^1, 1)$ 的生成元 $\langle a_0 \rangle$ 映射为了 $\pi_1(S^1, -1)$ 的生成元 $\langle b_0 \rangle$. 由于 $\pi_1(S^1, x_0) (\forall x_0 \in S^1)$ 是无限循环群, 生成元唯一确定了群的基本结构, 因此, f_* 是一个保持生成元对应的同构映射.

**Example 4.3.7**

设 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 规定为 $f(z) = z^n, n \in \mathbb{Z}$. 试描述同态 $f_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$.

证明. 同样取 $a_0(t) = e^{i2\pi t}$ 作为 $\pi_1(S^1, 1)$ 的生成元, 记 $\alpha = \langle a_0 \rangle$. 我们需要计算 $f_*(\alpha)$. 根据定义, $f_*(\alpha) = \langle f \circ a_0 \rangle$. 考察复合路径的具体表达式:

$$(f \circ a_0)(t) = f(e^{i2\pi t}) = (e^{i2\pi t})^n = e^{i2\pi nt}.$$

这条路径 $t \mapsto e^{i2\pi nt}$ 表示在单位圆上以恒定速度绕转 n 圈 (若 $n < 0$ 则为反向绕转 $|n|$ 圈). 在基本群 $\pi_1(S^1, 1)$ 中, 绕转 n 圈的回路同伦于生成元回路重复运行 n 次, 即对应于群元素 α^n . 于是我们得到 $f_*(\alpha) = \alpha^n$.

由于 $\pi_1(S^1, 1)$ 是由 α 生成的循环群, 对于群中任意元素 $\gamma = \alpha^k (k \in \mathbb{Z})$, 同态性质蕴含了

$$f_*(\gamma) = f_*(\alpha^k) = (f_*(\alpha))^k = (\alpha^n)^k = \alpha^{nk}.$$

由于 $\pi_1(S^1, 1)$ 与加法群 $\mathbb{Z}$ 同构, 上述结论可以更直观地描述为: f_* 是 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 的映射, 且 $f_*(1) = n$, 进而对于任意整数 k , 有 $f_*(k) = nk$.

Example 4.3.8

设 $f, g: (S^1, 1) \rightarrow (Y, y_0)$ 都连续, 且 $f_* = g_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, 证明 $f \simeq g \text{ rel } \{1\}$.

证明. 首先, 记 $p: I \rightarrow S^1$ 为标准映射 $p(t) = e^{i2\pi t}$. 我们知道闭路同伦类 $\langle p \rangle$ 是基本群 $\pi_1(S^1, 1)$ 的生成元 (限制 p 在 I 上).

根据诱导同态的定义, f_* 将 S^1 上的闭路类映射为 Y 上的闭路类, 具体地有 $f_*(\langle p \rangle) = \langle f \circ p \rangle$. 同理, $g_*(\langle p \rangle) = \langle g \circ p \rangle$. 由题目已知条件 $f_* = g_*$, 它们对生成元的作用必须相等, 即 $\langle f \circ p \rangle = \langle g \circ p \rangle$. 上式意味着在基本群 $\pi_1(Y, y_0)$ 中这两个元素相同, 也就是代表它们的闭路 $f \circ p$ 和 $g \circ p$ 是定端同伦的. 记作 $f \circ p \simeq g \circ p$.

然后我们引用例 4.1.21 的结论: 对于连续映射 $f, g: S^1 \rightarrow Y$, 同伦关系满足

$$f \circ p \simeq g \circ p \iff f \simeq g \text{ rel } \{1\}.$$

既然我们在前一步已经证明了等式左边的条件 $f \circ p \simeq g \circ p$ 成立, 根据该结论的充分性, 即可直接得出 $f \simeq g \text{ rel } \{1\}$.

4.3.2 S^n 单连通 ($n \geq 2$)**Proposition 4.3.9**

设 X_1, X_2 都是 X 的开集, 其中 X_2 是单连通的, 并且 $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2$ 非空, 道路连通. 则有 $i_\pi: \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 是满同态, 这里 $i: X_1 \rightarrow X$ 是包含映射, $x_0 \in X_1$.

**Corollary 4.3.10**

若 X 是它的两个单连通开集 X_1, X_2 的并集, 并且 $X_1 \cap X_2$ 非空, 道路连通, 则 X 也单连通.

证明. 证明 X 道路连通即可.

Remark 4.3.11 ▶ $S^n (n \geq 2)$ 单连通

当 $n \geq 2$ 时, 取 S^n 上两点 x_1, x_2 . 记 $X_i = S^n \setminus \{x_i\} (i = 1, 2)$, 则 $X_i \cong E^n$ 是单连通的, $X_1 \cap X_2 \cong E^n \setminus \{O\}$ 是道路连通的. 用推论, 得出 S^n 是单连通的.

4.3.3 T^2 的基本群**Theorem 4.3.12** ▶ 积空间的基本群

设 $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 则

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Remark 4.3.13 ▶ 环面的基本群

应用此定理到 T^2 上, 得到 $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

对任何正整数 n , 有

$$\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Corollary 4.3.14 ▶ 推论

$$T^2 \not\cong S^2.$$

(注: 因为 $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2, \pi_1(S^2)$ 是平凡群, 而群是拓扑不变量).

Example 4.3.15

证明平环的基本群是自由循环群. 由此说明平环与 D^2 不同胚.

证明. 首先证明平环的基本群是自由循环群. 设平环为 A . 我们知道平环同胚于圆周 S^1 与闭区间 $I = [0, 1]$ 的乘积空间, 即 $A \cong S^1 \times I$. 根据基本群的积空间定理 (定理 4.3.12), 乘积空间的基本群同构于各因子空间基本群的直积. 于是有:

$$\pi_1(A) \cong \pi_1(S^1 \times I) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(I).$$

对于圆周 S^1 , 我们已知其基本群 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (无限循环群). 对于闭区间 I , 它是凸集, 因此其基



本群是平凡群, 即 $\pi_1(I) \cong \{0\}$. 代入上述同构式, 得到:

$$\pi_1(A) \cong \mathbb{Z} \times \{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

这就证明了平环的基本群同构于整数加群, 即它是自由循环群.

而由于 D^2 是凸集, 它是单连通的, 故其基本群为平凡群, 即 $\pi_1(D^2) \cong \{0\}$. 假设平环 A 与 D^2 同胚, 则由基本群的拓扑不变性, 平环与 D^2 不同胚.

Example 4.3.16

证明若 $x \in E^2$, U 是 x 的邻域, 则 $U \setminus \{x\}$ 不单连通.

证明. 由于 U 是点 x 的邻域, 根据定义, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得以 x 为心、 ε 为半径的闭圆盘 $\overline{B(x, \varepsilon)}$ 包含于 U 中. 我们记圆盘的边界为 $A = \{y \in E^2 \mid d(x, y) = \varepsilon\}$. 显然, A 是一个圆周, 即 $A \cong S^1$. 考察集合 $X = U \setminus \{x\}$. 我们可以构造一个从 X 到 A 的收缩映射 $r: X \rightarrow A$. 具体地, 对于任意 $y \in U \setminus \{x\}$, 令 $r(y)$ 为从 x 发出经过 y 的射线与圆周 A 的交点. 这个映射显然连续, 并且对于任意 $a \in A$, 有 $r(a) = a$.

这意味着 A 是 X 的收缩核. 根据例 4.2.16 的结论, 包含映射 $i: A \rightarrow X$ 诱导的基本群同态 $i_*: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ 是单同态.

我们知道圆周的基本群 $\pi_1(A) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 是非平凡群 (含有非单位元). 由于存在单同态 $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(X)$, 这表明 $\pi_1(X)$ 中必须包含同构于 $\mathbb{Z}$ 的子群, 因此 $\pi_1(X)$ 不可能是平凡群.

根据单连通空间的基本群为平凡群, 既然 $\pi_1(U \setminus \{x\}) \neq \{0\}$, 故 $U \setminus \{x\}$ 不单连通.

4.4 基本群的同伦不变性

4.4.1 同伦映射诱导的基本群同态间的关系

Definition 4.4.1 ▶ 同态的踪

设 $H: f \simeq g$, 由 $w(t) = H(x_0, t), t \in I$, 规定了 Y 中从 y_0 到 y_1 的道路 w , 称为 H 在 x_0 处的踪. 记 $\omega = \langle w \rangle$. 由定理 4.2.17 知, 有同构 $\omega_{\#}: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$.

Theorem 4.4.2

$g_* = \omega_{\#} \circ f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$, 即图表可交换.



$$\begin{array}{ccc}
 & & \pi_1(Y, y_0) \\
 & \nearrow f_* & \downarrow \omega_{\#} \\
 \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, y_1) \\
 & \searrow g_* &
 \end{array}$$

Example 4.4.3

设 $H : X \times I \rightarrow Y$ 是 f 到 g 的同伦. 考察基点 x_0 在同伦过程中的轨迹 $\alpha(t) = H(x_0, t)$. 由于 $f(x_0) = g(x_0) = y_0$, 则 α 是 Y 中以 y_0 为基点的回路, 即 $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$. 根据自由同伦与基本群诱导同态的关系定理 (Thm 4.4.2), f_{π} 与 g_{π} 之间相差一个由 $[\alpha]$ 确定的共轭作用. 即对于任意 $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, 有

$$g_{\pi}([\gamma]) = [\alpha]^{-1} \cdot f_{\pi}([\gamma]) \cdot [\alpha].$$

由于已知 $\pi_1(Y)$ 是交换群, 群元素的乘法满足交换律, 因此上述共轭作用平凡, 即 $[\alpha]^{-1} \cdot f_{\pi}([\gamma]) \cdot [\alpha] = f_{\pi}([\gamma])$. 从而得证 $f_{\pi} = g_{\pi}$.

Example 4.4.4

设 $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ 是保持 $1 \in S^1$ 不动的连续映射. 欲证 $f \simeq g$ 当且仅当 $f_{\pi} = g_{\pi}$.

证明. 必要性用例 4.4.3, 充分性用例 4.3.8.

4.4.2 拓扑空间的同伦等价**Definition 4.4.5** ▶ 同伦等价

设 X 与 Y 为两个拓扑空间. 如果存在连续映射 $f : X \rightarrow Y$ 和 $g : Y \rightarrow X$, 使得

$$g \circ f \simeq \text{id}_X : X \rightarrow X,$$

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y : Y \rightarrow Y,$$

则说 X 与 Y 是**同伦等价的** (或有**相同的同伦型**), 记作 $X \simeq Y$. 称 f 和 g 为**同伦等价 (映射)**. 称 g 是 f 的一个**同伦逆**, 反之 f 也是 g 的同伦逆.

Remark 4.4.6 ▶ 同伦等价的性质

同伦等价是拓扑空间集合中的等价关系, 每个同胚映射 $f : X \rightarrow Y$ 都是同伦等价, 且每个同伦等价类都由若干个同胚等价类所构成.

**Remark 4.4.7 ▶ 同伦逆的不唯一性**

同胚映射的逆是唯一的, 而同伦等价 (映射) 的同伦逆却不是唯一的, 它们构成一个映射类.

证明. 首先, 我们证明 f 的任何两个同伦逆 g_1, g_2 都是相互同伦的, 即 $g_1 \simeq g_2$. 这就表明它们属于同一个映射类.

根据同伦逆的定义, 我们有以下条件: $g_1 \circ f \simeq \text{id}_X$ 且 $f \circ g_2 \simeq \text{id}_Y$.

现在, 我们可以构造如下的同伦变换链:

$$g_1 \simeq g_1 \circ \text{id}_Y \simeq g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 \simeq \text{id}_X \circ g_2 = g_2.$$

这一系列变换说明 $g_1 \simeq g_2$. 因此, f 的所有同伦逆都属于同一个同伦等价类.

其次, 我们证明若 g 是 f 的同伦逆, 且另一映射 g' 与 g 同伦 ($g' \simeq g$), 那么 g' 也是 f 的同伦逆. 要证明 g' 是 f 的同伦逆, 我们需要证明 $g' \circ f \simeq \text{id}_X$ 和 $f \circ g' \simeq \text{id}_Y$.

已知条件为: g 是 f 的同伦逆, 故 $g \circ f \simeq \text{id}_X$ 且 $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. 同时, $g' \simeq g$.

根据同伦关系与映射复合的相容性, 从 $g' \simeq g$ 出发, 将两边在右侧复合 f , 可得 $g' \circ f \simeq g \circ f$. 再结合已知条件 $g \circ f \simeq \text{id}_X$, 利用同伦关系的传递性, 我们得到 $g' \circ f \simeq \text{id}_X$.

同样地, 从 $g' \simeq g$ 出发, 将两边在左侧复合 f , 可得 $f \circ g' \simeq f \circ g$. 再结合已知条件 $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, 利用同伦关系的传递性, 我们得到 $f \circ g' \simeq \text{id}_Y$.

由于两个条件都满足, 因此 g' 也是 f 的一个同伦逆. 这说明与一个同伦逆同伦的任何映射都是其同伦逆.

Example 4.4.8

$$E^1 \simeq E^2.$$

证明. 记收缩映射 $r: E^2 \rightarrow E^1$ 为 $r(x, y) = x$, 包含映射 $i: E^1 \rightarrow E^2$ 为 $i(x) = (x, 0)$.

一方面, 复合映射 $r \circ i: E^1 \rightarrow E^1$ 满足 $(r \circ i)(x) = r(x, 0) = x$, 因此 $r \circ i = \text{id}_{E^1}$.

另一方面, 复合映射 $i \circ r: E^2 \rightarrow E^2$ 满足 $(i \circ r)(x, y) = i(x) = (x, 0)$. 它与恒同映射 id_{E^2} 是同伦的. 我们可以定义同伦 $H: E^2 \times I \rightarrow E^2$ 为 $H(x, y, t) = (x, ty)$. 当 $t = 0$ 时, $H(x, y, 0) = (x, 0) = (i \circ r)(x, y)$. 当 $t = 1$ 时, $H(x, y, 1) = (x, y) = \text{id}_{E^2}(x, y)$. 因此 $i \circ r \simeq \text{id}_{E^2}$.

Example 4.4.9

对任何拓扑空间 X , $X \times I \simeq X$.

证明. 记投射 $j: X \times I \rightarrow X$ 为 $j(x, s) = x$, 并记包含 $i_0: X \rightarrow X \times I$ 为 $i_0(x) = (x, 0)$.

首先, $j \circ i_0 = \text{id}_X$. 其次, 我们需要证明 $i_0 \circ j \simeq \text{id}_{X \times I}$. 映射 $(i_0 \circ j)(x, s) = i_0(x) = (x, 0)$. 我们需要构造一个从 $i_0 \circ j$ 到 $\text{id}_{X \times I}$ 的同伦. 我们定义同伦 $H: (X \times I) \times I \rightarrow X \times I$ 如下:

$$H((x, s), t) = (x, s \cdot t)$$



其中 $(x, s) \in X \times I$ 且 $t \in I = [0, 1]$. 这是一个连续映射, 并且满足:

$$H((x, s), 0) = (x, s \cdot 0) = (x, 0) = (i_0 \circ j)(x, s)$$

$$H((x, s), 1) = (x, s \cdot 1) = (x, s) = \text{id}_{X \times I}(x, s)$$

因此, H 确实是 $i_0 \circ j$ 到 $\text{id}_{X \times I}$ 的一个同伦, 即 $i_0 \circ j \simeq \text{id}_{X \times I}$.

Proposition 4.4.10

若 $f: X \rightarrow Y$ 是同伦等价, $x_0 \in X, y_0 = f(x_0)$, 则 $f_\pi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 是同构.

Theorem 4.4.11

若 $X \simeq Y$, 且它们道路连通, 则 $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Remark 4.4.12

上述定理可以用来计算基本群, 并且反过来可以运用基本群来判断两个拓扑空间是否同伦等价.

4.4.3 形变收缩核

Definition 4.4.13

设 A 是 X 的子空间, $i: A \rightarrow X$ 是包含映射. 如果存在收缩映射 $r: X \rightarrow A$ (即 $r \circ i = \text{id}_A$), 使得 $i \circ r \simeq \text{id}_X$, 就称 A 是 X 的一个形变收缩核.

Definition 4.4.14

设 A 是 X 的子空间. 若一个连续映射 $H: X \times I \rightarrow X$ 满足下列三个条件:

$$H(x, 0) = x, \quad \forall x \in X, \quad (1)$$

$$H(x, 1) \in A, \quad \forall x \in X, \quad (2)$$

$$H(a, 1) = a, \quad \forall a \in A. \quad (3)$$

则称 H 是 X 到 A 的一个形变收缩.

Remark 4.4.15

于是, 当 A 是 X 的形变收缩核时, 就存在从 X 到 A 的形变收缩. 反之, 当 H 是从 X 到 A 的形变收缩时, 可规定收缩映射 $r: X \rightarrow A$, 使 $(i \circ r)(x) = H(x, 1)$, 则 $H: \text{id}_X \simeq i \circ r$, 从而 A 是 X 的形变收缩核.



Example 4.4.16

把乘积空间 $X \times I$ 的子集 $X_s = X \times \{s\}$ 称为它的 s -切片. 则每个 s -切片都是 $X \times I$ 的形变收缩核.

证明. 取定 s_0 , 则 $X \times I$ 到 X_{s_0} 的一个形变收缩可规定为

$$H(x, s, t) = (x, (1-t)s + ts_0).$$

Example 4.4.17

S^{n-1} 是 $E^n \setminus \{0\}$ 的形变收缩核.

证明. 形变收缩 H 可规定为

$$H(x, t) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}.$$

相应的收缩映射是由 $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ 所规定的映射 (图 4.5).

如果 $X \subset E^n$, A 是 X 的子集, 且有收缩映射 $r: X \rightarrow A$, 使得 $\overline{xr(x)} \subset X, \forall x \in X$, 则 $i \circ r$ 与 id_X 间可建立直线同伦, 因而 A 是 X 的形变收缩核. 特别地, 当 X 是凸集时, 它的每个收缩核都是形变收缩核.

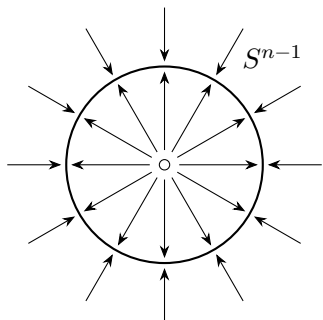


图 4.5: $E^n \setminus \{0\}$ 到 S^{n-1} 的径向收缩

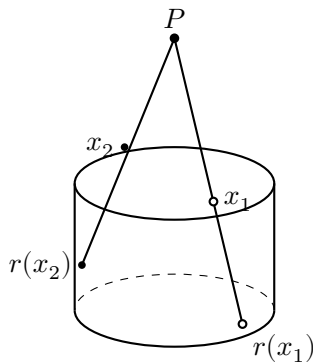


图 4.6: $D^n \times I$ 的中心投影收缩

Example 4.4.18

$D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ 是 $D^n \times I$ 的形变收缩核.

证明. 若 $D^n \times I$ 看作 E^{n+1} 的子集

$$D^n \times I = \left\{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1, x_{n+1} \in I \right\},$$

则它是一个凸集. 为了说明结论只须作一个收缩映射.

以点 $P(0, \dots, 0, 2)$ 为中心作中心投射 r , 将 $D^n \times I$ 上各点映射到 $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ 上. 即对



$\forall x \in D^n \times I$, $r(x)$ 是连结 P 与 x 的直线与 $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ 的交点, 则 r 是收缩映射 (图 4.6).

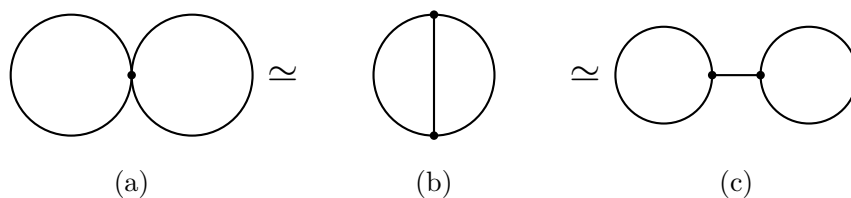


图 4.7: 三个互相同伦等价的图形

Example 4.4.19

图 4.7 中的三个图形 (a), (b) 和 (c) 互相同伦等价, 因为它们都是挖去了两点的平面的形变收缩核. 图 4.8 是 $E^2 \setminus \{O_1, O_2\}$ 到图 4.7(a) 图形的一个收缩映射 r 的图示 (两个圆内的点分别用从圆心作的中心投射映射到圆周上, 左 (右) 侧部分映射到 x_1 (x_2), 两圆的上 (下) 方部分作垂直向下 (上) 投影). $\forall x \in E^2 \setminus \{O_1, O_2\}$, $\overline{xr(x)} \subset E^2 \setminus \{O_1, O_2\}$, 因此图 4.7 中 (a) 图形是 $E^2 \setminus \{O_1, O_2\}$ 的形变收缩核.

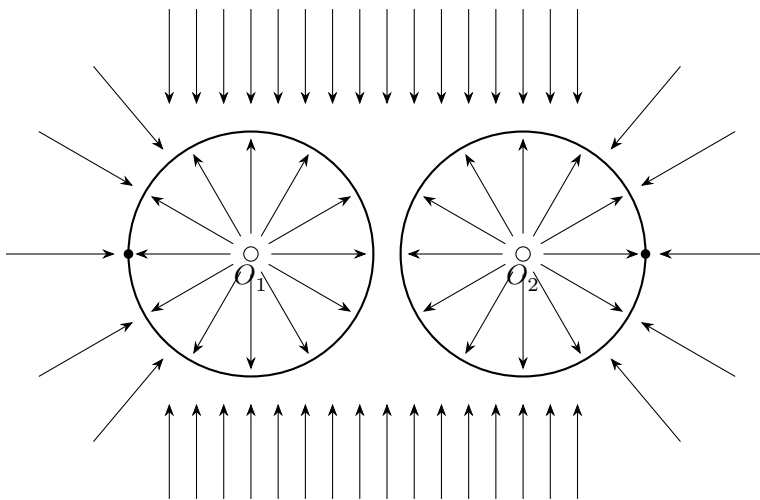


图 4.8: $E^2 \setminus \{O_1, O_2\}$ 到“8”字图形的收缩映射 r

Definition 4.4.20 ▶ 强形变收缩

若将收缩定义中的条件 (3) 改为

$$H(a, t) = a, \quad \forall a \in A, t \in I,$$

则称 H 是一个强形变收缩, 称 A 是 X 的强形变收缩核.

**Example 4.4.21** ▶ 形变收缩核而非强形变收缩核举例

设 X 是 E^2 的窠形子集, $A \subset X$ 是 Y 轴. 规定 X 到 A 的形变收缩 H 为

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, (1 - 3t)y), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ ((2 - 3t)x, 0), & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ (0, (3t - 2)y), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

因此 A 是 X 的形变收缩核. 但是不存在 X 到 A 的强形变收缩.

证明. 假设存在强形变收缩 $H: X \times I \rightarrow X$. 取 Y 轴上的点 $p = (0, 1) \in A$, 根据强形变收缩的定义, 对任意 $t \in I$, 均有 $H(0, 1, t) = (0, 1)$.

现考虑窠齿上的点序列 $p_n = (1/n, 1) \in X$. 显然当 $n \rightarrow \infty$ 时, $p_n \rightarrow p$. 对于每一个 p_n , 映射 $t \mapsto H(p_n, t)$ 是从 $(1/n, 1)$ 到 A 的一条路径. 由于 X 的拓扑结构, 任何从齿顶 $(1/n, 1)$ 到达 Y 轴 A 的路径都必须经过底座 $y = 0$. 因此, 对于每个 n , 必然存在某个时刻 $t_n \in (0, 1)$, 使得 $H(1/n, 1, t_n)$ 的纵坐标为 0, 而此时 $H(0, 1, t_n) = (0, 1)$, 由 H 的一致连续性即得矛盾 (取定义域为 $I \times I$).

Proposition 4.4.22

设 $f: X \rightarrow Y$ 是商映射, $A \subset X, B = f(A)$. 如果 H 是 X 到 A 的 (强) 形变收缩, 并且满足条件: 当 $x \stackrel{f}{\sim} x'$ 时, $\forall t \in I, H(x, t) \stackrel{f}{\sim} H(x', t)$. 则存在 Y 到 B 的 (强) 形变收缩.

Example 4.4.23

拓扑锥 CX 以锥顶为强形变收缩核.

证明. $CX = X \times I / X \times \{1\}$, 记 $f: X \times I \rightarrow CX$ 是粘合映射. 作 $X \times I$ 到 $X \times \{1\}$ 的强形变收缩 $H: (X \times I) \times I \rightarrow X \times I$ 为

$$H(x, t, s) = (x, (1 - s)t + s),$$

则 H 满足命题 4.4.20 的条件, 从而 H 导出 CX 到锥顶 $f(X \times \{1\})$ 的强形变收缩.

Example 4.4.24

Möbius 带以腰圆为强形变收缩核.

证明. 记 X 是 Möbius 带, 它是矩形 M 粘合两侧边所得商空间. 记 $f: M \rightarrow X$ 是商映射. 设 A 是连结 M 的两侧边中点的线段, 则 $f(A)$ 是 X 的腰圆.

记 $r: M \rightarrow A$ 是沿竖直方向把 M 压向 A (图 4.9). 则从 id_M 到 $i \circ r$ 的直线同伦是 X 到 A 的一个强形变收缩, 并且满足命题 4.4.20 的条件, 从而导出 X 到腰圆的强形变收缩.

记 x_0 是腰圆上一点, a 是以 x_0 为基点, 并沿腰圆走一圈的闭路, 则 $\pi_1(X, x_0)$ 是由 $\langle a \rangle$ 生成的自由循环群.

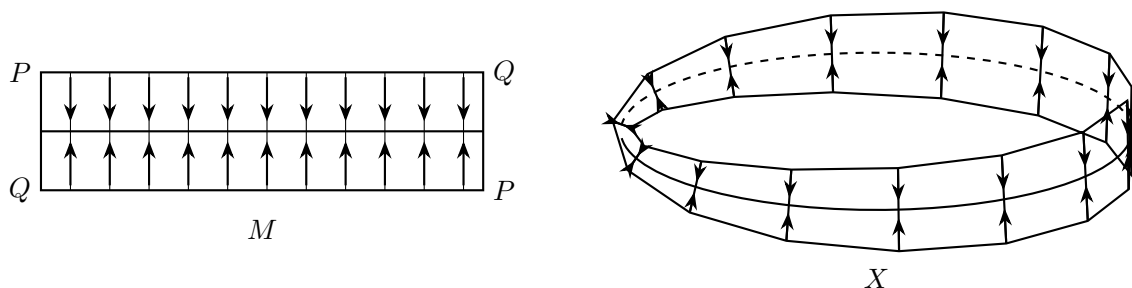


图 4.9: Möbius 带的形变收缩

Example 4.4.25

设 X 是 Möbius 带, A 是它的边界, $x_0 \in A$. 证明包含映射 $i: A \rightarrow X$ 诱导的同态 $i_\pi: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 不是同构.

证明: 我们采用矩形粘合模型来直观描述这一过程. 将矩形 $I \times I$ 的左右两边按方向相反的方式粘合 (即 $(0, y) \sim (1, 1 - y)$), 便得到了莫比乌斯带 X . 此时, 矩形的上边和下边首尾相接, 构成了莫比乌斯带的边界 A . 由于 A 是一个圆周, 其基本群 $\pi_1(A, x_0)$ 同构于整数群 $\mathbb{Z}$, 设其生成元为 β , 它代表了沿边界绕行一周的回路.

同时, 莫比乌斯带 X 可以形变收缩到其中线 (或矩形中的对角线) 上, 该中线是一个圆周, 因此 $\pi_1(X, x_0)$ 也同构于整数群 $\mathbb{Z}$. 设中线对应的回路为生成元 α .

现在考察边界回路 β 在 X 内部同伦性质. 如图 4.10 所示, 在 X 中, 我们可以将矩形的上边向下连续形变移动到中线位置, 同时将下边向上连续形变移动到中线位置. 由于边界回路 β 在几何上是由“上边”和“下边”两部分拼接而成的, 这种形变表明 β 在同伦意义下等价于先沿中线走一圈, 再沿中线走一圈. 即在群 $\pi_1(X, x_0)$ 中, 有关系式 $i_\pi(\beta) = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$ (加法记号下为 2α).

这说明诱导同态 $i_\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 的作用是将生成元 1 映射为 2 (即 $n \mapsto 2n$). 虽然这是一个单射, 但其像集为偶数子群 $2\mathbb{Z}$, 显然不包含生成元 α (对应整数 1), 因此该映射不是满射. 既然不是满射, 它自然就不是同构.

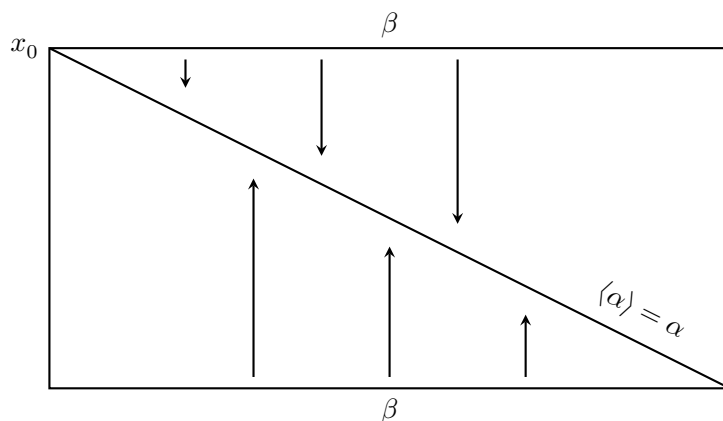


图 4.10: Möbius 带矩形粘合模型及包含映射诱导同态的同伦示意图



Example 4.4.26 ▶ 题目 11

证明 Möbius 带的边界不是它的收缩核.

证明. 设 X 为莫比乌斯带, A 为其边界. 我们采用反证法, 假设 A 是 X 的收缩核.

根据收缩核的定义, 这意味着存在一个连续映射 $r: X \rightarrow A$ (称为收缩映射), 使得当限制在 A 上时, r 是恒等映射. 记 $i: A \hookrightarrow X$ 为包含映射, 则上述条件可以写为 $r \circ i = \text{id}_A$.

上述映射对应的诱导同态满足 $r_* \circ i_* = (\text{id}_A)_* = \text{id}_{\pi_1(A, x_0)}$. 这是一个关于基本群的恒等算子. 由于复合映射的诱导同态等于诱导同态的复合, 这要求 $r_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ 必须是一个满同态 (实际上该问题在之前的例题中证过).

已知莫比乌斯带 X 和其边界 A 的基本群都同构于整数加法群 $\mathbb{Z}$. 在代数上, 从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的任何满同态都必然是一个同构映射 (因为它必须将生成元映射为生成元或其逆). 因此, 如果收缩映射 r 存在, 那么诱导同态 r_* 必须是同构.

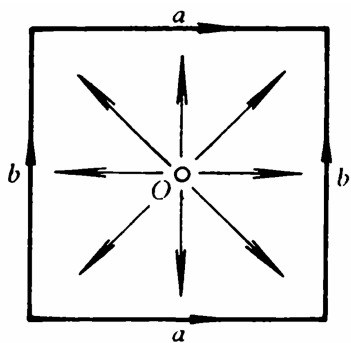
结合恒等式 $r_* \circ i_* = \text{id}$, 如果 r_* 是同构, 那么其逆映射 r_*^{-1} 必然等于 i_* . 这意味着包含映射诱导的同态 $i_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 也必须是一个同构.

然而, 在例 4.4.25 中我们已经证明, 对于莫比乌斯带而言, 包含映射诱导的同态 i_* 实际上是将生成元映射为另一生成元的两倍 (即 $n \mapsto 2n$). 这个映射显然不是同构. 这与上述推导出的“ i_* 必须是同构”产生了矛盾.

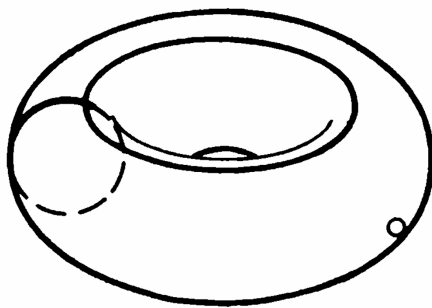
Example 4.4.27

环面 T^2 去掉一点后, 以一个经圆和一个纬圆的并集为强形变收缩核 (图 4.14).

证明. 设 M 为一矩形, O 为 M 的一个内点, 则 $M \setminus \{O\}$ 粘接 a 和 b 后得到 T^2 挖去一点. M 的边界 Γ 是 $M \setminus \{O\}$ 的强形变收缩核, 任一强形变收缩导出 T^2 去掉一点到 Γ 粘合而得的经圆和纬圆的强形变收缩.



(a) M



(b) T^2

图 4.11: 环面去掉一点的形变收缩

**Remark 4.4.28 ▶ 结论补充**

用同样方法可以说明, 任何闭曲面去掉一点后, 可强形变收缩为曲面上的一个圆束 (即两两相交于同一点的一组圆周的并集) $\bigvee_{i=1}^k S_i^1$, 其中

$$k = \begin{cases} 2n, & \text{若闭曲面是 } nT^2 \text{ 型,} \\ m, & \text{若闭曲面是 } mP^2 \text{ 型.} \end{cases}$$

Example 4.4.29

证明形变收缩核具有传递性: 若 B 是 A 的形变收缩核, A 是 X 的形变收缩核, 则 B 也是 X 的形变收缩核.

证明. 首先因为 A 是 X 的形变收缩核, 存在收缩映射 $r_1 : X \rightarrow A$ 和包含映射 $i_1 : A \hookrightarrow X$, 满足 $i_1 \circ r_1 \simeq \text{id}_X$. 同理, 因为 B 是 A 的形变收缩核, 存在收缩映射 $r_2 : A \rightarrow B$ 和包含映射 $i_2 : B \hookrightarrow A$, 满足 $i_2 \circ r_2 \simeq \text{id}_A$.

为了证明 B 是 X 的形变收缩核, 我们需要构造从 X 到 B 的收缩映射以及相应的同伦. 自然地, 我们定义复合映射 $R = r_2 \circ r_1 : X \rightarrow B$ 以及复合包含映射 $I = i_1 \circ i_2 : B \hookrightarrow X$. 显然 R 是连续的, 且对于 $b \in B$, 由于 $b \in A$, 有 $r_1(b) = b$ 且 $r_2(b) = b$, 故 $R(b) = b$, 这就证明了 R 确实是 X 到 B 的收缩映射.

接下来验证同伦条件 $I \circ R \simeq \text{id}_X$. 考察复合映射 $I \circ R = i_1 \circ i_2 \circ r_2 \circ r_1$. 利用同伦关系的复合性质, 我们可以先处理中间的部分: 因为 $i_2 \circ r_2 \simeq \text{id}_A$, 所以 $i_1 \circ (i_2 \circ r_2) \circ r_1 \simeq i_1 \circ \text{id}_A \circ r_1 = i_1 \circ r_1$. 再利用已知条件 $i_1 \circ r_1 \simeq \text{id}_X$, 根据同伦的传递性, 直接得到 $I \circ R \simeq \text{id}_X$. 证毕.

Example 4.4.30

已知 $B \subset A \subset X$, A 是 X 的收缩核 (注意这里只要求是收缩核, 不要求形变), 而 B 是 X 的形变收缩核. 证明 B 也是 A 的形变收缩核.

证明. 我们要寻找一个从 A 到 B 的收缩映射. 因为 B 是 X 的形变收缩核, 存在收缩映射 $r : X \rightarrow B$ 满足 $i \circ r \simeq \text{id}_X$ (其中 $i : B \hookrightarrow X$). 我们将 r 限制在 A 上, 定义 $\rho = r|_A : A \rightarrow B$. 由于 $B \subset A$, 且 r 在 B 上是恒等映射, 所以限制后的 ρ 在 B 上依然是恒等映射, 这说明 ρ 是 A 到 B 的收缩映射.

现在的关键是构造一个在 A 内部的同伦, 将 id_A 变形为 ρ . 设 $H : X \times I \rightarrow X$ 是 X 上连接 id_X 和 $i \circ r$ 的同伦. 如果我们直接把 H 限制在 $A \times I$ 上, 其像可能会跑出 A 之外, 因此不能直接作为 A 上的同伦.

这时利用“ A 是 X 的收缩核”这一条件. 存在收缩映射 $r' : X \rightarrow A$ 使得 $r'|_A = \text{id}_A$. 我们可以利用 r' 将跑出 A 的点“拉回”到 A 中. 定义新的映射 $K : A \times I \rightarrow A$ 为 $K(a, t) = r'(H(a, t))$. 这是一个良定义的从 $A \times I$ 到 A 的连续映射.

最后验证 K 是否满足同伦的要求. 当 $t = 0$ 时, $K(a, 0) = r'(H(a, 0)) = r'(a) = a$ (因为 $H(\cdot, 0) = \text{id}_X$ 且 r' 在 A 上是恒等的); 当 $t = 1$ 时, $K(a, 1) = r'(H(a, 1)) = r'(r(a))$. 注意 $r(a)$ 的像落在 B 中, 而 $B \subset A$, 所以 $r(a) \in A$. 对于 A 中的点, r' 作用后不变, 故 $r'(r(a)) = r(a) = \rho(a)$. 因



此, K 就是所需的从 id_A 到 ρ 的同伦. 证毕.

Example 4.4.31

若 X_1, X_2 是 X 的两个闭子集, $X_1 \cup X_2 = X$, 又 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 非空, 且是 X 的形变收缩核. 则 X_0 也是 X_1 和 X_2 的形变收缩核.

由于对称性, 我们只需证明 X_0 是 X_1 的形变收缩核即可, 对于 X_2 的情况同理. 已知 X_0 是 X 的形变收缩核, 因此存在一个从 X 到 X_0 的收缩映射 $r: X \rightarrow X_0$. 在此基础上, 我们尝试构造一个从 X 到 X_1 的映射 r_1 . 规定当 $x \in X_1$ 时 $r_1(x) = x$, 当 $x \in X_2$ 时 $r_1(x) = r(x)$.

首先需要验证 r_1 是一个良定义的连续映射. 对于处在交集 $X_1 \cap X_2 = X_0$ 中的点 x , 第一种规定给出 $r_1(x) = x$; 而第二种规定给出 $r_1(x) = r(x)$, 由于 r 是到 X_0 的收缩映射且 $x \in X_0$, 必然有 $r(x) = x$. 因此该映射在交集上定义一致. 又因为题目已知 X_1 和 X_2 都是 X 的闭子集, 且它们覆盖了 X , 根据拓扑学中的粘合引理, 分段定义在闭集上的连续映射拼合后在整个空间 X 上也是连续的. 此外, 对于任意 $x \in X_1$, 都有 $r_1(x) = x$, 这就证明了 r_1 是 X 到 X_1 的收缩映射, 即 X_1 是 X 的收缩核.

接下来, 我们直接利用例 4.4.28 的结论. 回顾例 4.4.28: 若 $B \subset A \subset X$, A 是 X 的收缩核, 且 B 是 X 的形变收缩核, 则 B 是 A 的形变收缩核. 将我们的子集代入该定理: 令 B 为 X_0 , A 为 X_1 . 显然有 $X_0 \subset X_1 \subset X$; 我们在上一段已经证明了 X_1 是 X 的收缩核; 同时题目已知 X_0 是 X 的形变收缩核. 这完美满足所有条件. 因此, 我们直接得出结论: X_0 是 X_1 的形变收缩核. 同理可证 X_0 也是 X_2 的形变收缩核. 证毕.

Example 4.4.32

证明下列各空间互相同伦等价: (a) 球面 S^2 加一条直径; (b) 在环面的一个纬圆上粘接一个圆盘; (c) 球面 S^2 加一圆周 S^1 (它们相切).

证明. 我们的基本思路是: 首先确定一个标准空间 $X = E^3 \setminus S^1$ (即三维空间去掉一个标准圆周), 然后分别证明 (a)、(b)、(c) 三个空间都是 X 的形变收缩核.

1. 空间 (a): 这实际上是图 4.7b 对应收缩过程的三维形式, 在 X 中将每一个切面变换到 4.7b 的过程进行一周旋转便可以得到 X 到空间 (a) 的形变收缩过程.

3. 空间 (b): 这是对应图 4.7c 的三维形式, 同样思路可得空间 (b) 也是 X 的形变收缩核.

2. 空间 (c): 我们可以利用直接收缩的方法, 或者一点紧致化来解释, 具体来说如图 4.13 所示 (一点紧致化的过程请读者自己思考).

结论: 由于空间 (a)、(b) 和 (c) 都可以通过连续的形变收缩从同一个母空间 $X = E^3 \setminus S^1$ 得到, 所以 (a)、(b)、(c) 这三个空间互相同伦等价.

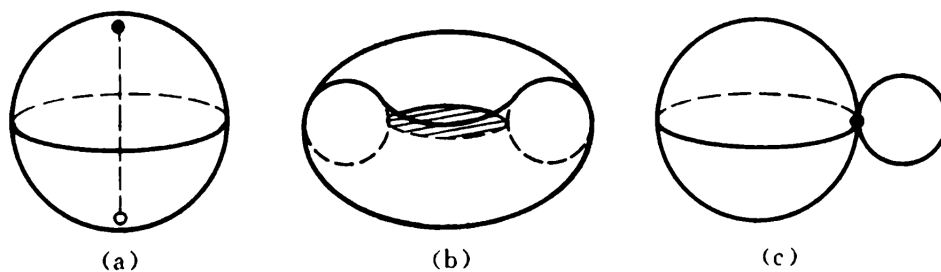


图 4.12: 三个空间

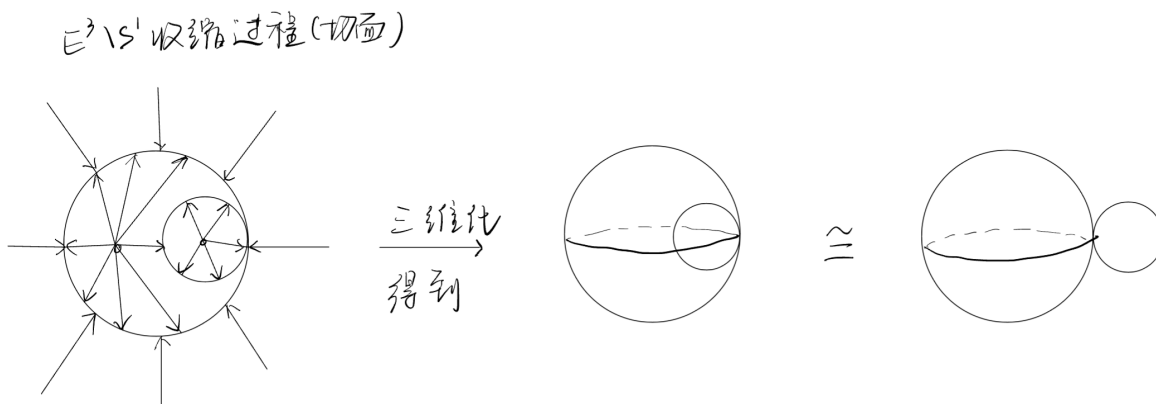


图 4.13: c 空间收缩过程

Example 4.4.33

证明 $E^2 \not\cong E^n, \forall n > 2$.

证明. 采用反证法. 若 $E^2 \cong E^n$, 则去掉对应的一点 O 后, 余下的空间仍同胚, 即 $E^2 \setminus \{O\} \cong E^n \setminus \{O\}$.

由于 $E^2 \setminus \{O\}$ 形变收缩到圆周 S^1 , 其基本群 $\pi_1(E^2 \setminus \{O\}) \cong \mathbb{Z} \neq 0$.

而当 $n > 2$ 时, $E^n \setminus \{O\}$ 形变收缩到球面 S^{n-1} . 由于 $n-1 \geq 2$, 球面 S^{n-1} 是单连通的, 即其基本群 $\pi_1(E^n \setminus \{O\}) \cong 0$.

同胚空间的基本群必须同构, 此处产生矛盾, 故 $E^2 \not\cong E^n$.

Example 4.4.34

证明 $D^2 \not\cong D^n, \forall n > 2$.

证明. 采用反证法. 若 $D^2 \cong D^n$, 则它们内部去掉一点后的空间也同胚, 即 $D^2 \setminus \{O\} \cong D^n \setminus \{O\}$. 已知 $D^2 \setminus \{O\}$ 同伦等价于 S^1 , 因此其基本群为非平凡的无限循环群 $\mathbb{Z}$.



而对于 $n > 2, D^n \setminus \{O\}$ 同伦等价于 S^{n-1} . 由于 $n - 1 > 1$, 该空间是单连通的, 基本群为 0. 基本群不同说明空间不同胚, 产生矛盾, 故命题得证.

Example 4.4.35

设 l 是 E^3 中一条直线. 证明 $\pi_1(E^3 \setminus l)$ 是自由循环群.

证明. 不妨设 l 为 E^3 中的 z 轴.

此时, $E^3 \setminus l$ 可以看作是 $(E^2 \setminus \{O\}) \times E^1$. 由于 E^1 是可收缩的, 该空间形变收缩到 $E^2 \setminus \{O\}$, 进而形变收缩到圆周 S^1 .

因此, $\pi_1(E^3 \setminus l) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

4.4.4 可缩空间

Definition 4.4.36

与单点空间同伦等价的拓扑空间称为可缩空间.

Definition 4.4.37 ▶ 定义 4.10

与单点空间同伦等价的拓扑空间称为可缩空间.

Remark 4.4.38 ▶ 可缩空间单连通

设 X 与 Y 同伦等价, 且 Y 是道路连通的, 我们来证明 X 也是道路连通的.

证明. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是同伦等价映射, $g: Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆. 这意味着复合映射 $g \circ f$ 与恒等映射 id_X 同伦, 即存在同伦 $H: X \times I \rightarrow X$ 满足 $H(x, 0) = x$ 且 $H(x, 1) = g(f(x))$.

任取 X 中任意两点 x_1, x_2 . 首先, 利用同伦 H , 我们可以构造出连接点与其像的路径. 对于 x_1 , 定义路径 $\alpha_1(t) = H(x_1, t)$, 它连接了 x_1 和 $g(f(x_1))$; 同理, 对于 x_2 , 存在路径 $\alpha_2(t) = H(x_2, t)$ 连接 x_2 和 $g(f(x_2))$. 这说明 X 中的任意点 x 都与 $g(f(x))$ 位于同一个道路连通分支中.

其次, 考察这两点在 Y 中的像 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$. 由于 Y 是道路连通的, 存在一条路径 $\gamma: I \rightarrow Y$ 连接这两个像点. 将这条路径通过连续映射 g 拉回 X , 得到路径 $g \circ \gamma$, 它连接了 $g(f(x_1))$ 和 $g(f(x_2))$.

最后, 我们将上述三段路径首尾相接: 先沿着 α_1 从 x_1 走到 $g(f(x_1))$, 再沿着 $g \circ \gamma$ 走到 $g(f(x_2))$, 最后沿着 α_2 的逆路径走到 x_2 . 这样我们就构造出了一条连接 x_1 和 x_2 的连续路径, 故 X 道路连通.

Example 4.4.39 ▶ Bing's House with Two Rooms

图 4.14a 中的空间 X 是这样构造的: 一个带上下底面的圆筒用一截面隔成上下两室, 每一室再在另一室中开一出口 (用与筒壁相切的小圆柱面做成).

该空间 X 虽然构造复杂, 但本质上是可缩的. 其核心理由在于, X 是实心圆柱体的一个强形变收缩核.



直观上, 我们可以将实心圆柱体想象成一块柔软的橡皮泥. 例中的两个“室”并非贯穿圆柱体的孔洞, 而仅仅是向内凹陷的“盲袋”. 这两个口袋状的空间虽然看似复杂, 但并没有改变实心圆柱体原本的拓扑性质. 我们可以通过连续的形变, 将实心圆柱体内部的所有点“推”向表面和隔板, 最终将整个实体压扁收缩到 X 上, 至于为什么可以压缩, 可参见 4.14b, 这可用命题 4.4.20 及例 4.4.23 进行解释, 而上室同理.

由于实心圆柱体是一个凸集, 显然是可缩空间, 根据同伦等价的传递性, X 也是可缩的.

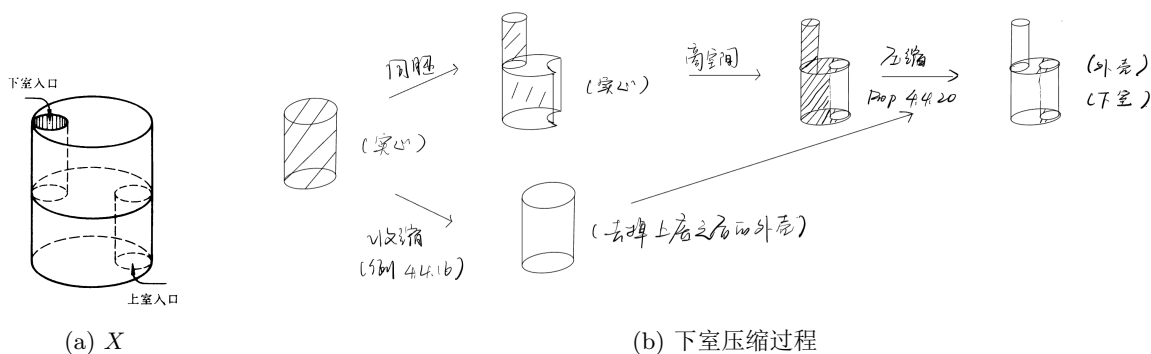


图 4.14: Bing's House

Example 4.4.40

把三角形的三边如图 4.15a 中所示粘合, 得到所谓“蜷帽”, 记作 Q . 难以想象 Q 的可缩性. 但它也确实可缩的. 下面给出此断言的论证概要.

Q 可看成一个圆锥体的侧面粘合底边与一条母线而得商空间 (图 4.15b). 作圆锥体的商空间 S , 它是把圆锥体的底边与一条母线粘合, 而得到的 (图 4.15b).

因为圆锥体的侧面是圆锥体的强形变收缩核, 所以 Q 是 S 的强形变收缩核. 而 S 可强形变收缩为图 4.15d 中的图形, 而后者是一圆盘. 这样 S 可缩. 从而 Q 也可缩.

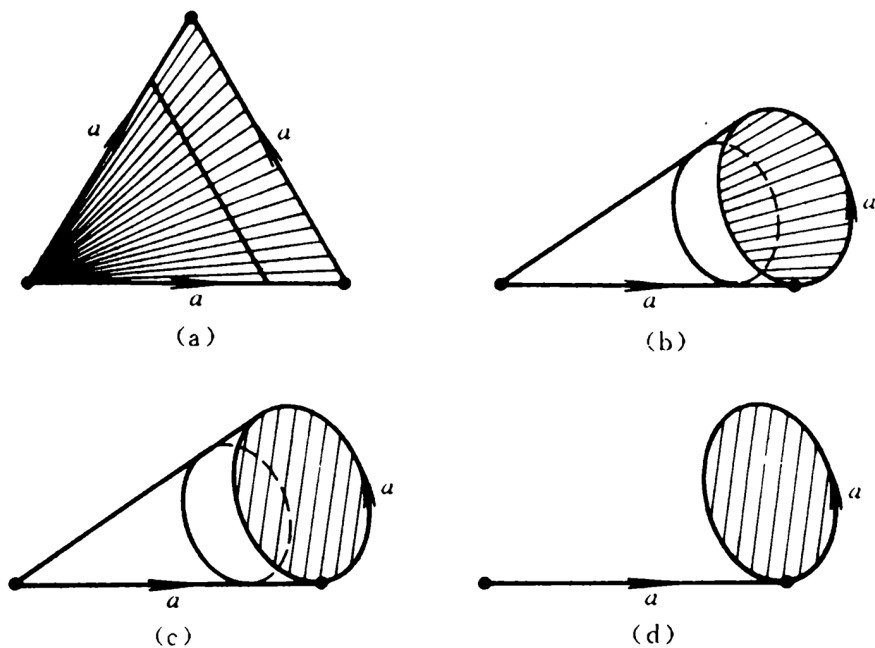


图 4.15: 蜷帽

4.5 基本群的计算与应用

4.5.1 Van-Kampen 定理

Remark 4.5.1 ▶ 前置知识

k 个自由循环群的自由乘积称作秩为 k 的有限生成自由群.

在每个自由循环群中取定生成元, 得元素组 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 则该有限生成自由群的每个元素都可唯一地用这组元素表出, 因此把它称为由 $\{a_1, \dots, a_k\}$ 自由生成的自由群, 并记作 $F(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

易证 $F(a_1, \dots, a_k) * F(b_1, \dots, b_l) = F(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$.

设 A 是群 G 的子集, 把 G 中包含 A 的最小的子群称为由 A 生成的子群, 记作 $\langle A \rangle$; 把 G 中包含 A 的最小正规子群称为由 A 生成的正规子群, 记作 $[A]$.

Theorem 4.5.2 ▶ Van-Kampen 定理

如果拓扑空间 X 可分解为两个开集 X_1 与 X_2 之并, 并且 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 非空, 道路连通. 则 $\forall x_0 \in X_0$, 有

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \{[(i_1)_\pi(\alpha)(i_2)_\pi(\alpha^{-1}) \mid \alpha \in \pi_1(X_0, x_0)]\},$$

其中 $i_l: X_0 \rightarrow X_l$ ($l = 1, 2$) 是包含映射.

**Theorem 4.5.3 ▶ 定理其它形式**

如果定理 4.5.2 中 X_1, X_2 都改为闭集, 并且 X_0 是它的一个开邻域的强形变收缩核, 其他条件不变, 则结论仍成立.

在下列两种特殊的情形下, Van-Kampen 定理的结论可以进一步简化:

(1) 若 X_0 是单连通的, 这时结论简化为:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$$

(2) 若 X_2 是单连通的, 则:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) / [\text{Im}(i_1)_\pi]$$

特别当 $\pi_1(X_0, x_0)$ 有生成元组 A 时, $[\text{Im}(i_1)_\pi] = [(i_1)_\pi(A)]$.

Example 4.5.4

求圆束 $\bigvee_{i=1}^n S_i^1$ 的基本群.

证明. 设 $n = 2, X = S_1^1 \vee S_2^1$. 则 S_1^1 是 X 的闭子集, $S_1^1 \cap S_2^1 = \{x_0\}$ 是某个开邻域 U 的强形变收缩核. 利用 Van-Kampen 定理的特殊情形 (1)(由于交集 $\{x_0\}$ 是单连通的), 得到:

$$\pi_1(S_1^1 \vee S_2^1, x_0) \cong \pi_1(S_1^1, x_0) * \pi_1(S_2^1, x_0)$$

记 a_i 是 x_0 处沿 S_i^1 走一圈的闭路, 则:

$$\pi_1(S_1^1 \vee S_2^1, x_0) = F(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle)$$

Remark 4.5.5 ▶ n 个圆周楔和的基本群

一般地, 在 $\bigvee_{i=1}^n S_i^1$ 中, 记 a_i 是在各圆交点 x_0 处沿 S_i^1 走一圈的闭路, 则有:

$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^n S_i^1, x_0\right) = F(\langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle)$$

即其基本群是秩为 n 的有限生成自由群.

Example 4.5.6 ▶ 闭曲面基本群

以 Klein 瓶为例. 矩形 M 按图 4.16 所示方式粘接两对邻边, 得到的商空间 X 是 Klein 瓶. 设 $A \subset X$ 是由 M 的边界粘合成的子集, 它是两个圆的圆束, 记交点为 x_1 . 取 $X \setminus A$ 中的一个圆盘, 记作 X_2 . 记 $X_1 = X \setminus \mathring{X}_2$, 则对 X, X_1, X_2 可用定理的特殊情形 (2), 得到:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) / [\text{Im}(i_1)_\pi] = \pi_1(X_1, x_0) / [\langle d \rangle],$$



其中 $x_0 \in X_0 = X_1 \cap X_2$ (是一圆周), d 是 x_0 处沿 X_0 走一圈的闭路. A 是 X_1 的形变收缩核, 从而包含映射 $i: A \rightarrow X_1$ 导出同构 $i_\pi: \pi_1(A, x_1) \rightarrow \pi_1(X_1, x_1)$. 利用例 1 的结果, 推出:

$$\pi_1(X_1, x_1) = F(\langle a \rangle, \langle b \rangle),$$

$\langle a \rangle, \langle b \rangle$ 分别是图 4.16 中所示闭路 a, b 在 X_1 中的闭路类. 取 ω 是 X_1 中从 x_0 到 x_1 的道路类, 则同构 $\omega_\#$ 把 $\langle d \rangle$ 映为 $\omega^{-1} \langle d \rangle \omega = \langle a \rangle^2 \langle b \rangle^2$. 于是:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_1) / [\omega_\#(\langle d \rangle)] = F(\langle a \rangle, \langle b \rangle) / [\langle a \rangle^2 \langle b \rangle^2].$$

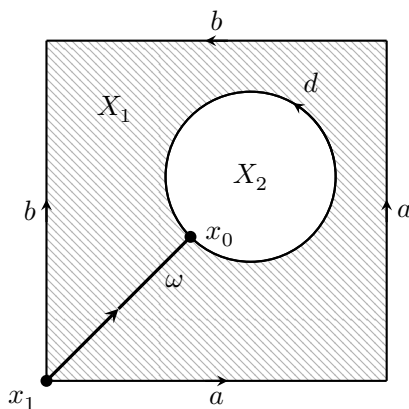


图 4.16: Klein 瓶的基本群计算

Remark 4.5.7 ▶ 一版结论

用同样办法计算任何闭曲面的基本群, 得到:

$$\pi_1(X) \cong \begin{cases} F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) / [\alpha_1^2 \dots \alpha_m^2], & X \text{ 是 } mP^2 \text{ 型,} \\ F(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n) / [\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_n \beta_n \alpha_n^{-1} \beta_n^{-1}], & X \text{ 是 } nT^2 \text{ 型.} \end{cases}$$

Example 4.5.8 ▶ 23 级数试考试题

把三角形的三条边按图 4-30 所示方式粘接在一起, 求所得商空间的基本群.

解. 根据例 4.5.6 的方法可得. 在图 4.17 中, 三角形的边界由三条相同的边 a 按同向循环排列而成. 根据定理 4.5.3(2) 得商空间的基本群为:

$$\pi_1(X) \cong \langle a \mid a^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$$

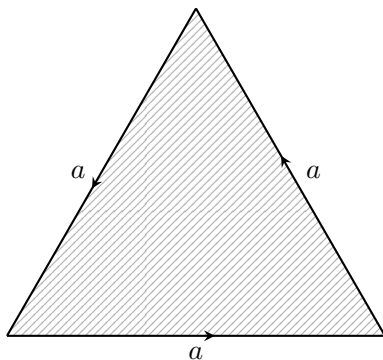


图 4.17: 图 4-30

Example 4.5.9

证明当 $n > 2$ 时, $\mathbf{E}^n$ 去掉有限个点后仍是单连通的.

证明. 设 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 是 $\mathbf{E}^n$ 中的有限个点. 记 $X_m = \mathbf{E}^n \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. 我们对点的个数 m 使用归纳法:

当 $m = 0$ 时, $X_0 = \mathbf{E}^n$ 显然是单连通的.

现假设对于 $m-1$ 个点的情况结论成立, 即 X_{m-1} 是单连通的. 对于 m 个点, 考虑点 x_m , 作其球形邻域 $B(x_m, \epsilon)$, 使得该邻域内不含其余点 $x_1, \dots, x_{m-1}$. 则我们可以将 X_{m-1} 表示为两个开集的并:

$$X_{m-1} = X_m \cup B(x_m, \epsilon)$$

此时, 两者的交集为:

$$X_m \cap B(x_m, \epsilon) = B(x_m, \epsilon) \setminus \{x_m\}$$

由于 $n > 2$, 去掉球心的球体 $B(x_m, \epsilon) \setminus \{x_m\}$ 同伦等价于 S^{n-1} . 而当 $n-1 > 1$ 时, S^{n-1} 是单连通的.

根据 **Van-Kampen 定理**, 由于交集 $B(x_m, \epsilon) \setminus \{x_m\}$ 是单连通的, 且 $B(x_m, \epsilon)$ 是可缩的 (单连通), 则并集的基本群满足:

$$\pi_1(X_{m-1}) \cong \pi_1(X_m) * \pi_1(B(x_m, \epsilon)) \cong \pi_1(X_m) * \{1\} \cong \pi_1(X_m)$$

由归纳假设 $\pi_1(X_{m-1})$ 是平凡群, 故 $\pi_1(X_m) \cong \{1\}$.

于是对任意有限整数 m , $\pi_1(X_m) \cong \pi_1(\mathbf{E}^n)$, 均为平凡群.

Example 4.5.10 ▶ 典型空间的基本群计算

求下列空间的基本群:

(1) $\mathbf{E}^2$ 中去掉 3 个点

证明. $\mathbf{E}^2$ (即复平面) 去掉 1 个点同伦等价于圆周 S^1 . 根据 Van-Kampen 定理或形变收缩的性质, $\mathbf{E}^2$ 去掉 m 个点同伦等价于 m 个圆周的楔和 $\bigvee_{i=1}^m S^1$. 因此, 去掉 3 个点后的基本群为 3 个



无限循环群的自由积:

$$\pi_1(\mathbf{E}^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

(2) S^2 中去掉 3 个点

证明. 利用立体射影投影, 球面 S^2 去掉 1 个点同胚于平面 $\mathbf{E}^2$. 因此, S^2 去掉 3 个点等价于 $\mathbf{E}^2$ 中去掉 2 个点. 由 (1) 的结论可知, 这同伦等价于 2 个圆周的楔和. 其基本群为:

$$\pi_1(S^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}) \cong \pi_1(\mathbf{E}^2 \setminus \{x_2, x_3\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

(3) T^2 上去掉 3 个点

证明. 如图所示, 我们用环面的多边形表示来得出其收缩核, 又由于在一定条件下 (此处满足) 原空间先进行商映射 (粘合) 后进行收缩与先进行收缩再进行商映射是等价的, 故按照图 4.21, 其基本群为:

$$\pi_1(T^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

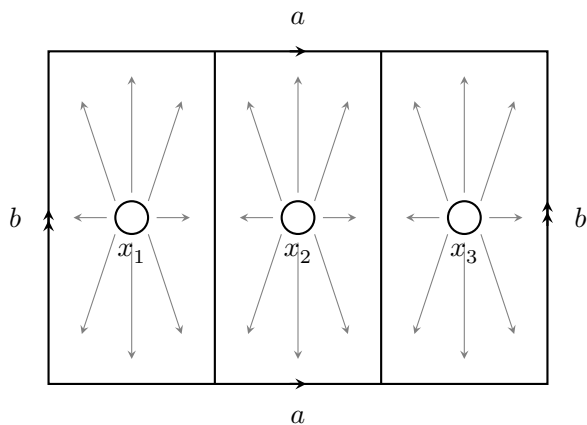


图 4.18: 环面 T^2 去掉三个点后的形变收缩过程示意图

Example 4.5.11 ▶ 典型空间的基本群计算

求下列空间的基本群:

(1) $\mathbf{E}^3$ 中去掉 2 条不相交直线

证明. 在三维空间 $\mathbf{E}^3$ 中去掉一条直线, 可以形变收缩到垂直于该直线的平面 $\mathbf{E}^2$ 去掉一个点. 因此, 去掉两条不相交的直线, 在同伦意义下等同于在平面 $\mathbf{E}^2$ 中去掉两个点. 平面去掉两个点同伦等价于两个圆周的楔和 $S^1 \vee S^1$, 故其基本群为:

$$\pi_1(\mathbf{E}^3 \setminus \{L_1, L_2\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$



(2) $\mathbf{E}^3$ 中 3 条坐标轴

证明. 考虑 $\mathbf{E}^3$ 中的单位球面 S^2 . 三条相互垂直的坐标轴 (x 轴、 y 轴、 z 轴) 每一条都与 S^2 有 2 个交点, 因此 3 条轴总共在球面上留下 6 个点. 空间 $\mathbf{E}^3 \setminus \{\text{三轴}\}$ 可以形变收缩到 $S^2 \setminus \{6\text{个点}\}$. 由于球面去掉 1 个点同胚于平面, 因此这等同于 $\mathbf{E}^2$ 去掉 5 个点. 其基本群为 5 个无限循环群的自由积:

$$\pi_1(\mathbf{E}^3 \setminus \{\text{axes}\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

(3) “田”字形图形

证明. “田”字形图形是一个由外部正方形边界和内部十字交叉线构成的 1-维复形. 从拓扑上看, 该图形包含 4 个小的闭合区域 (“洞”). 这等同于在平面 $\mathbf{E}^2$ 中去掉 4 个点后, 形变收缩得到的骨架. 每一个 “洞” 对应基本群的一个自由生成元, 因此其基本群为 4 个无限循环群的自由积:

$$\pi_1(\text{“田”字形}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Example 4.5.12

证明由一系列相切球面构成的空间 $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i^2$ 是单连通的.

证明. 方法一: 利用 Van-Kampen 定理的分解法. 记 X_1 是 X 中第三个坐标 $z \geq 0$ 的点的集合, X_2 是 X 中第三个坐标 $z \leq 0$ 的点的集合, 显然 $X = X_1 \cup X_2$, 而 X_1, X_2 单连通, 考察交集 $X_1 \cap X_2$, 它是道路连通的, 因此根据 Van-Kampen 定理, 若 $X = X_1 \cup X_2$ 且 X_1, X_2 均为单连通, 且 $X_1 \cap X_2$ 道路连通, 则 X 的基本群由 $\pi_1(X_1)$ 与 $\pi_1(X_2)$ 的自由积决定. 由于这两个群均为平凡群, 故 $\pi_1(X)$ 也是平凡群. 由此证得 X 是单连通的.

方法二: 利用紧致性与有限并的单连通性. 首先, 利用 Van-Kampen 定理可以证明, 有限个依次相切的球面之并 $Y_{k,l} = \bigcup_{k \leq i \leq l} S_i^2$ 是单连通的. 这是因为每增加一个球面, 它与原有部分的交集仅为一个切点, 而单点是道路连通且其基本群平凡, 根据 Van-Kampen 定理, 增加球面不改变基本群的平凡性. 其次, 设 $a: I \rightarrow X$ 是 X 上以原点 O 为基点的任意闭路. 由于单位区间 I 是紧集, 其连续映射的像 $a(I)$ 在 X 中也是紧集. 由于各个球面 S_i^2 仅在离散的切点处相连, 一个紧集不可能横跨无限个互不包含的球面, 因此必然存在一对整数 $k < l$, 使得该闭路的轨迹完全包含在有限个球面之内, 即 $a(I) \subset \bigcup_{k \leq i \leq l} S_i^2$. 既然有限并空间 $Y_{k,l}$ 是单连通的, 闭路 a 在 $Y_{k,l}$ 中必然定端同伦于基点 O . 因为 $Y_{k,l}$ 是 X 的子空间, 该同伦过程在 X 中同样成立. 这说明 X 上的任何闭路都是零伦的, 故 X 是单连通的.

Example 4.5.13 ▶ 21 级及 23 级数试考试题

在三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$ 中, 设 L 为 z 轴, 定义两条封闭曲线如下: $C_1 = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| = 1, z = 2\}$; $C_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$. 请依次回答以下五个问题: (1) C_1 和 C_2 是否同胚? (2) 求

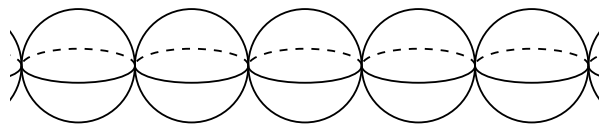


图 4.19: 无限相切球面空间 $X = \bigcup_i S_i^2$

$\mathbb{E}^3 \setminus L$ 的基本群. (3) 求 $\mathbb{E}^3 \setminus C_2$ 的基本群. (4) 求 $\mathbb{E}^3 \setminus (C_1 \cup C_2)$ 的基本群. (5) 求 $\mathbb{E}^3 \setminus (L \cup C_1 \cup C_2)$ 的基本群.

证明. (1) 它们显然同胚, 读者自己补充过程.

(2) 空间 $\mathbb{E}^3 \setminus L$ 即为挖去了 z 轴的整个三维空间. 该空间可以形变收缩到 xy 平面上的挖去原点的平面 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, 而后者进一步形变收缩到单位圆周 S^1 . 因此, 其基本群 $\pi_1(\mathbb{E}^3 \setminus L) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. 该群由绕 z 轴旋转一圈的闭路生成.

(3) 对于 $\mathbb{E}^3 \setminus C_2$, 即挖去了一个位于 $z = 1$ 平面的圆周. 根据代数拓扑结论, 三维空间中一个圆周的补空间同胚于 $S^1 \vee S^2$ (例 4.4.32). 由于 S^2 是单连通的, 其基本群由圆周部分贡献, 故由 Van-Kampen 定理得 $\pi_1(\mathbb{E}^3 \setminus C_2) \cong \mathbb{Z}$.

(4) 考察 $\mathbb{E}^3 \setminus (C_1 \cup C_2)$. 由于 C_1 位于 $z = 2$ 处, C_2 位于 $z = 1$ 处, 且两者关于 z 轴中心对称, 它们在三维空间中并未相互套叠 (即互不相连且互不互锁). 挖去两个互不互锁的圆周, 其补空间等价于两个单圆周补空间的并. 由 Van-Kampen 定理可知, 其基本群为两个 $\mathbb{Z}$ 的自由积, 即 $\pi_1(\mathbb{E}^3 \setminus (C_1 \cup C_2)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$, 其中 F_2 是秩为 2 的自由群.

(5) 首先, 对于正方形边界曲线 C_1 , 其在拓扑上显然同胚于标准圆周, 我们可以直接将其视为位于 $z = 2$ 平面上的标准圆周.

接下来, 我们考察挖去 z 轴的空间 $\mathbb{E}^3 \setminus L$ 的拓扑结构. 定义半平面 $H = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, z \in \mathbb{R}\}$. 在柱坐标系下, 这相当于固定极角 θ 时的截面. 我们可以构造如下映射 $\Phi: S^1 \times H \rightarrow \mathbb{E}^3 \setminus L$:

$$\Phi(u, (r, z)) = (r \cdot \operatorname{Re}(u), r \cdot \operatorname{Im}(u), z)$$

其中 $u \in S^1 \subset \mathbb{C}$ 代表旋转角度. 这是一个同胚映射, 因此我们有:

$$\mathbb{E}^3 \setminus L \cong S^1 \times H$$

在此积空间视点下, 曲线 C_1 (视为圆周) 和 C_2 分别是由半平面 H 中的点 $p_1(1, 2)$ 和 $p_2(1, 1)$ 经由 S^1 旋转生成的轨迹. 也就是说, 从空间中挖去这两条曲线, 等价于在半平面 H 中挖去这两个点 p_1, p_2 , 然后再与 S^1 做笛卡尔积. 即目标空间同胚于:

$$X \cong S^1 \times (H \setminus \{p_1, p_2\})$$

所以第一部分: $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, 第二部分: H 是凸集 (可缩), $H \setminus \{p_1, p_2\}$ 即平面上挖去两个点, 其形变收缩于两个圆周的楔和 ($S^1 \vee S^1$), 故 $\pi_1(H \setminus \{p_1, p_2\}) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$.



综上所述, 根据定理 4.3.12(积空间的基本群), 该空间的基本群为:

$$\pi_1(\mathbb{E}^3 \setminus (L \cup C_1 \cup C_2)) \cong \mathbb{Z} \times F_2$$

4.5.2 闭曲面分类补充证明

Remark 4.5.14

闭曲面分类定理证明的剩下部分是要说明不同类型闭曲面不同胚, 为此只须说明它们的基本群不同构. 两个群的不同构并不很容易从它们的结构判定, 但交换群(阿贝尔群)的不同构比较容易判定.

为此我们求闭曲面基本群的交换化. 群 G 的交换化记作 $\tilde{G}$, 可以算出:

$$\widetilde{\pi_1(X)} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{m-1} \times \mathbb{Z}_2, & X \text{ 是 } mP^2 \text{ 型闭曲面,} \\ \mathbb{Z}^{2n}, & X \text{ 是 } nT^2 \text{ 型闭曲面.} \end{cases}$$

于是不同类型的闭曲面的基本群交换化以后不同构, 因此基本群也不同构, 分类定理证明完成.

事实上, 我们也证明了不同类型的闭曲面的伦型不相同. 因此闭曲面的同伦分类与拓扑分类是一致的.

4.5.3 Brouwer 不动点定理

Theorem 4.5.15 ▶ Brouwer 不动点定理二维情况

设 f 是 n 维实心球 D^n 到自身的连续映射, 则存在 $x \in D^n$, 使得 $f(x) = x$.

证明. 用反证法. 设 f 没有不动点, 即 $f(x) \neq x, \forall x \in D^n$. 于是可以规定映射 $g: D^n \rightarrow S^{n-1}$ 为:

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

则 g 连续, 并且其在边界上的限制 $g_0 = g|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ 满足 $g_0(x) \neq -x, \forall x \in S^{n-1}$ (由定义易证). 因此 $g_0 \simeq \text{id}_{S^{n-1}}$.

因为 $g_0 = g \circ i$, 其中 $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ 是包含映射. 由于 D^n 是可收缩的, 包含映射 i 是零伦的, 所以复合映射 g_0 也是零伦的. 由此推出恒等映射 $\text{id}_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ 是零伦的.

当 $n = 2$ 时, 已知 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. 恒等映射 id_{S^1} 导出的基本群自同构是单位同构, 不是平凡的; 而零伦映射 (如常值映射) 导出的基本群同态必然是平凡的. 这说明 id_{S^1} 不是零伦的.

该矛盾说明原假设不成立, 故 f 一定有不动点.

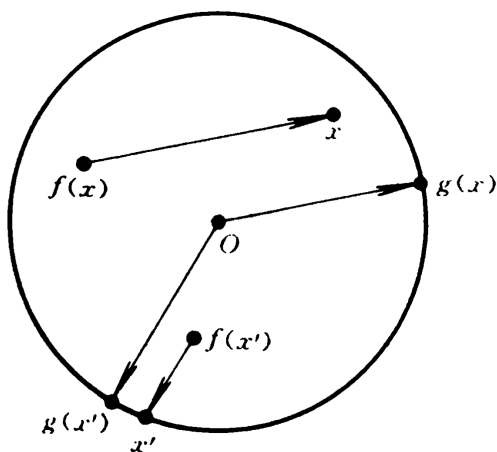


图 4.20: 二维不动点定理证明

Example 4.5.16

设 $f: D^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ 连续. 证明在下列条件之一成立时, f 有不动点:

- (1) $f(S^1) \subset D^2$;
- (2) $\forall x \in S^1, f(x), x$ 与原点不共线;
- (3) $\forall x \in S^1$, 线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点.

证明. 作收缩映射 $r: \mathbf{E}^2 \rightarrow D^2$ 为:

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } \|x\| \leq 1, \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{若 } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

则复合映射 $r \circ f: D^2 \rightarrow D^2$ 是连续映射. 由 Brouwer 不动点定理可知, $r \circ f$ 必有不动点, 设为 $x_0 \in D^2$, 即 $r(f(x_0)) = x_0$.

1. 情况 (1) 的证明: 若 $\|f(x_0)\| \leq 1$, 由 r 的定义知 $r(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, 定理得证. 若 $\|f(x_0)\| > 1$, 由 r 的定义知 $x_0 = r(f(x_0)) = f(x_0)/\|f(x_0)\|$, 这说明 $\|x_0\| = 1$, 即 $x_0 \in S^1$. 但已知条件 (1) 指出 $f(S^1) \subset D^2$, 即对于 $x_0 \in S^1$, 必有 $\|f(x_0)\| \leq 1$, 这与 $\|f(x_0)\| > 1$ 矛盾. 因此必有 $f(x_0) = x_0$.

2. 情况 (2) 的证明: 同上, 设 x_0 是 $r \circ f$ 的不动点. 若 x_0 不是 f 的不动点, 则必有 $x_0 \in S^1$ 且 $\|f(x_0)\| > 1$. 此时由 $x_0 = f(x_0)/\|f(x_0)\|$ 可知, $f(x_0) = \|f(x_0)\|x_0$. 这意味着向量 $f(x_0)$ 是 x_0 的正数倍, 从而 $f(x_0), x_0$ 与原点共线, 这与条件 (2) 矛盾, 因此 x_0 是 f 的不动点.

3. 情况 (3) 的证明: 采用反证法. 若 f 无不动点, 则对于任意 $x \in D^2$, 均有 $f(x) \neq x$. 据此可构造连续映射 $g: D^2 \rightarrow S^1$ 为:

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

对于边界上的点 $x \in S^1$, 已知线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点, 这意味着原点 O 落在 x 与 $f(x)$ 构成的线段上.



故存在常数 $\lambda \geq 0$ 使得 $f(x) = -\lambda x$. 代入 $g(x)$ 的表达式得:

$$g(x) = \frac{x - (-\lambda x)}{\|x - (-\lambda x)\|} = \frac{(1 + \lambda)x}{(1 + \lambda)\|x\|} = x$$

这说明 g 在边界 S^1 上的限制为恒等映射. 记 $i: S^1 \hookrightarrow D^2$ 为包含映射, 则有 $g \circ i = \text{id}_{S^1}$.

因此上述映射诱导的群同态满足 $g_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(S^1)}$. 已知圆周的基本群 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, 而圆盘的基本群 $\pi_1(D^2) \cong 0$. 因此, 上述等式转化为如下群同态序列的复合:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z}$$

根据复合映射的性质, 该序列的复合映射 $g_* \circ i_*$ 必然将 $\mathbb{Z}$ 中的所有元素映射为 0. 但这与 $g_* \circ i_* = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ (恒等映射应将 1 映射为 1) 直接矛盾, 故 f 必有不动点.

Example 4.5.17

设 $f: D^2 \rightarrow D^2$ 连续, 并且 S^1 上每一点都不动, 证明 f 是满射的.

证明. 采用反证法. 假设 f 不是满射的, 则存在点 $x_0 \in D^2$ 使得 $x_0 \notin f(D^2)$.

由于题目已知 S^1 上每一点在 f 下均不动, 这意味着 $f(S^1) = S^1$. 既然整个边界 S^1 都在 f 的像集中, 那么所假设的缺失点 x_0 必然不在 S^1 上, 即 x_0 是圆盘 D^2 的内部点.

由此, 我们可以将 f 的陪域限制为挖去一点的圆盘, 即 $f: D^2 \rightarrow D^2 \setminus \{x_0\}$ 是一个连续映射. 已知从挖去一个内部点的圆盘到其边界 S^1 存在收缩映射 (例如通过从 x_0 点出发的射线投影), 记该收缩映射为 $r: D^2 \setminus \{x_0\} \rightarrow S^1$.

构造复合映射 $F = r \circ f: D^2 \rightarrow S^1$. 对于任意边界点 $x \in S^1$, 根据已知条件有 $f(x) = x$, 再根据收缩映射的定义有 $r(x) = x$, 因此 $F(x) = r(f(x)) = x$. 这说明 F 是一个从圆盘 D^2 到其边界 S^1 的连续收缩映射.

根据基本群的性质, 该映射 F 诱导了如下的基本群同态序列:

$$\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{F_*} \pi_1(S^1)$$

代入具体的群得到:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{F_*} \mathbb{Z}$$

由于该序列中间经过零群, 其复合映射 $F_* \circ i_*$ 必然是零同态. 然而, 由于 F 在边界上是恒等映射, 其诱导同态 $F_* \circ i_*$ 必须是 $\mathbb{Z}$ 上的恒等同态. 这一矛盾说明 f 是满射的.

Example 4.5.18 ▶ 23 级数试考试题

证明在西安交通大学校园中三楼内的一幅校园地图上, 总存在一点, 它在地图上的位置与其在实际校园中的物理位置完全重合.

证明. 我们将西安交通大学校园的实际地理区域记为空间 X . 在忽略海拔高度差异的情况下, X 可以看作欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中一个闭、有界且单连通的区域. 从拓扑学角度来看, X 同胚于一个标准



的二维闭圆盘 D^2 , 这是一个紧致且凸的拓扑空间, 满足 Brouwer 不动点定理的前提条件.

设有一幅存放在中三楼教室内的校园地图, 记地图纸张所占的物理区域为 M . 地图的绘制过程本质上是一个连续映射 $f: X \rightarrow M$, 它将校园中的每一个实际地理位置点 P 对应到地图上的一个表示点 $p = f(P)$. 由于地图是通过缩放、投影等连续变换制成的, 该映射在拓扑上是连续的.

由于当前这张地图 M 正置于中三楼的桌面上, 而中三楼物理上位于西安交通大学校园 X 的内部, 因此必然满足包含关系 $M \subset X$. 基于这一物理事实, 我们可以将上述映射 f 看作是从区域 X 到其自身子集的连续自映射, 即 $f: X \rightarrow X$.

根据 Brouwer 不动点定理, 任何从同胚于闭圆盘的紧致凸集到其自身的连续映射必有不动点. 因此, 在区域 X 中至少存在一个点 P_0 , 满足 $f(P_0) = P_0$. 这意味着在实际校园中存在一个物理位置 P_0 , 它在地图上对应的那个点, 其物理坐标恰好与 P_0 完全重合 (即该点就在它所代表的真实土地的正上方).

编者补充: 其实哪怕你把地图揉成一团 (只要不撕破, 保证连续性) 丢在交大的草坪上, 这个结论依然成立——在那团乱纸中, 依然存在一个点, 它代表的位置就在它正下方的土地上.

Example 4.5.19 ▶ Frobenius 定理的拓扑证明 (21 级数试考试题及 23 级数试课堂补充题)

题目: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 n 阶可逆矩阵, 其所有分量均满足 $a_{ij} \geq 0$. 证明矩阵 A 至少具有一个正的特征值.

证明. 我们构造一个标准 $(n-1)$ 维单纯形 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. 显然, S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个紧致凸集, 且在拓扑上同胚于闭圆盘 D^{n-1} .

对于任意向量 $x \in S$, 由于矩阵 A 的分量均为非负实数且 x 的分量非负, 线性变换后的向量 Ax 的各分量也必然是非负的. 由于题目给定 A 是可逆矩阵且 x 是非零向量 (其分量和为 1), 因此 Ax 绝不会是零向量. 这意味着 Ax 的各分量之和 $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n (Ax)_i$ 必然是一个大于 0 的实数. 据此, 我们可以定义一个连续映射 $f: S \rightarrow S$ 为:

$$f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$$

由于分母 $\|Ax\|_1$ 始终为正且是关于 x 的线性组合, 该映射 f 在 S 上是连续的.

根据 Brouwer 不动点定理, 从紧致凸集到其自身的连续映射必有不动点. 因此, 存在向量 $x_0 \in S$, 使得 $f(x_0) = x_0$. 将映射的定义代入该等式可得:

$$\frac{Ax_0}{\|Ax_0\|_1} = x_0 \implies Ax_0 = (\|Ax_0\|_1)x_0$$

记 $\lambda = \|Ax_0\|_1$. 由于 x_0 是非零向量, 上述算式说明 λ 是矩阵 A 的一个特征值. 又因为 Ax_0 是一个分量和大于 0 的非负向量, 故 λ 必然是一个正实数.

综上所述, 矩阵 A 至少具有一个正的特征值 λ . 证明完毕.



4.5.4 代数基本定理的证明

Theorem 4.5.20 ▶ 代数基本定理

复数域上次数大于零的一元多项式有根.

证明. 用反证法. 设 n 次复系数多项式 $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ 在复平面上无根. 于是 $a_0 \neq 0$, 否则 0 是根. 不妨设 $a_n = 1$. 对 $\forall r > 0$, 规定 $f_r : S^1 \rightarrow S^1$ 为:

$$f_r(z) = P(rz) / \|P(rz)\|$$

则 $\forall r, f_r \simeq f_0$. 而 $f_0(z) = a_0 / \|a_0\|$, 即 f_0 是常值映射. 于是 f_r 是零伦的.

但是不难证明当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $f_r(z) \rightarrow z^n$, 从而当 r 充分大时, $f_r \simeq h_n$, 这里 $h_n : S^1 \rightarrow S^1$ 规定为 $h_n(z) = z^n$. 已知 h_n 不是零伦的, 因为其诱导的同态 $(h_n)_\pi$ (对应于度为 n 的映射) 不是平凡同态. 这与前面推出的 f_r 零伦矛盾. 故原假设不成立, $P(z)$ 必有根.

4.5.5 曲面上的边界点

Remark 4.5.21 ▶ 关于曲面边界点与 $\mathbf{E}^2, \mathbf{E}_+^2$ 的讨论

第三章已对曲面的边界点作了规定: 曲面上的点称为边界点, 如果它没有同胚于 $\mathbf{E}^2$ 的开邻域. 当然, 它就有开邻域同胚于 $\mathbf{E}_+^2$. 但是还有不明确的问题.

首先, 还没有证明 $\mathbf{E}_+^2 \not\cong \mathbf{E}^2$. 现在来证明此论断. $\mathbf{E}^2$ 中去掉任意一点就不再单连通 (同伦等价于 S^1), 而 $\mathbf{E}_+^2$ 上去掉有些点 (确切地说: $(x, 0), \forall x \in \mathbf{E}^1$) 后仍是单连通的 (实际上是可缩的), 因此 $\mathbf{E}_+^2 \not\cong \mathbf{E}^2$.

其次, 直观上的边界点是不是就是现在意义的边界点? 例如对于圆盘 D^2, S^1 上的点是边界点吗? 这种点已有同胚于 $\mathbf{E}_+^2$ 的开邻域, 还会由同胚于 $\mathbf{E}^2$ 的开邻域吗?

Proposition 4.5.22

设 x 是拓扑空间 X 的一点, V 是 x 的一个开邻域, 并有同胚映射 $f : V \rightarrow \mathbf{E}_+^2$, 使得 $f(x) = 0$ (原点), 则 x 没有同胚于 $\mathbf{E}^2$ 的开邻域.

证明. 用反证法. 设 x 有开邻域 $U \cong \mathbf{E}^2, g : U \rightarrow \mathbf{E}^2$ 是同胚映射. 则 $\mathbf{E}_+^2$ 中 O 的开邻域 $f(U \cap V)$ 同胚于 $\mathbf{E}^2$ 中的开集 $g(U \cap V)$ (图 4.21).

取 $\epsilon > 0$, 使得 $\mathbf{E}_+^2$ 中的球形邻域 $B(O, \epsilon) \subset f(U \cap V)$. 则 $B(O, \epsilon)$ 与 $\mathbf{E}^2$ 中某个开集 W 同胚, 于是 $B(O, \epsilon) \setminus \{O\}$ 同胚于 W 去掉一点. 后者不可缩 (例 4.3.16), 而 $B(O, \epsilon) \setminus \{O\}$ 是可缩的, 矛盾.

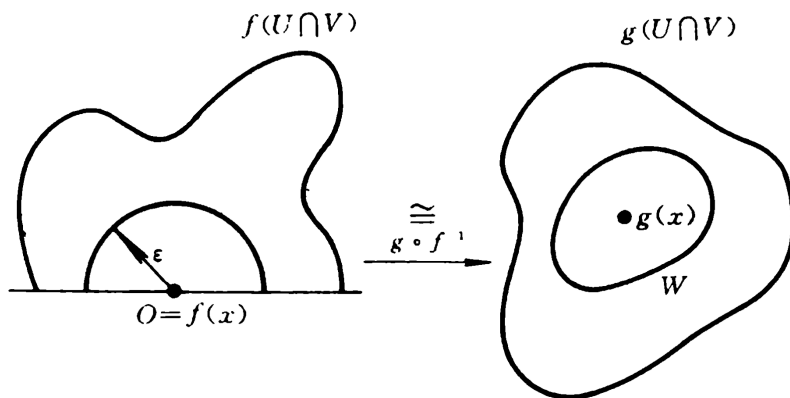


图 4.21: 证明示意图

Example 4.5.23

证明如果曲面 M 与 N 同胚, 则它们的边界也同胚. 并由此说明 Möbius 带与平环不同胚.

证明. 1. 边界同胚的证明: 设 $h: M \rightarrow N$ 是一个同胚映射. 根据边界点的拓扑定义, 点 $x \in M$ 是边界点, 当且仅当它没有同胚于 $\mathbf{E}^2$ 的开邻域. 由于 h 是同胚映射, 它保持空间的局部拓扑性质不变. 若 x 是 M 的边界点, 则 $h(x)$ 在 N 中也必然没有同胚于 $\mathbf{E}^2$ 的开邻域, 故 $h(x)$ 必为 N 的边界点.

同理, h^{-1} 将 N 的边界点映射到 M 的边界点. 因此, 同胚映射 h 限制在边界上得到的映射 $h|_{\partial M}: \partial M \rightarrow \partial N$ 是一个双射, 且由于 h 及其逆映射均连续, 可知 $h|_{\partial M}$ 也是同胚映射. 故 $\partial M \cong \partial N$.

2. 说明 Möbius 带与平环不同胚: 平环的边界由两个不相交的圆周组成, 即其边界具有两个连通分支. 而 Möbius 带的边界仅由一个圆周组成, 即其边界只有一个连通分支.

由于连通分支的数量是拓扑不变性质, 两个圆周构成的空间与一个圆周构成的空间不同胚, 即 $\partial(\text{平环}) \not\cong \partial(\text{Möbius 带})$. 根据前述结论, Möbius 带与平环不同胚.

4.6 Jordan 曲线定理

Definition 4.6.1 ▶ Jordan 曲线

平面或球面上同胚于圆周 S^1 的子集称为 Jordan 曲线, 或称为简单闭曲线.

Theorem 4.6.2 ▶ Jordan 曲线定理

若 J 是 E^2 上的一条 Jordan 曲线, 则 $E^2 \setminus J$ 有两个连通分支, 它们都以 J 为边界.



复叠空间

复叠空间，也常称为覆盖空间，是代数拓扑中与基本群关系非常密切的一类空间。它的基本思想是：一个空间 E 通过映射 $p: E \rightarrow B$ “铺盖”在另一个空间 B 上，并且在 B 的每个足够小的邻域上，这种铺盖都可以分解成若干互不相交的、与该邻域同胚的“片”。本章主要研究复叠映射、映射提升以及复叠空间与基本群之间的关系。

5.1 复叠空间及其基本性质

5.1.1 复叠映射与复叠空间

Definition 5.1.1 ▶ 复叠映射与复叠空间

设 E 与 B 是道路连通、局部道路连通的拓扑空间， $p: E \rightarrow B$ 是连续映射。如果对每个 $b \in B$ ，存在 b 的开邻域 U ，使得

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_{\lambda},$$

其中 $\{V_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 E 中一族两两不相交的开集，并且对每个 $\lambda \in \Lambda$ ，限制映射

$$p|_{V_{\lambda}}: V_{\lambda} \rightarrow U$$

都是同胚映射，则称 $p: E \rightarrow B$ 是一个复叠映射，也称覆盖映射。并把 (E, p) 记作 B 上的一个复叠空间。

Proposition 5.1.2 ▶ 基本邻域的简单性质

若 U 是 B 中的基本邻域，且 $W \subseteq U$ 是开集，则 W 也是基本邻域。

证明. 设

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_{\lambda},$$

其中各 V_{λ} 两两不相交，且

$$p|_{V_{\lambda}}: V_{\lambda} \rightarrow U$$

是同胚映射。由于 $W \subseteq U$ ，有

$$p^{-1}(W) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V_{\lambda} \cap p^{-1}(W)).$$

记

$$W_{\lambda} = V_{\lambda} \cap p^{-1}(W).$$



则各 W_λ 仍然两两不相交, 且 W_λ 是 E 中开集。同时

$$p|_{W_\lambda} : W_\lambda \rightarrow W$$

仍为同胚映射。因此 W 是基本邻域。

Definition 5.1.3 ▶ 纤维与叶数

设 $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射, $b \in B$ 。集合

$$p^{-1}(b) = \{e \in E \mid p(e) = b\}$$

称为点 b 上方的纤维。

若 B 是道路连通的, 则纤维 $p^{-1}(b)$ 的基数与 b 的选择无关。这个基数称为复叠映射 p 的叶数, 也称层数。

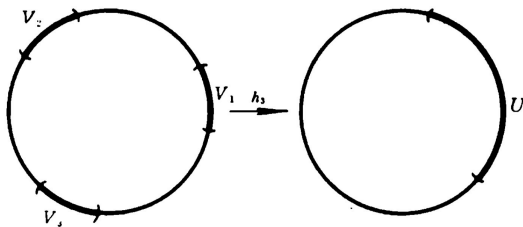
Example 5.1.4 ▶ 圆周上的 n 叶复叠映射

映射

$$h_n : S^1 \rightarrow S^1, \quad h_n(z) = z^n$$

是一个 n 叶复叠映射。

从几何上看, h_n 把圆周绕底空间圆周转了 n 圈。对底空间圆周上足够短的开弧 U , 它的原像由 n 条互不相交的开弧组成, 并且 h_n 把每一条开弧都同胚地映到 U 上。



Example 5.1.5 ▶ 球面到射影空间的复叠映射

设 S^n 是 n 维球面, P^n 是 n 维实射影空间。自然粘合映射

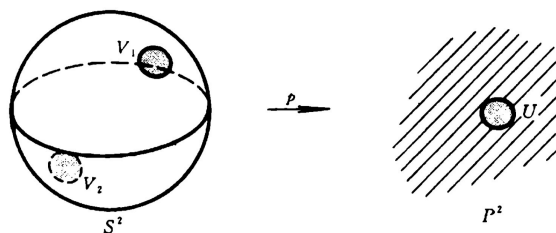
$$p : S^n \rightarrow P^n$$

把每一对对径点粘合为同一点。该映射是一个 2 叶复叠映射。

这里每个点 $[x] \in P^n$ 的纤维为

$$p^{-1}([x]) = \{x, -x\},$$

所以叶数为 2。



Example 5.1.6 ▶ 平面到环面的复叠映射

把环面看成乘积空间

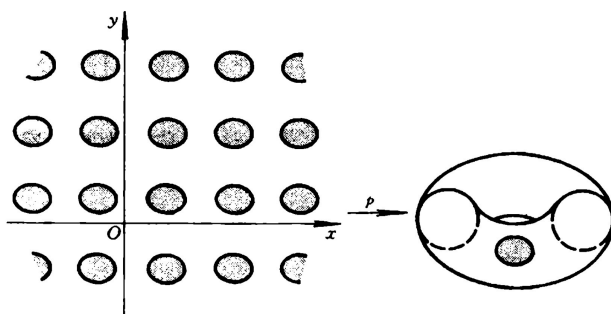
$$T^2 = S^1 \times S^1.$$

定义映射

$$p : \mathbb{E}^2 \longrightarrow T^2, \quad p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}).$$

则 p 是一个复叠映射。

这个例子可以理解为：平面中的每个单位正方形都被同胚地映到环面上的一个基本区域。整个平面由这些正方形周期性平铺，而环面则由一个正方形经过对边粘合得到。

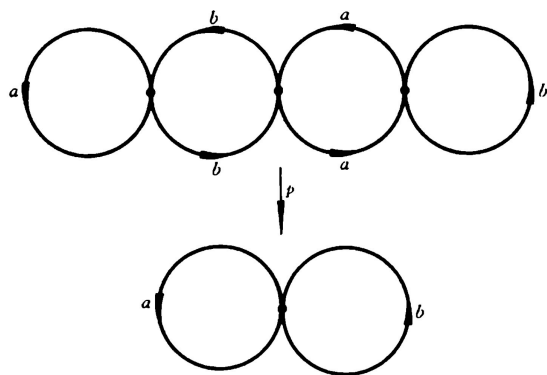


Example 5.1.7 ▶ 八字形空间上的三叶复叠

设底空间是两个圆周相切得到的八字形空间。可以构造一个由四个依次相切的圆周组成的空间 E ，并定义映射

$$p : E \longrightarrow B,$$

使得 p 把相应标号的弧段映到八字形空间中的对应弧段上。该映射是一个 3 叶复叠映射。



下面给出一类构造有限叶复叠空间的常用方法。

Principle 5.1.8 ▶ 有限循环作用诱导的复叠映射

设 X 是道路连通、局部道路连通的 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow X$ 是同胚映射, 并且满足:

$$f^n = \text{id}_X,$$

且当 $0 < m < n$ 时, f^m 没有不动点。

在 X 上定义等价关系:

$$x \sim x' \iff x' = f^m(x) \text{ 对某个 } m \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

记商空间为 X/f , 粘合映射为

$$p: X \longrightarrow X/f.$$

则 p 是一个 n 叶复叠映射。

证明. 任取 $y \in X/f$, 设

$$p^{-1}(y) = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}.$$

由于 X 是 Hausdorff 空间, 并且这些点两两不同, 可以取 x 的开邻域 V , 使得

$$V, f(V), \dots, f^{n-1}(V)$$

两两不相交。令

$$U = p(V).$$

则

$$p^{-1}(U) = V \cup f(V) \cup \dots \cup f^{n-1}(V),$$

并且 p 把每个 $f^m(V)$ 同胚地映到 U 上。因此 U 是 y 的基本邻域, $p: X \rightarrow X/f$ 是 n 叶复叠映射。



Example 5.1.9 ▶ 由旋转得到的八字形空间复叠

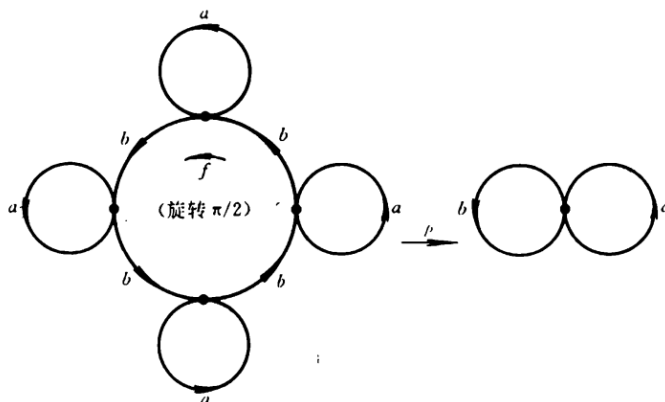
设 X 由一个大圆周与 n 个等半径小圆周组成，每个小圆周与大圆周外切，并且切点等分大圆周。令

$$f: X \rightarrow X$$

为绕大圆心旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 的映射。则 $f^n = \text{id}_X$ ，且 $0 < m < n$ 时 f^m 没有不动点。于是由上一定理可得

$$p: X \rightarrow X/f$$

是一个 n 叶复叠映射。此时商空间 X/f 是八字形空间。

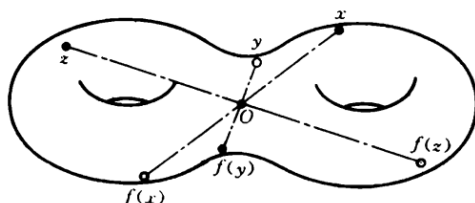


Example 5.1.10 ▶ 双环面到三射影平面的二叶复叠

设 F 是中心对称地放置在 E^3 中的双环面，令

$$f: F \rightarrow F$$

为中心对称映射。则商空间 F/f 同胚于 $3P^2$ 型曲面。因此可以得到一个从 $2T^2$ 型曲面到 $3P^2$ 型曲面的 2 叶复叠映射。



证明. 中心对称映射 f 满足 $f^2 = \text{id}_F$ ，且在 F 上无不动点，故它给出 F 上的自由 $\mathbb{Z}_2$ 作用。因此自然商映射

$$p: F \rightarrow F/f$$

是二叶复叠映射。



又因 F 是双环面, 即亏格为 2 的可定向闭曲面, 所以

$$\chi(F) = 2 - 2 \cdot 2 = -2.$$

二叶复叠满足欧拉示性数关系

$$\chi(F) = 2\chi(F/f),$$

故

$$\chi(F/f) = -1.$$

由闭曲面分类定理, 欧拉示性数为 -1 的闭曲面只能是

$$3P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2.$$

因此

$$F/f \cong 3P^2,$$

从而得到一个从 $2T^2$ 型曲面到 $3P^2$ 型曲面的二叶复叠映射。

5.1.2 映射提升问题

在复叠空间理论中, 映射提升问题是核心问题之一。给定复叠映射 $p: E \rightarrow B$, 如果一个映射 $f: X \rightarrow B$ 可以通过某个映射 $\tilde{f}: X \rightarrow E$ 再投影回 B , 即满足

$$p \circ \tilde{f} = f,$$

则称 $\tilde{f}$ 是 f 的一个提升。

Definition 5.1.11 ▶ 映射的提升

设 $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射, X 是拓扑空间, $f: X \rightarrow B$ 是连续映射。如果存在连续映射

$$\tilde{f}: X \rightarrow E$$

使得

$$p \circ \tilde{f} = f,$$

则称 $\tilde{f}$ 是 f 关于复叠映射 p 的一个提升。

提升问题通常包含两个方面: 一是提升是否存在, 二是提升是否唯一。本节先讨论唯一性。

Principle 5.1.12 ▶ 提升唯一性定理

设 X 是连通空间, $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射。若

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: X \rightarrow E$$



都是同一个连续映射 $f: X \rightarrow B$ 的提升, 即

$$p \circ \tilde{f}_1 = f, \quad p \circ \tilde{f}_2 = f,$$

并且存在一点 $x_0 \in X$, 使得

$$\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0),$$

则

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2.$$

证明请见课本。

Proposition 5.1.13 ▶ 道路提升定理

设 $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射, $\alpha: I \rightarrow B$ 是 B 中的一条道路, 且

$$\alpha(0) = b.$$

若 $e \in p^{-1}(b)$, 则存在唯一道路

$$\tilde{\alpha}: I \rightarrow E$$

使得

$$p \circ \tilde{\alpha} = \alpha, \quad \tilde{\alpha}(0) = e.$$

这条道路 $\tilde{\alpha}$ 称为 α 的以 e 为起点的提升道路。



期末考试卷

6.1 23 级数试考试题

期末考试 5.28

一. (1) 离散拓扑, 平凡~, 欧氏~, 余可数~, 余有限~ 定义

(2) 什么是 T_2 公理? $\mathbb{R}$ 上的以上五种拓扑空间, 哪几个满足 T_2 ? (不证)

(3) (2) 中 5 个空间, 哪几个连通? 说明理由 拓扑学笔记+p65

(4) $\mathbb{R}^n$ 中任意多个紧子集之交是否紧致?

二. 连通和道路连通等价吗? 拓扑学笔记+p59

三. (1) 什么是曲面的连通和

(2) P, Q 是两个闭曲面, 则 $P \# Q$ 是什么? 简要说明证明思路.
拓扑学笔记+p95

四. $f: S^1 \rightarrow S^1$ 与恒同映射不同伦, 证明 f 有不动点. 拓扑学笔记+p104

五.  将三角形三边粘合得到 X

(1) 求 X 基本群 拓扑学笔记+p149

(2) 它与蜷缩圆筒同伦等价吗? 拓扑学笔记+p133

六. L 为 z 轴, $C_1 = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| = 1, z = 2\}$ $C_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$

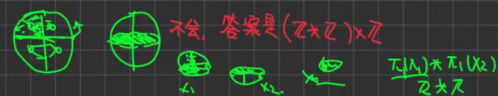
(1) C_1 与 C_2 同胚吗? 拓扑学笔记+p21

(2) 求 $E^3 - L$ 的基本群 拓扑学笔记+p149

(3) 求 $E^3 - C_1 - C_2$ 基本群

(4) 求 $E^3 - L - C_1 - C_2$ 的基本群.

拓扑学笔记+p137





七. (1) 什么是 Brouwer 不动点定理?

拓扑学笔记+p144



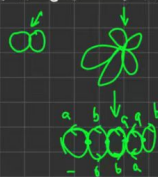
(2) 左图是放大地图. 证明有一点实际位置和在地图上的位置相同.

八. (1) 证明不可定向曲面可被定向闭曲面 = 叶数. 并指出亏格.

拓扑学笔记+p157

(2) (教试必做) S^2 为球面 S^2 上去掉几个点, 证明 S^2 可被 S^2 覆盖, 并求覆盖的叶数.

拓扑学笔记+p155





6.2 21 级数试补考题

西安交通大学考试題

成绩

课 程 拓扑学学 院 数学与统计学院

考 试 日 期 2023 年 9 月 17 日

专业班号 应数 001, 数试 2101、2102姓 名 _____ 学 号 _____ 期中 ☐ 期末 ☐

一 (20 分, 每题 4 分) 请叙述下列基本概念:

- (1) 拓扑、拓扑空间;
- (2) 拓扑空间的连通与道路连通性;
- (3) C_1 、 C_2 分离公理;
- (4) 拓扑流形与闭曲面;
- (5) 可缩空间;

二 (10 分) 证明: Hausdorff 空间的任意多个紧致子集之交仍紧致.

三 (15 分)

(1) 请指出下列闭曲面的拓扑类型:

(A)

(B)



(2) 什么是曲面的连通和? 写出 (1) 中两个闭曲面的连通和.



四 (10 分). 将四个正方形 (含内部) 的各边配对粘合成一个连通的可定向闭曲面. 它的亏格最大是多少? 请说明理由.

五 (10 分) 设 L 是几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中的 z 轴, C 是圆周:

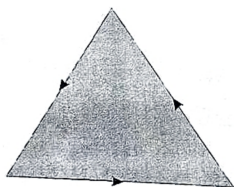
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

(1). 计算 $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L)$;

(2). 计算 $\pi_1(\mathbb{R}^3 - C)$;

六 (15 分) 把三角形 (含内部) 的三条边按图示方式粘接在一起.

- (1) 所得商空间是闭曲面吗?
- (2) 求所得商空间的基本群.



七 (10 分) 证明 Frobenius 定理: 设 A 是所有分量为非负实数的 10 阶可逆矩阵, 则 A 有正的特征值.

八 (10 分) 设 G 是一个群, 定义 G 的投射有限拓扑如下: 任意元素 $a \in G$,

$$\mathcal{N}(a) = \{aH \mid H \text{ 是 } G \text{ 的有限指数子群}\}$$

为 a 的邻域基. 证明: 以下陈述等价

- (1) 上面定义的投射有限拓扑是 Hausdorff 的;
- (2) 单点集 $\{1\}$ 是闭集;
- (3) G 是剩余有限的, 即: G 的所有有限指数的子群之交为 $\{1\}$.