

数学分析期末复习资料

The Reviewing Material of the End-term Examination for Mathematical Analysis

助学组

2026 年 4 月 17 日

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- 标题：数学分析期末复习资料: *The Reviewing Material of the End-term Examination for Mathematical Analysis*
- 作者：助学组
- 出品时间：2026 年 4 月 17 日
- 总页数：??

目录



第一章 集合与映射

§1.1 基础知识

1.1.1 集合

(本讲义中所有页码都指代《数学分析入门(上册)》,下同)
集合:p1; 有序对, 直积 (Cartesian 积):p2.

定义 1 设 X, Y 是集合, 直积 $X \times Y$ 为

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

多个集合的直积:p3; 关系:p4.

证明两个集合相等的常用方法: 证明它们互相包含.

1.1.2 映射与函数

映射, 定义域, 两个映射相等:p4;

定义 2 设 X, Y 是两个集合, 若 $f \subseteq X \times Y$, 并且对于 X 中任一元素 x , 在 Y 中均存在唯一的元素 y 使得 $(x, y) \in f$, 就称 f 是一个从 X 到 Y 的映射 (*mapping*), 记作

$$f : X \longrightarrow Y \text{ 或 } f : x \longmapsto y.$$

映射的像、值域, 映射的复合, 单射、满射、双射:p5;

定义 3 设 $f : X \longrightarrow Y$.

(1) 若对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 只要 $x_1 \neq x_2$ 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射 (*injection*);

(2) 若 $f(X) = Y$, 则称 f 为满射 (*surjection*);

(3) 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射 (*bijection*), 或一一映射 (*one-one correspondence*).

逆映射, 函数, (严格) 单调、奇/偶函数、周期:p6;

反函数, 隐函数, 限制、延拓:p7;

等价关系:p9-10.



定义 4 X 是非空集合, R 是从 X 到 X 的一个关系, 如果满足

(1) (自反性) $xRx (\forall x \in X)$;

(2) (对称性) 若 xRy , 则 yRx ;

(3) (传递性) 若 xRy 且 yRz , 则 xRz ,

就称 R 是 X 上的一个等价关系 (*equivalence relation*).

1.1.3 集合的运算

集合的差、全集、余集, 元素族、指标集、集族, 集族的并:p11;

集族的交:p12; **de Morgan** 律:p13.

1.1.4 可数集

集合的势、等势, 可数集、不可数集、至多可数集:p17.

定义 5 设 A 是一个无限集, 若 $A \sim \mathbb{Z}_{>0}$, 则称 A 为可数集 (*countable set*), 否则称 A 为不可数集 (*uncountable set*). 有限集与可数集被统称为至多可数集 (*at most countable set*).



第二章 实数理论

§2.1 基础知识

2.1.1 基本概念

相关概念：域、有序域、Archimedes 有序域、域的同构

2.1.2 Dedekind 分割

定义 6 (分割) 设 α 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的子集, 如果满足:

- (1) $\alpha \neq \emptyset$ 且 $\alpha \neq \mathbb{Q}$;
 - (2) 若 $p \in \alpha$ 则对满足 $q < p$ 的任意有理数 q 均有 $q \in \alpha$;
 - (3) α 中没有最大元,
- 则称 α 是一个分割 (*cut*).

定理 1 (Dedekind) 设 L 与 U 是 $\mathbb{R}$ 上的两个子集, 若满足:

- (1) $L \neq \emptyset$ 且 $U \neq \emptyset$;
 - (2) $L \cup U = \mathbb{R}$;
 - (3) 对任意的 $x \in L$ 及 $y \in U$ 均有 $x < y$;
- 则存在唯一的实数 z 使得

$$x \leq z \leq y, \forall x \in L, y \in U.$$

这个 z 要么是 L 的最大元, 要么是 U 的最小元.

2.1.3 确界原理

定理 2 (确界原理) 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集. 若 A 有上界, 则 A 有上确界; 若 A 有下界, 则 A 有下确界.

证明 只证明 A 有上界的情形. 令

$$L = \{x \in \mathbb{R} : \text{存在 } a \in A \text{ 使得 } x < a\},$$

$$U = \mathbb{R} \setminus L.$$

首先, 由 $A \neq \emptyset$ 知 $L \neq \emptyset$, 又由 A 有上界知 $U \neq \emptyset$.



其次我们来证明对任意的 $x \in L$ 及 $y \in U$ 均有 $x < y$. 若不然, 则存在 $x_0 \in L$ 及 $y_0 \in U$ 使得 $y_0 \leq x_0$, 注意到由 $x_0 \in L$ 知, 存在 $a \in A$ 使得 $x_0 < a$, 从而 $y_0 < a$, 于是 $y_0 \in L$, 这与 $L \cap U = \emptyset$ 矛盾.

于是由 Dedekind 定理知存在 $z \in \mathbb{R}$ 使得

$$x \leq z \leq y, \forall x \in L, y \in U.$$

下面来证明 z 即为 A 的上确界. 先证 z 为 A 的上界. 反设存在 $a \in A$ 使得 $z < a$, 那么一方面由 $\frac{z+a}{2} < a$ 知 $\frac{z+a}{2} \in L$, 另一方面由 $z < \frac{z+a}{2}$ 知 $\frac{z+a}{2} \in U$, 矛盾. 此外, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 $z - \varepsilon < z$ 可得 $z - \varepsilon \in L$, 再结合 L 的定义便知存在 $b \in A$ 使得 $z - \varepsilon < b$.

2.1.4 有限覆盖定理

定理 3 (有限覆盖定理) 有界闭区间 $[a, b]$ 的任意一个由开区间构成的覆盖必有有限子覆盖.

证明 设 $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 的一个由开区间构成的覆盖. 记

$$A = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ 能被 } (I_\lambda)_{\lambda \in L} \text{ 中有限多个区间覆盖}\},$$

则由 $a \in A$ 知 $A \neq \emptyset$, 此外 b 是 A 的上界, 从而由确界原理知 A 有上确界, 我们把这一上确界记作 ξ .

首先证明 $\xi = b$. 反设 $\xi < b$, 那么由 $\xi \in [a, b]$ 知存在 $\lambda_0 \in L$ 使得 $\xi \in I_{\lambda_0}$, 因为 I_{λ_0} 是开区间, 故存在 $\delta \in (0, b - \xi)$ 使得 $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq I_{\lambda_0}$. 此外由 $\xi = \sup A$ 知存在 $x_0 \in A \cap (\xi - \delta, \xi]$, 而 $x_0 \in A$ 意味着 $[a, x_0]$ 可被 $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ 中有限多个区间覆盖, 在这有限多个区间的基础上, 添加上 I_{λ_0} , 便知 $[a, \xi + \frac{\delta}{2}]$ 可被有限多个 $I_\lambda (\lambda \in L)$ 覆盖. 因为 $\delta < b - \xi$, 所以 $\xi + \frac{\delta}{2} < b$, 而 $\xi + \frac{\delta}{2} \in A$, 但这与 $\xi = \sup A$ 矛盾.

因此 $b = \sup A$. 与上一段中讨论类似可以证明 $a \in A$, 于是定理得证.

2.1.5 常用不等式

重要不等式:

定理 4 (Cauchy 不等式) 对于复数 $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 有:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$



定理 5 (Minkowski 不等式) 对于复数 $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 有:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

§2.2 练习

练习 <2.1> 若域 F 中只有有限多个元素, 则称之为有限域 (finite field), 设 F 是 n 个元素的有限域,

(1) 证明 $n1_F = 0_F$, 进而证明存在素数 p , 使得 $p1_F = 0_F$.

(2) 若 n 是奇数, 则证明对 F 中任意非零元 a 有 $2a \neq 0_F$.

证明

(1) 考虑 $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 则 $x_1 + 1_F, x_2 + 1_F, \dots, x_n + 1_F$ 也构成 F , 由此可知,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = (x_1 + 1_F) + (x_2 + 1_F) + \dots + (x_n + 1_F)$$

从而 $n1_F = 0_F$; 现记 $p = \min\{m : m1_F = 0_F\}$, 下面来证 p 是素数.

若不然, 设 $p = ab$ (其中 $ab > 0$), 于是可得

$$0_F = p1_F = (a1_F) \cdot (b1_F) \Rightarrow a1_F = 0 \text{ 或 } b1_F = 0$$

这显然与 p 的最小性矛盾!

(2) 先证明 $21_F \neq 0_F$, 否则有

$$n1_F = (2 \cdot \frac{n-1}{1} + 1)1_F = 0_F \Rightarrow 1_F = 0_F$$

这显然矛盾. 进而对任意非零元 a , 有 $2a = 2a1_F = a(2 \cdot 1_F) \neq 0_F$, 即证.

练习 <2.2> (Dirichlet) 设 $\tau \geq 1$ 是一个给定的实数, 证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 均存在既约有理分数 $\frac{a}{q}$, 满足 $1 \leq q \leq \tau$ 以及

$$\left| x - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{\tau}}$$

注记

(Kronecher) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \{qx + a : q, a \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.



练习 <2.3> 设 $P(x)$ 是关于实数 x 的一个命题, 且满足:

(1) $\exists a \in \mathbb{R}$ 使得命题 $P(x)$ 对任意的 $x < a$ 均成立.

(2) $\forall b \in \mathbb{R}$, 如果 $P(x)$ 对任意 $x < b$ 成立, 则 $\exists c > b$, 使 $P(x)$ 对任意的 $x < c$ 成立
证明: $P(x)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

证明

令 $A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \text{ 不成立}\}$, 即证: $A = \emptyset$. 反设 $A \neq \emptyset$, 则 A 有下界 a , 于是由确界原理可知 $\inf A$ 存在, 设其为 ξ .

那么 $\forall x < \xi, P(x)$ 均成立 $\Rightarrow \exists \eta > \xi$, 使 $P(x)$ 对任意的 $x < \eta$ 均成立 $\Rightarrow \eta$ 也是 A 的下界

但 $\eta > \xi$, 矛盾! 故 $A = \emptyset$, 即证.

练习 <2.4> 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 且 $f(a) > a, f(b) < b$, 证明: $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = \xi$.

证明

设 $S = \{x \in [a, b] : f(x) \geq x\}$, 则 S 非空有上界, 由确界原理得 S 有上确界 ξ , 下证 $f(\xi) = \xi$. 若不成立, 分为两种情况讨论

(1) $f(\xi) > \xi$, 则由单调性 $f(f(\xi)) \leq f(\xi)$, 这说明 $f(\xi) \in S$. 而 $f(\xi) > \xi$ 与 ξ 是上确界的定义, 矛盾.

(2) $f(\xi) < \xi$, 则由 ξ 是 S 的上确界知, $\exists \eta \in (f(\xi), \xi) \cap S$, 推得 $f(\xi) \geq f(\eta) \geq \eta > f(\eta)$, 矛盾.

综上, 即证.

练习 <2.5> 举例说明: 有限覆盖定理在 $\mathbb{Q}$ 中不成立.

解 记 $J = [0, 1] \in \mathbb{Q}$, 任取 $x \in J \subset \mathbb{Q}$, 由于 $x \neq \sqrt{2}$, 可以取到 $r_x \in \mathbb{Q}$, 使 $\sqrt{2} \notin (x - r_x, x + r_x)$ (取 $r_x \in (0, |x - \sqrt{2}|)$), 从而得到 J 的一个开覆盖.

而任取其中有限个开覆盖 $(x_1 - r_{x_1}, x_1 + r_{x_1}), (x_2 - r_{x_2}, x_2 + r_{x_2}), \dots, (x_n - r_{x_n}, x_n + r_{x_n})$, 令 $\delta_i = \max\{x_i - r_{x_i} - \sqrt{2}, \sqrt{2} - x_i - r_{x_i}\}$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$,

则对有理数 $r : |\sqrt{2} - r| < \delta, r \notin (x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}) (\forall i)$.

即 r 不能被有限覆盖.

练习 <2.6> 设 $(I_\lambda) (\lambda \in L)$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 上的一个开覆盖, 证明 $\exists \delta \geq 0$, 使 $[a, b]$ 中任意一个长度小于 δ 的闭子区间, 必包含于某个 I_λ . (λ 被称为该开覆盖的 Lebesgue 数)

证明



由有限覆盖定理, 存在有限个 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 使 $[a, b] \subseteq I_{\lambda_1} \cup I_{\lambda_2} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$, 不妨认为这一有限覆盖是最优的, 即任意删去 $I_{\lambda_i} (1 \leq i \leq n)$, 剩下的 $n-1$ 个区间不构成 $[a, b]$ 的覆盖.

记 $I_{\lambda_k} = (\alpha_k, \beta_k), \forall k = 1, 2, \dots, n$, 不妨设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 两两不等, 则有 $\alpha_{k+1} < \beta_k (\forall k)$
记 $\delta = \min\{\beta_k - \alpha_{k+1} : k \neq 1 \text{ 且 } k \neq n-1\}$, 则 δ 满足条件.

练习 <2.7> 设 A, B 是两个非空有限集且 $f : A \rightarrow B$, 证明: 集合 $S = \{(a, a') \in A^2 : f(a) = f(a')\}$ 的元素个数至少是 $\max(|A|, \frac{|A|^2}{|B|})$

证明

一方面, 由于 $\forall a \in A, (a, a) \in S$, 则 $|S| \geq |A|$

另一方面, 由 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{n \in B} \sum_{\substack{aa' \in A \\ f(a)=f(a')=n}} 1 = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|^2 \\ &\geq \frac{1}{|B|} \left(\sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| \right)^2 \\ &= \frac{|A|^2}{|B|} \end{aligned}$$

从而, $|S| \geq \max(|A|, \frac{|A|^2}{|B|})$.

其中 $|f^{-1}(b)|$ 表示 A 中使 $f(a) = b$ 的元素 a 的个数.



第三章 数列的极限

§3.1 基础知识

3.1.1 数列极限

定义 7 (数列的极限) 设 $\{x_n\}$ 是一个数列, 若存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足,

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon,$$

我们就称 a 为 $\{x_n\}$ 的极限 (limit) (或 $\{x_n\}$ 收敛 (converge) 于 a). 如果 $\{x_n\}$ 没有极限, 则称其发散.

3.1.2 数列极限的性质

基本性质: 收敛数列有界性、极限的保序性、四则运算

定理 6 (夹逼) 设 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n (\forall n \geq n_0)$, 其中 n_0 为某个给定的正整数. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证明 对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$, 使得当 $n \geq n_\varepsilon$ 时有

$$|y_n - a| < \varepsilon \text{ 和 } |z_n - a| < \varepsilon.$$

现取 $n'_\varepsilon = \max(n_0, n_\varepsilon)$, 则当 $n \geq n'_\varepsilon$ 时有

$$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

3.1.3 实数完备性

定理 7 (单调有界收敛原理) 单调有界的数列必收敛.

证明 不妨设 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 于是由确界原理知集合 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}_0\}$ 有上确界, 记作 a , 我们下面来证 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限. 由上确界的定义知, 一方面有 $x_n \leq a (\forall n)$;



另一方面, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 n_ε 使得 $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$, 再由 $\{x_n\}$ 的单调递增性便知 $x_n > a - \varepsilon (\forall n \geq n_\varepsilon)$. 因此

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

这就证明了 $\{x_n\}$ 收敛于 a .

定理 8 (闭区间套定理) 设有界闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足:

(1) 对任意的 n 均有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$,

则存在唯一的实数 ξ 使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$.

证明 对任意的 $n \geq 1$, 由 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 知 $a_{n+1} \geq a_n$ 且 $b_{n+1} \leq b_n$, 故 $\{a_n\}$ 单调递增, $\{b_n\}$ 单调递减. 且由 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] (\forall n \geq 1)$ 知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均有界. 于是由单调有界收敛原理可得 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛, 再由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. 现记 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, 则由单调有界收敛原理的证明知 $\xi = \sup_{n \geq 1} a_n = \inf_{n \geq 1} b_n$, 于是

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

若存在 $\eta \neq \xi$ 使得 $\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, 则对任意的 n 有 $b_n - a_n \geq |\xi - \eta|$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq |\xi - \eta|$, 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 矛盾. 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$.

定理 9 (Bolzano-Weierstrass 定理) 任一有界数列必存在收敛子列.

证明 设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列, 即存在实数 a_1, b_1 使得 $a_1 \leq x_n \leq b_1 (\forall n)$. 现将 $[a_1, b_1]$ 等分为两个区间 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 与 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, 则至少有一个区间含有数列 $\{x_n\}$ 中无穷多项, 我们将这个区间记作 $[a_2, b_2]$. 若这两个区间均含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 则任取其中一个作为 $[a_2, b_2]$. 接着将 $[a_2, b_2]$ 等分为两个区间 $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ 与 $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$, 并将含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项的一个区间记作 $[a_3, b_3]$. 以此类推可以得到区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 其满足:

(1) 对任意的 n 均有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$,

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$,

(3) 每个 $[a_n, b_n]$ 均含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项.

由闭区间套定理知存在 ξ 使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\},$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. 我们来证明 $\{x_n\}$ 的某个子列收敛于 ξ .



在 $[a_1, b_1]$ 中任取 $\{x_n\}$ 中的一项 x_{n_1} , 由于 $[a_2, b_2]$ 包含 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 故存在 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$. 以此类推可得 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k (\forall k \geq 1)$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, 故由夹逼定理知 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 ξ .

3.1.4 Cauchy 收敛准则

定义 8 (Cauchy 列) 设 $\{x_n\}$ 是一个数列. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$, 使得

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq n_\varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 是一个基本列或 *Cauchy 列* (*Cauchy sequence*).

定理 10 (Cauchy 收敛准则) 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 *Cauchy 列*.

证明 必要性: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$, 使得当 $n > n_\varepsilon$ 时有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $m, n > n_\varepsilon$ 时就有

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此 $\{x_n\}$ 是 *Cauchy 列*.

充分性: 首先证明 $\{x_n\}$ 有界. 由 $\{x_n\}$ 是 *Cauchy 列* 知, 存在正整数 N_0 , 使得对任意的 $m, n \geq N_0$ 有 $|x_m - x_n| < 1$, 特别地有

$$|x_m - x_{N_0}| < 1, \forall n \geq N_0.$$

从而 $|x_n| < |x_{N_0}| + 1 (\forall n \geq N_0)$. 若记

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_0-1}|, |x_{N_0}| + 1),$$

则对任意的 n 均有 $|x_n| \leq M$, 这就证明了 $\{x_n\}$ 的有界性.

下面来证 $\{x_n\}$ 收敛. 由 $\{x_n\}$ 的有界性及 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $k_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得对任意的

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \geq k_\varepsilon.$$

此外, 由 $\{x_n\}$ 是 *Cauchy 列* 知, 对上述的 ε 而言, 存在 $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m, n \geq n_\varepsilon$$

现取 $N = \max(k_\varepsilon, n_\varepsilon)$, 则 $N \geq k_\varepsilon$ 且 $n_N \geq N \geq n_\varepsilon$, 于是对任意的 $n \geq n_\varepsilon$ 有

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_N}| + |x_{n_N} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.



定理 11 (压缩映像原理) 设 I 是一个闭区间, $f: I \rightarrow I$ 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y|, \forall x, y \in I,$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ 是一个常数. 现任取一数 $x_0 \in I$, 并令 $x_{n+1} = f(x_n) (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$, 那么,

(1) 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 设 $\{x_n\}$ 的极限是 a , 则 $a \in I$ 且 a 是方程 $f(x) = x$ 的唯一解, 即 a 是不动点 (fixed point).

证明 (1) 由假设知

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \theta |x_n - x_{n-1}|,$$

由此递推的

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \theta |x_1 - x_0|, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

从而对任意的 $m > n$ 有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\theta^{m-1} + \theta^{m-2} + \cdots + \theta^n) |x_1 - x_0| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

由此可推出 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛.

(2) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 且 $x_n \in I (\forall n)$, 所以由 I 是闭区间以及极限的保序性知 $a \in I$. 此外, 由

$$|f(x_n) - f(a)| \leq \theta |x_n - a|$$

知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$, 于是在等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边同时取极限可得 $a = f(a)$.

最后证明不动点的唯一性. 假设 $b \in I$ 也是方程 $f(x) = x$ 的解, 那么

$$|a - b| = |f(b) - f(a)| \leq \theta |a - b|,$$

因此 $a = b$.

3.1.5 数列的上极限与下极限

定义 9 对于数列 $\{a_n\}$ 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$



3.1.6 Stolz 定理

定理 12 (Stolz 定理) 设 $\{y_n\}$ 自某项开始严格单调递增且趋于 $+\infty$, 那么对于任意的数列 $\{x_n\}$, 只要有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a,$$

就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$, 这里 a 可以是实数, $+\infty$ 或 $-\infty$.

§3.2 习题

练习 <3.1> (单调有界收敛定理)

设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且 $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2 (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0})$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

证明 由算术平均-几何平均不等式有: $x_n + \frac{1}{x_n} \geq 2$, 又 $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$, 故 $x_{n+1} < x_n$. 因为 $\{x_n\}$ 为正数列, 故 $x_{n+1} > 0$, $\frac{1}{x_n} < x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$, 即 $x_n > \frac{1}{2}$.

由单调有界收敛原理知, $\{x_n\}$ 收敛;

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 因为 $a > 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$ 存在. 注意到 $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$, 由极限的保序性有: $a + \frac{1}{a} \leq 2$, 由算术平均-几何平均不等式有 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (当且仅当 $a = 1$ 时取等),

故 $a = 1$, 即 $\{x_n\}$ 极限为 1.

即证

练习 <3.2> (压缩映像原理)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0})$, 证明: 数列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 收敛并求其极限.

证明 由已知得,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \frac{\frac{a_n}{b_n} + 2}{\frac{a_n}{b_n} + 1} (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

设 $\frac{a_n}{b_n} = x_n$, 则 $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}$, 且 $x_1 = 1$.

设 $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$, 则 f 是从 $[1, 2]$ 到 $[1, 2]$ 的映射, 且 $\forall x, y \in [1, 2]$,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x-y}{(x+1)(y+1)} \right| \leq \frac{1}{4} |x-y|.$$

由压缩映像原理得 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a = \frac{a+2}{a+1}$. 解得 $a = \pm\sqrt{2}$, 又 $a \in [1, 2]$, 故 $a = \sqrt{2}$.

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.



即证

练习 <3.3> (上极限与下极限)

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均有界, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

只讨论 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$, 剩余部分同理.

方法一

证明 $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, 有

$$\inf_{k \geq n} (x_k + y_k) \geq \inf_{k \geq n} x_k + \inf_{k \geq n} y_k.$$

在不等号两侧同时取极限, 由极限的保序性知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$$

故有

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

即证.

方法二

分析: 考虑上极限是所有极限点中的最大者, 下极限是所有极限点中的最小者.

证明 已知 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 有界, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

取其子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, 再取其子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$, 满足 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = a$; 对于有界数列 $\{y_n\}$, 取其子列 y_{n_k} , 由 Bolzano - Weierstrass 定理, 存在 $\{y_{n_{k_j}}\}$, 满足

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_{k_j}} = d \leq b; \text{ 对于相同的 } j, \text{ 有 } \lim_{j \rightarrow \infty} (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}) \leq a + b$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}) \leq a + b.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$ 取其子列, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} + y_{n_k} = c$, 再取其子列, 有 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}} = c$.

故有 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = c - d$.

$$\left. \begin{aligned} c - d &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ d &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = (c - d) + d \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$



练习 <3.4> (上极限与下极限)

设 $\{x_n\}$ 是一个正数列, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证明 证明: 只证明该式中第一个不大于号成立.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$. 则结论显然成立.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = M > 0$. 则对任意 $\varepsilon \in (0, M)$ 存在 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $\frac{x_{n+1}}{x_n} > M - \varepsilon$

所以 $n > N$ 时有:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n+1}}{x_N} > (M - \varepsilon)^{n-N}$$

也有 $\sqrt[n]{x_n} > \sqrt[n]{x_N \cdot (M - \varepsilon)^{n-N}}$

两边同时取下极限有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_N \cdot (M - \varepsilon)^{n-N}} = M - \varepsilon$

又由 ε 的任意性, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \geq M$

注记

该不等式说明: 在判别正项级数的敛散性时, *Cauchy* 判别法比 *d' Alembert* 判别法适用范围更广.

该不等式同时说明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = a$, 即 *d' Alembert* 判别法虽然不如 *Cauchy* 判别法强, 但并非没有用处, 当 $\sqrt[n]{x_n}$ 的结构较复杂时, 使用 *d' Alembert* 判别法有时会更方便.

练习 <3.5> 设 $y_n = x_n + 2x_{n+1}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. 证明: 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{y_n\}$ 也收敛.

证明 证明: 由 $\{y_n\}$ 收敛知 $\{y_n\}$ 有界. 故 $\exists M \in \mathbb{R}$. 使得 $|y_n| \leq M (\forall n)$ 且 $|x_1| \leq M$ 故有 $|x_2| = \left| \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}x_1 \right| \leq \frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2}|y_1| = M$. 类似可由 $|x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_n| + |y_n|$ 证明 $|x_n| \leq M (\forall n)$, 所以

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 2(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}).$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \{x_n\} \text{ 收敛}$$

即证



练习 <3.6> 试证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

证明 取 $x_n = \frac{n^n}{n!}$, 则 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1 + \frac{1}{n})^n$. 由练习 4 结论知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = e$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.



第四章 级数

§4.1 基础知识

定义 10 (级数) 设 $\{u_n\}$ 是一个数列, 我们引入形式的记号

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

并称之为无穷级数, 或简称级数. 称 u_n 为该级数的通项.

定义 11 (级数收敛性) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个级数, 我们记

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

并称之为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 个部分和. 若部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛于 S , 则称级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 并称 S 为该级数的和, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

此时称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

为该级数的余和. 此外, 如果 $\{S_n\}$ 发散, 我们就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

接下来介绍一些级数的基本性质.

定理 13 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, 则对于任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛.



定理 14 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

定理 15 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对其添加括号所得的级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$

仍收敛, 且和不变. 换句话说, 若 $\{n_k\}_{k \geq 0}$ 是一个严格单调递增的非负整数序列, 其中 $n_0 = 0$, 并记

$$v_k = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} u_j, \quad \forall k \geq 1,$$

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

定理 16 沿用命题 3 的记号, 若在给 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加括号时每个括号内的项都有相同的符号, 那么当 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 且两个级数的和相同.

定理 17 (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是: 对于任意的 $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, 均存在 $n_\epsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$, 使得对任意的 $m > n > n_\epsilon$ 均有

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \epsilon$$

4.1.1 正项级数

正项级数指的是级数的每一项都是非负的, 而正项级数有着许多种判断收敛性的方法, 掌握这些判别法是本节的重点. 主要的判别法有如下

比较判别法及其变形: P84-85



柯西判别法: P85

达朗贝尔判别法: P86

拉比判别法: P87

高斯判别法: P89

4.1.2 任意项级数

任意项级数指的是通项有正有负的级数, 本节中主要研究的是形如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 的级数的敛散性, 并基于阿贝尔求和来给出一些判别法, 掌握阿贝尔求和的技巧和这些判别法是本节的重点.

阿贝尔求和公式: P93

阿贝尔判别法: P94

狄利克雷判别法: P95

莱布尼兹判别法: P96

4.1.3 绝对收敛与条件收敛

一个级数绝对收敛指的是它的通项加上绝对值后形成的级数收敛, 可以证明绝对收敛的级数一定收敛; 这也引出了另一个概念——条件收敛, 指的是该级数收敛但是并不绝对收敛. 在本节中, 主要讨论绝对收敛和条件收敛的级数的一些性质.

定义 12 (级数重排) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个级数, 若 $\sigma: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ 是双射, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个 重排.

绝对收敛与条件收敛的级数在重排后有不同的性质, 这就是狄利克雷重排定理和黎曼重排定理.

定理 18 (狄利克雷) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项重排后得到的级数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 也绝对收敛, 且它的和与原级数的和相同.

定理 19 (黎曼) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则对任意的 A (可以是实数, $+\infty$ 或 $-\infty$), 均可



将 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项重排, 使得重排后的级数的和为 A .

4.1.4 级数的乘法

本节主要考虑两个级数相乘的操作.

定义 13 (柯西乘积) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个级数, 定义

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l,$$

称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 的柯西乘积.

定义 14 (狄利克雷乘积) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个级数, 定义

$$c_n = \sum_{kl=n} a_k b_l,$$

称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 的狄利克雷乘积.

但是对于柯西乘积和狄利克雷乘积, 都无法从原级数的敛散性确定乘积级数的敛散性, 但是关于乘积敛散性有如下两个结论.

定理 20 (柯西) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛, 他们的和分别为 U, V , 则将 $a_i b_j (i, j \geq 0)$ 按任意方式排列所得的级数皆绝对收敛, 且和为 UV .

定理 21 (梅尔滕斯) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均收敛, 且其中至少有一个绝对收敛, 则它



们得到柯西乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 也收敛, 且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

4.1.5 三角函数

本节主要使用级数来定义三角函数并证明其相关性质, 并引入复数的辐角, 指数运算等概念.

定义 15 (三角函数) 设 $x \in \mathbb{R}$, 定义

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

由达朗贝尔判别法可知 $\sin$ 与 $\cos$ 都是实值函数, 称 $\sin$ 为正弦函数, 称 $\cos$ 为余弦函数.

可以验证这样定义的三角函数有着同中学的三角函数一致的性质, 其中重要的部分可以参考教科书 P108 的命题 6.3, 以及 P110-112, 关于三角函数的级数性质可以参考 P113.

4.1.6 重要级数

定理 22 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 的级数被称为几何级数, 它在 $|q| < 1$ 时收敛, 在 $|q| \geq 1$ 时发散.

定理 23 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s \in \mathbb{R}$) 在 $s \leq 1$ 时发散, 在 $s > 1$ 时收敛. 类似的有级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ ($s \in \mathbb{R}$) 在 $s \leq 1$ 时发散, 在 $s > 1$ 时收敛.



§4.2 习题

练习 <4.1> 考虑超几何级数的敛散性, α, β, γ, x 均为正实数,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} \cdot x^n$$

证明

记右边级数的通项为 u_n , 作渐进展开有

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{(n+\gamma)(n+1)}{x(n+\alpha)(n+\beta)} = \frac{(1+\frac{\gamma}{n})(1+\frac{1}{n})}{x(1+\frac{\alpha}{n})(1+\frac{\beta}{n})} \\ &= \frac{1}{x} \cdot (1+\frac{\gamma}{n})(1+\frac{1}{n})(1-\frac{\alpha}{n}+o(\frac{1}{n \log n}))(1-\frac{\beta}{n}+o(\frac{1}{n \log n})) \\ &= \frac{1}{x} \cdot (1+\frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n}+o(\frac{1}{n \log n})) \end{aligned} \quad (4.1)$$

作下面讨论:

(1) $x \neq 1$, 则由达朗贝尔判别法知级数当 $x > 1$ 时该级数发散, $x < 1$ 时该级数收敛.

(2) $x = 1$, 由拉比判别法知 $\gamma > \alpha + \beta$ 时该级数收敛, $\gamma < \alpha + \beta$ 时该级数发散; 由 Gauss 判别法知 $\gamma = \alpha + \beta$ 该级数发散.

注记

1. 在 n 趋向于正无穷时

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} &= 1 - \frac{k}{n} + o(\frac{1}{n \log n}) \\ \Leftrightarrow 1 &= 1 - \frac{a^2}{n^2} + o(\frac{1}{n \log n}) \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{n^2} &= o(\frac{1}{n \log n}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

2. 练习题. 考虑下面级数的敛散性, $a, b > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{n!n^b}$$

($b \leq a$ 发散, $b > a$ 收敛)



练习 <4.2> (Abel 变换的应用)

(1)(Du Bois-Reymond 判别法) 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(2)(Dedekind 判别法) 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 绝对收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明

(1) 记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 部分和为 S_n , 记 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 部分和为 B_n , $\{B_n\}$ 收敛. 则 $S_n = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$, 对这两项分别证明收敛即可.

注意到 $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1})$, 故 $\{a_n\}$ 收敛, 进而有 $\{a_n B_n\}$ 收敛

另一方面, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ 的部分和为 T_n . 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛, 故存在 $M > 0, \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, |B_n| \leq M$.

所以 $|(a_n - a_{n+1}) B_n| \leq M |a_n - a_{n+1}|$, 由数 $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, 使用比较审敛法, 推出 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ 绝对收敛, 则 $\{T_n\}$ 收敛

综上, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(2) 沿用上一问记号. 实际上证明 $\{T_n\}$ 收敛的时候我们只用到了 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 部分和有界的性质, 所以沿用上一题思路即可证明.

注记

练习题: $0 < u_n \leq \frac{1}{\log^2 n}$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) \log n$ 收敛

练习 <4.3> (估计) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\{b_n\}$ 为严格递增的正数列且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = o(b_n)$$

证明



对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N_1 , 当 $m > n > N_1$ 时, 有 $|\sum_{n < k \leq m} a_k| < \epsilon$; 又由 $\{b_n\}$ 为无穷大量推出存在 $N_2 > N_1$, 使得当 $n > N_2$ 时, $\frac{|\sum_{k=1}^N a_k b_k|}{b_n} < \epsilon$ 当 $n > N_2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{|\sum_{k=1}^n a_k b_k|}{b_n} &\leq \frac{|\sum_{k=1}^N a_k b_k|}{b_n} + \frac{|\sum_{k=N+1}^n a_k b_k|}{b_n} \\ &\leq \epsilon + \frac{\epsilon(|b_{N+1}| + 2|b_n|)}{b_n} < 4\epsilon \end{aligned} \quad (4.3)$$

即证.

练习 <4.4> (级数的 Cauchy 乘积) 假设 $a_0 = b_0 = 1$, 当 $n = 1$ 时

$$a_n = -(\frac{3}{2})^n \quad b_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}})$$

证明: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均发散, 但他们的 Cauchy 乘积绝对收敛.

证明

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均发散显然, 设两者 Cauchy 乘积为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

$$\begin{aligned} c_n &= a + a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{\substack{k+l=n \\ k, q \geq 1}} a_k b_l \\ &= (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\frac{3}{2})^n - \sum_{l=1}^{n-1} (\frac{3}{2})^{n-1}(2^l + \frac{1}{2^{l+1}}) \\ &= (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - \sum_{l=1}^{n-1} (2^l + \frac{1}{2^{l+1}}) - \frac{3}{2}) \\ &= (\frac{3}{2})^{n-1} \cdot \frac{3}{2^{n+1}} = (\frac{3}{4})^n \end{aligned} \quad (4.4)$$

故由几何级数性质得 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

注记

1. 该题举出了书上定理 5.6 逆命题不成立的一个例子.

2. 练习题: $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = ?$

PS:(其实我们已经知道这等于 $e \cdot \frac{1}{e}$)



练习 <4.5> 证明两角和的正弦公式, 余弦公式.

证明

运用 Cauchy 乘积的定义, 有

$$\begin{aligned}
 & \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
 &= \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2k+1} y^{2l} + \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2k} y^{2l+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\sum_{k+l=n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2l)!} x^{2k+1} y^{2l} + \sum_{k+l=n} \frac{(2n+1)!}{(2k)!(2l+1)!} x^{2k} y^{2l+1} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} x^{2k} y^{2n+1-2k} \right) \quad (4.5) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k y^{2n+1-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+y)^{2n+1} \\
 &= \sin(x+y)
 \end{aligned}$$

对于余弦两角和公式可类似证明.

练习 <4.6> 设 z_1, z_2 是两个非零复数, 且存在 $\delta \in (0, 1)$ 使得 $|\arg z_1 - \arg z_2| \leq \delta$.

证明:

$$|z_1 + z_2| \geq (1 - \delta)(|z_1| + |z_2|)$$

证明

记 $\alpha = \arg z_1, \beta = \arg z_2$, 那么 $|z_1| + |z_2| = z_1 e^{-i\alpha} + z_2 e^{-i\beta} = (z_1 + z_2) e^{-i\alpha} + z_2 (e^{-i\beta} - e^{-i\alpha})$, 进而由 C 上的三角形不等式有,

$$\begin{aligned}
 |z_1| + |z_2| &\leq |z_1 + z_2| + |z_2| |e^{-i\beta} - e^{-i\alpha}| \\
 &= |z_1 + z_2| + |z_2| |e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}| \\
 &= |z_1 + z_2| + |z_2| |2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}| \\
 &\leq |z_1 + z_2| + \delta |z_2|
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

即证.



注记

该不等式在幅角主值相差不大的情况下对两个复数之和给出了一个下界估计.

练习 <4.7> (三角函数形式的级数的部分和有界)

设 $\beta \neq 2k\pi$, 则有,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(\alpha + k\beta) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\beta}{2} \right|}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(\alpha + k\beta) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\beta}{2} \right|}$$

证明 运用积化和差公式, 有,

$$\sum_{k=1}^n \sin(\alpha + k\beta) = \frac{\sin \frac{n\beta}{2} \sin(\alpha + \frac{n+1}{2}\beta)}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^n \cos(\alpha + k\beta) = \frac{\sin \frac{n\beta}{2} \cos(\alpha + \frac{n+1}{2}\beta)}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

则命题得证.

注记

练习题: 判断下面级数的敛散性,

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin^2 n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$

提示: 对于 1, 显然我们不能直接使用狄利克雷判别法. 我们可以令 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n \sin^2 n$, 对 b_n 使用二倍角公式, 分偶数和奇数依此说明 b_n 部分和有界 (使用练习 <4.7> 结论), 再使用狄利克雷判别法即可.

对于 2, 对分子运用积化和差公式, 再使用狄利克雷判别法即可.



第五章 函数的极限

§5.1 基础知识

5.1.1 函数极限的定义与性质

定理 24 (有界性) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在 x_0 的去心邻域, 使得 $f(x)$ 在该去心邻域内有界.

定理 25 (极限的保序性) 对于同一极限过程, 同一极限过程设 $\lim f(x) = a, \lim g(x) = b$,

(1) 若 $a < b$, 则存在 x_0 的某去心邻域, 使得在该去心邻域内有 $f(x) < g(x)$;

(2) 若在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $a \leq b$.

定理 26 (四则运算) 同一极限过程的两个函数极限符合四则运算

定理 27 (夹逼定理) 设在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\lim f(x) = \lim h(x) = a$, 那么 $\lim g(x) = a$.

定理 28 (复合函数的极限) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, 且在 t_0 的某个去心邻域内有 $g(t) \neq x_0$, 则 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = a$.

定理 29 (Cauchy 收敛准则) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义, 那么 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 使得对于满足 $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ 及 $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ 的任意 x_1, x_2 均有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

定理 30 (Heine 归结原理) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件是:

对满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$ ($\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$) 的任意数列 $\{x_n\}$ 均有 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

证明 必要性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta.$$



对于这一 δ , 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 及 $x_n \neq x_0 (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0})$ 知存在 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得

$$0 < |x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n \geq N$$

于是当 $n \geq N$ 时便有 $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

充分性: 首先证明: 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均是趋于 x_0 的序列, 且 x_n 与 y_n 均不等于 $x_0 (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0})$, 则 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 必收敛于同一极限. 事实上, 可考虑数列 $\{z_n\}$, 其中

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & 2 \nmid n, \\ y_{\frac{n}{2}}, & 2 \mid n. \end{cases}$$

则 $\{z_n\}$ 显然收敛于 x_0 , 且数列中每项均不等于 x_0 , 于是按照假设知 $\{f(z_n)\}$ 收敛, 因此 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 作为 $\{f(z_n)\}$ 的两个子列应收敛于同一极限.

现设对满足条件的 $\{x_n\}, \{f(x_n)\}$ 均收敛于 A , 我们来证明 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限. 若不然, 则必存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, 均存在 x_n 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$, 于是得到一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}, x_n \neq x_0 (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0})$, 它使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 不成立, 矛盾.

5.1.2 两个重要极限

定理 31 (两个重要极限)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (5.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (5.2)$$

5.1.3 函数的上极限与下极限

定义 16 函数的上极限和下极限类似于数列的上极限和下极限, 我们也可以相应地考虑函数的上、下极限. 在这里, 我们仅以函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的情况为例来进行讨论.

对 $\delta > 0$, 定义

$$\alpha(\delta) = \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x), \quad \beta(\delta) = \sup_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x)$$

则 $\alpha(\delta)$ 单调递增, $\beta(\delta)$ 单调递减. 下面我们来研究 $\alpha(\delta)$ 和 $\beta(\delta)$ 在 $\delta \rightarrow 0^+$ 时的性态, 分以下几种情形:

(I) 若 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有下界, 则有, 当 $\delta \rightarrow 0^+$ 时 $\alpha(\delta)$ 趋于某实数或



$+\infty$. 我们将 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha(\delta)$ 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 或 } \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

并称之为 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的下极限.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 的任一去心邻域内均无下界则 $\alpha(\delta) = -\infty (\forall \delta > 0)$, 此时记

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

(3) 若 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有上界, 则当 $\delta \rightarrow 0^+$ 时 $\beta(\delta)$ 趋于某实数或 $-\infty$.

我们将 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \beta(\delta)$ 记作

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 或 } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

并称之为 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的上极限.

(4) 若 $f(x)$ 在 x_0 的任一去心邻域内均无上界, 则 $\beta(\delta) = +\infty (\forall \delta > 0)$, 此时记

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

部分极限, 及相应上下极限性质 p125

5.1.4 无穷小量与无穷大量的阶

定义 17 (1) 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

那么就记作 $f(x) = o(g(x))$ (当 $x \rightarrow x_0$). 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时均为无穷小量, 则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小量, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的低阶无穷小量. (相应地, 无穷大量)

(2) 若存在非零实数 a , 使得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时均为无穷小量, 则称它们为同阶无穷小量. 特别的, 当 $a = 1$ 时, 把它们称为等价无穷小量. (相应地, 无穷大量)

(3) 若 $g(x)$ 恒取正值且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{g(x)} \in \mathbb{R}$$



换句话说, 存在常数 $C > 0$, 使在 x_0 的某去心邻域内有

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

则记 $f(x) = O(g(x))$ 或 $f(x) \ll g(x)$ (当 $x \rightarrow x_0$).

在计算某一极限时, 表达式中以因子出现的无穷小量可被与之等价的无穷小量替换. 也就是说, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量, 则当 $\lim h(x)f(x) = a$ 时也有 $\lim h(x)g(x) = a$ 成立.

5.1.5 连续函数

定义 18 若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 且有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续 (continuous), 否则就称 $f(x)$ 在 x_0 处间断 (discontinuous). 若 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续 (right continuous); 若 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续 (left continuous).

由命题 1.3 知, 在 x_0 处连续当且仅当在 x_0 处左连续且右连续.

5.1.6 间断点的类型

第一类间断点、可去间断点、第二类间断点 p135

5.1.7 闭区间上连续函数的性质

定理 32 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

证明 对任意的 $x \in [a, b]$, 由于 f 在 x 处极限存在, 故其必在 x 的某邻域内有界, 也即存在 x 的邻域 U_x 及实数 $M_x > 0$, 使得

$$|f(y)| \leq M_x, \quad \forall y \in U_x \cap [a, b].$$

注意到 $(U_x)_{x \in [a, b]}$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故由有限覆盖定理知存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ 使得

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$$

现取 $M = \max(M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n})$, 则对任意的 $y \in [a, b]$ 而言, 由于 y 必属于某个 U_{x_k} , 故而 $|f(y)| \leq M$. 这就证明了 f 在 $[a, b]$ 上有界.



定理 33 (零点定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$.

证明 不妨设 $f(a) < 0, f(b) > 0$.

下面利用反证法来证明, 反设不存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = 0$.

将区间 $[a, b]$ 等分为两个区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 则这两个区间中必有一个, 其两端点处的函数值异号, 我们将这一区间记作 $[a_1, b_1]$, 易见有 $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$. 将 $[a_1, b_1]$ 等分为两个区间, 则这两个区间中必有一个, 其两端点处的函数值异号, 我们将这一区间记作 $[a_2, b_2]$, 容易看出亦有 $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$. 以此类推可得区间列 $[a_n, b_n]$, 其满足:

(1) 对任意的 n 均有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]; n \rightarrow \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a)/2^n = 0$

(3) $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$.

由闭区间套定理知存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi, n \rightarrow \infty$$

于是由 f 的连续性及函数极限的保序性知

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \text{ 及 } f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0, n \rightarrow \infty$$

从而 $f(\xi) = 0$, 这与假设矛盾.

定理 34 (介值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意实数 α , 均存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = \alpha$.

证明 记 $g(x) = f(x) - \alpha$, 则 $g(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续, 且有

$$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - \alpha)(f(b) - \alpha) < 0,$$

于是由零点定理知存在 $c \in [a, b]$ 使得 $g(c) = 0$, 也即 $f(c) = \alpha$.

定理 35 (不动点原理) 设 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 为连续函数, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

证明 若 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$, 则命题已然得证.

否则, 必有 $f(a) - a > 0, f(b) - b < 0$, 于是对函数 $f(x) - x$ 应用零点定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) - \xi = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.



5.1.8 一致连续性

定义 19 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 使得对于满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的任意的 $x_1, x_2 \in I$ 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续 (uniformly continuous).

定理 36 (Heine-Cantor) 有界闭区间上的连续函数在该区间上一致连续.

证明 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 即对任意的 $\varepsilon > 0$ 及 $x \in [a, b]$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon, \forall y, z \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a, b].$$

注意到 $\left(\left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right) \right)_{x \in [a, b]}$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故由有限覆盖定理知存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ 使得

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^n \left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2} \right).$$

现取 $\delta = \min(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n})$, 我们来对满足条件 $|y - z| < \delta$ 的 $y, z \in [a, b]$ 证明 $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. 事实上, 由于必存在 k 使得 $\frac{y+z}{2} \in \left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2} \right)$, 故由三角形不等式知

$$|y - x_k| \leq \left| y - \frac{y+z}{2} \right| + \left| \frac{y+z}{2} - x_k \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} \leq \delta_{x_k},$$

同理可得 $|z - x_k| < \delta_{x_k}$, 于是有 $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.

5.1.9 无穷乘积

定理 37 (1) 若 $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

(2) $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} \log u_n$ 收敛

(3) 若 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ 收敛, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛

(4) 假设自某项开始有 $a_n > 0$ 或 $(a_n < 0)$, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散



§5.2 习题

练习 <5.1> 设 $f \in C([0, 1])$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$. 证明: $\exists x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f(x_0) = 0$, 并且对任意 $x \in [0, x_0)$, 有 $f(x) > 0$.

证明 设集合 $S = \{t \in (0, 1] : f(x) > 0, \forall x \in [0, t)\}$ 则由 f 的局部保号性知 $S \neq \emptyset$, 又由 $f(1) < 0$ 知 1 是 S 的上界;

由确界存在原理知 S 有上确界, 设 $\sup S = \xi$, 首先证明 $\xi \in S$

反设 $\xi \notin S$, 则由 S 的定义 $\exists x_1 \in [0, \xi)$ 使得 $f(x_1) \leq 0$, 则 x_1 也是 S 的一个上界且 $x_1 < \xi$ 这与定义矛盾, 故 $\xi \in S$

下证 $f(\xi) = 0$, 反设 $f(\xi) \neq 0$, 则由 $\mathbb{R}$ 的三歧性分情况讨论:

(1) $f(\xi) > 0$, 则由 f 的局部保号性知 $\exists \delta$ 使得 $\forall x \in [\xi, \xi + \delta)$ 有 $f(x) > 0$ 即 $\xi + \delta \in S$, 故 ξ 不是 S 的上界, 矛盾

(2) $f(\xi) < 0$, 则由 f 的局部保号性知 $\exists \delta$ 使得 $\forall x \in (\xi - \delta, \xi]$ 有 $f(x) < 0$ 即 $\xi - \frac{\delta}{2}$ 是 S 的上界, 矛盾

另解 设集合 $D = \{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$

由介值定理得 $D \neq \emptyset$, 又 0 是 D 的下界, 故可设 $\inf D = \eta$

由此得存在数列 $\{x_n\} \subseteq D$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \eta$, 由 $f \in C([0, 1])$ 知

$$f(\eta) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$$

下证 $\forall x \in [0, \eta)$ 有 $f(x) > 0$

反设 $\exists x \in [0, \eta)$ 有 $f(x) \leq 0$, 若 $f(x_1) = 0$, 矛盾.

若 $f(x_1) < 0$, 由介值定理知 $\exists x_2 \in (0, x_1)$ 使得 $f(x_2) = 0$, 矛盾.

练习 <5.2> 不存在 $f \in C(\mathbb{R})$ 使得 f 把有理数映为无理数, 把无理数映为有理数

证明 取 $a \in \mathbb{Q}$ 及 $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 满足 $b > a$, 则 $f(b) \neq f(a)$

记 $A = [a, b] \cap \mathbb{Q}$, $B = [a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

由于 A 是可数集, 所以 $f(A)$ 是至多可数集

又由于 $f(B) \subseteq \mathbb{Q}$

所以 $f(B)$ 是至多可数集故 $f([a, b]) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 是至多可数集

若 $f \in C(\mathbb{R})$ 则 $f([a, b])$ 是区间 ($f(a) \neq f(b)$ 不是单点集) $f([a, b])$ 不可数, 矛盾

练习 <5.3> 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $x \in [0, 1]$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 举例说明, 仅由 f 在 $[0, +\infty)$ 上的连续性推不出上述结论.



证明 由假定, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, y \in [0, +\infty)$ 且 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 取定充分大的 k , 使得 $\frac{1}{k} < \delta$.

现在把 $[0, 1]k$ 等分, 设其分点为 $x_i = \frac{1}{k} (i = 0, 1, \dots, k)$, 每个小区间的长度小于 δ . 对任意的 $x > 1, x - [x] \in [0, 1]$, 故必有 $x_i (i = 0, 1, \dots, k)$, 使得 $|x - [x] - x_i| < \delta$. 对每个 x_i , 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_i + n) = 0$.

故存在 N , 当 $n > N$ 时, $|f(x_i + n)| < \varepsilon/2$ 对 $i = 0, 1, \dots, k$ 都成立. 于是当 $x \geq N + 1$ 时, 有 $|f(x)| \leq |f(x_i + [x])| + |f(x) - f(x_i + [x])| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

仅由 f 的连续性推不出以上结论, 函数 $f(x) = \frac{x \sin \pi x}{1 + x^2 \sin^2 \pi x}$ 便是这样一个例子

练习 <5.4> 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \log \cos \sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \frac{x}{2})}{x} \quad \lim_{n \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \log \cos \sqrt{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \log \cos \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - \frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

练习 <5.5> 证明: 定义在 $\mathbb{R}$ 上非常值连续周期函数, 则其必有最小正周期

证明 设 f 满足题设条件, 并用 P 表示 f 的全部正周期所成之集. 首先证明 $\xi = \inf P$ 是 f 的周期, 也即 $f(x + \xi) = f(x) (\forall x \in \mathbb{R})$. 事实上, 由下确界的定义知存在 $T_n \in P (n = 1, 2, \dots)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \xi$, 于是对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$f(x + \xi) = f\left(x + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + T_n) = f(x).$$

其次证明 $\xi > 0$. 反设 $\xi = 0$, 则存在 $T_n \in P (n = 1, 2, \dots)$ 使得 $\lim T_n = 0$. 现任取 $n \rightarrow \infty$ $x \in \mathbb{R}$, 我们来证明 $f(x) = f(0)$. 对任意的 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, 由于必存在 $q_n \in \mathbb{Z}$ 使得 $x \in [q_n T_n, (q_n + 1)T_n)$, 所以

$$|q_n T_n - x| < T_n.$$

进而由 $\{T_n\}$ 收敛于 0 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n T_n = x$, 于是

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n T_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(0) = f(0).$$

这说明 f 是常值函数, 与前提条件矛盾.



练习 <5.6> 设函数 f, g 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 又在所有有理点上 $f(x) = g(x)$, 证明: $f(x) \equiv g(x)$.

证明 只要对 $\mathbb{R}$ 中的每个无理数 x 证明 $f(x) = g(x)$ 成立即可, 取有理数列 $\{r_n\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. 例如, 取无理数 x 的不足近似值 $r_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$, 则有

其中 $0 \leq \theta_{x,n} < 1$, 因此就有 $r_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$. 由于 $f(r_n) = g(r_n), n \in \mathbb{N}_+$, f, g 在点 x 连续, 利用连续性的第二定义, 就有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(r_n) = g(x).$$

练习 <5.7> 设 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 是一个单调递增函数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. 证明: 对任意 $a > 0$ 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

证明 首先容易证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} = 1 (\forall k \in \mathbb{Z}_{>0})$.

注意到当 $a \geq 1$ 时, 必存在 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $2^k \leq a < 2^{k+1}$, 故由单调性知

$$f(2^k x) \leq f(ax) \leq f(2^{k+1} x), \quad \forall x > 0,$$

再由夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y)}{f(\frac{y}{a})}$

练习 <5.8> 用 $\Pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数, 若已知

$$\Pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

证明: 第 n 个素数 p_n 满足 $p_n \sim n \log n$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时)

证明 由于 $\Pi(p_n) = n$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时 $p_n \sim n \log p_n$, 于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_ε 使得当 $n > n_\varepsilon$ 时有

$$1 - \varepsilon < \frac{p_n}{n \log p_n} < 1 + \varepsilon,$$

也即

$$\log n + \log \log p_n + \log(1 - \varepsilon) < \log p_n < \log n + \log \log p_n + \log(1 + \varepsilon).$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\log p_n \sim \log n$, 进而得到 $p_n \sim n \log n$.



练习 <5.9> 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right)$ 是否存在?

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1$
 $\Rightarrow$ 极限不存在

练习 <5.10> 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$



第六章 导数与微分

§6.1 基础知识

6.1.1 导数的定义与计算

定义 20 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处的某邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 并称上述极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$.
若上述极限值不存在, 则称 f 在 x_0 处不可导.

类似于函数极限, 同样有左导数和右导数的概念, 且导数有如下重要性质:

(1) 若 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续;

(2) 四则运算: P152

(3) 链式法则: P153

(4) 反函数求导: P154

(5) 参数方程的求导: P154

6.1.2 微分

定义 21 函数 f 在 x_0 处连续. 若存在 $A \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x), \quad \text{当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时,}$$

则称 f 在 x_0 处可微, 并称线性部分 $A\Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分.

微分与导数有一个重要联系如下:

定理 38 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微当且仅当 f 在 x_0 处可导, 且此时有

$$dy = f'(x_0)dx$$

微分一般主要用来估计计算. 它也有着加减乘除的性质, 可见于 P159.



6.1.3 高阶导数

定义 22 函数 f 在 x_0 某邻域内可导, 若导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处可导, 则称 f 在 x_0 处二阶可导, 并称 $f'(x)$ 在 x_0 处的导数为 f 在 x_0 处的二阶导数, 记作 $f''(x_0)$. 类似可以定义 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶导数, 记作 $f^{(n)}(x_0)$.

定义 23 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 的每一个点处均 n 阶可导, 则称 $f(x)$ 在 I 上 n 阶可导, 这时也将 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$ 记作 $y^{(n)}$. 此外, 若 $f^{(n)}(x)$ 在 I 上连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上 n 阶连续可导.

于导数计算类似, 高阶导数也有线性性, 并且函数的乘积的高阶导数计算有莱布尼兹公式: P162.

§6.2 习题

练习 <6.1> 设 $f(x) = \frac{p_1(x)p_2(x) \cdots p_m(x)}{q_1(x)q_2(x) \cdots q_n(x)}$, 其中 p_i, q_j 均可导且取值不等于 0, 求 $f'(x)$.

证明 利用对数导数: 设 f 不取 0 值, 则

$$(\log |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

练习 <6.2> 设 $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{(1+x) \log x}$, 求 $f'(x)$.

证明 取对数后用对数导数求导.P155

练习 <6.3> 设 $y = f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

证明 利用参数方程求导法则.P156



练习 <6.4> 证明黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, q > 0, (p, q) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

处处不可导.

证明 $R(x)$ 在有理点处不连续从而不可导. 对于无理数, 用无理数逼近时导数形式的极限为 0; 将无理数写作无限小数, 取 h_n 为其去掉小数点后前 n 位的数, 用它来逼近无理点时, 会得到其导数形式的极限不是 0, 这样的话 $R(x)$ 在无理点处也不可导.



第七章 微分中值定理及应用

这一章非常重要, 尤其第 1 节微分中值定理和第 2 节 Taylor 公式.

§7.1 基础知识

7.1.1 微分中值定理

极大(小)值、极大(小)值点、极值、极值点:p167.

定理 39 (Fermat) 若 $f(x)$ 在极值点 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

驻点: $f'(x_0) = 0$. p168.

定理 40 (Darboux) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

推论: 导函数的介值性. p168.

定理 41 (Rolle 定理) 设 $f(x)$ 满足:

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 上可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

定理 42 (Cauchy 中值定理) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $g'(x)$ 在 (a, b) 内恒不为 0, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

定理 43 (Lagrange 中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



7.1.2 泰勒公式

定理 44 (带 Peano 余项的 Taylor 公式) p172

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时有

$$f(x) = p_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

其中

$$p_n(x - x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

特别地, 当 $x = x_0$ 时为带佩亚诺余项的 **Maclaurin 公式** p172.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \text{当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时.}$$

Taylor 公式唯一性 p174.

定理 45 一般形式的余项

设 $f(x)$ 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导, $x, x_0 \in I$. 又设函数 $\psi(t)$ 在以 x, x_0 为端点的闭区间上连续, 在以 x, x_0 为端点的开区间上可导且导数不为 0. 那么, 存在位于 x 与 x_0 之间的实数 ξ 使得

$$f(x) = p_n(x - x_0) + \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n.$$

其中 p_n 如定理 1 中定义

定理 46 (带 Schlomilch-Roche 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$ 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导, $\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$. 则对任意的 $x, x_0 \in I$, 存在位于 x 与 x_0 之间的实数 ξ 使得

$$f(x) = p_n(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \alpha} (x - \xi)^{(n+1-\alpha)} (x - x_0)^\alpha$$

其中 p_n 如定理 1 中所定义.

定理 47 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$ 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导, 则对任意的 $x, x_0 \in I$, 存在位于 x 与 x_0 之间的实数 ξ 使得

$$f(x) = p_n(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

其中 p_n 如定理 1 中所定义.



实际使用时经常用这种形式:

$$f(x) = p_n(x - x_0) + O((x - x_0)^{n+1}).$$

定理 48 (带 Cauchy 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$ 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导, 则对任意的 $x, x_0 \in I$, 存在位于 x 与 x_0 之间的实数 ξ 使得

$$f(x) = p_n(x - x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0).$$

其中 p_n 如定理 1 中所定义.

7.1.3 函数的单调性与极值

定理 49 (单调性) 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 的内部可导, 则

- (1) $f(x)$ 在 I 上单调递增的充要条件是在 I 的内部有 $f'(x) \geq 0$;
- (2) $f(x)$ 在 I 上单调递减的充要条件是在 I 的内部有 $f'(x) \leq 0$;
- (3) 若在 I 的内部有 $f'(x) > 0$, 则 f 在 I 上严格单调递增;
- (4) 若在 I 的内部有 $f'(x) < 0$, 则 f 在 I 上严格单调递减.

定理 50 (严格单调) 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 的内部可导, 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增 (相应地, 严格单调递减) 的充要条件是:

- (1) 在 I 的内部有 $f'(x) \geq 0$ (相应地, $f'(x) \leq 0$);
- (2) 在 I 的任意开子区间上 $f'(x)$ 均不恒等于 0.

定理 51 (极值) 设 f 在 x_0 处连续, 在 x_0 的去心邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ 内可导, 则

- (1) 若在该去心邻域内总有 $(x - x_0)f'(x) \geq 0$, 则 x_0 为 f 的极小值点;
- (2) 若在该去心邻域内总有 $(x - x_0)f'(x) \leq 0$, 则 x_0 为 f 的极大值点.

定理 52 (极值) 设 $n \geq 2$, $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且有 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- (1) 若 n 为奇数, 则 x_0 不是 f 的极值点;
- (2) 若 n 为偶数, 则当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 x_0 为 f 的极小值点, 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 x_0 为 f 的极大值点.



7.1.4 函数的凸性

定义 24 (凸函数) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 若对任意的 $x_1, x_2 \in I$ 以及满足 $\alpha + \beta = 1$ 的任意正实数 α, β 均有

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),$$

则称 f 为 I 上的凸函数 (*convex function*). 若有

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),$$

则称 f 为 I 上的凹函数 (*concave function*).

如果上面两个不等式总有严格不等号成立, 那么就分别称 f 为严格凸函数和严格凹函数

定理 53 (凸函数) 设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 是 I 上的凸函数当且仅当

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

先对 2^n 证明, 再反向归纳.

定理 54 (凸函数) $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数当且仅当对 I 中任意三点 $x_1 < x < x_2$ 均有

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

当 $f(x)$ 在 I 的内部 (即不含 I 的端点) 可导时, 我们有下列较为方便的判定凸性的方法, 这一判定法从几何上看是颇为自然的.

定理 55 (凸函数) 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 的内部可导, 则 $f(x)$ 是 I 上的凸函数当且仅当 $f'(x)$ 在 I 的内部单调递增

若 $f(x)$ 二阶可导, 则可得到如下更简便的判别法.

定理 56 (凸函数) 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续可导, 且在 I 的内部二阶可导, 则 $f(x)$ 是 I 上的凸函数当且仅当在 I 的内部有 $f''(x) \geq 0$.

凸函数的一个重要应用是下面的 Jensen 不等式.



定理 57 (Jensen 不等式) 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 则对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ 以及满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ 的任意正实数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

定理 58 (算术平均-几何平均不等式) 假设 $\alpha_i, x_i (1 \leq i \leq n)$ 均是正实数, 并且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, 则

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

7.1.5 l'Hôpital 法则

定理 59 (l'Hôpital) 设 f, g 均在 (a, b) 内可导, $g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a, b))$, 又设 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$. 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 $\infty, +\infty, -\infty$), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理 60 (l'Hôpital) 设 f, g 均在 (a, b) 内可导, $g'(x) \neq 0 (\forall x \in (a, b))$, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$. 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 $\infty, +\infty, -\infty$), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

一般来说, 计算极限题目时优先尝试使用等价无穷小和 Taylor 公式, 但对于涉及复合函数的题目, 洛必达法则比较好用.

§7.2 习题

7.2.1 微分中值定理

练习 <7.1> 试举例说明:

- (1) Rolle's Theorem 的三个条件缺一不可;
- (2) 假设 Rolle's Theorem 的结论成立, 三个条件不必要.



(1) 证明 先证 f 在 $[a, b]$ 上连续不可缺少, 构造函数:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

则 f 在 $(0, 1)$ 上可导, 且 $f(0) = f(1)$, 但 f 在 $[0, 1]$ 上不连续 $\Rightarrow$ 不存在 ξ 使得 $f'(\xi) = 0$;
再证 f 在 (a, b) 可导不可缺少, 构造函数:

$$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$$

f 在 0 处不可导, $f'(x) = 1, x > 0$ 且 $f'(x) = -1, x < 0$ 故不存在 $\xi \in [-1, 1]$ 使得 $f'(\xi) = 0$

再证 $f(a) = f(b)$ 不可缺少, 构造函数:

$$f(x) = x, x \in [-1, 1]$$

显然 $f(-1) \neq f(1)$, 且 $\forall x \in [-1, 1], f'(x) = 1 \neq 0$.

即证

(2) 解 已知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$, 构造以下函数.

$$f(x) = x^3, x \in [-1, 1], f(1) \neq f(-1), \text{ 但 } f'(0) = 0;$$

$$f(x) = x^2, x \in [-1, 1]; f(1) = 0, f \text{ 在 } x = 0 \text{ 处间断, 但 } f'(0) = 0;$$

$$f(x) = |x| + x, x \in [-1, 1], f \text{ 在 } x = 0 \text{ 处不可导, 但 } f'(-\frac{1}{2}) = 0.$$

即证

练习 <7.2> 设 f 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. 证明: $\exists \xi \in (a, +\infty)$ 使 $f'(\xi) = 0$.

证明 补充定义 $f(a) = A$. 否则, 若 $\forall x \in (a, +\infty), f(x) = A$, 结论显然成立.

不妨设 $\exists x_0 \in (a, +\infty)$, 使 $f(x_0) > A$. 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall x > M$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $\varepsilon = f(x_0) - A$, 则 $\exists M, \forall x > M$, 有 $|f(x) - A| < f(x_0) - A$.

即 $f(x) - A < f(x_0) - A \Rightarrow f(x) < f(x_0), \forall x > M$.

取 x_1 为 $f(x)$ 在 $[a, M]$ 上的最大值点, 则 $x_1 \neq a$, 且 x_1 也是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最大值点, 其必为极大值点 $\Rightarrow$ 由 Fermat 定理, $f'(x_1) = 0$. 此 x_1 即所求 ξ .

即证

练习 <7.3> 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, x_0 是 f 在 (a, b) 内唯一的极值点. 证明: 若 x_0 是极大值点, 则 x_0 是 f 在 $[a, b]$ 上的最大值点.

证明 连续函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上必可取到最大值, 且最大值必为 $f(a), f(b), f(x_0)$ 中的一个.



反设 $f(a) > f(x_0)$. 由 x_0 是极大值点知, $\exists x_1 \in (a, x_0)$, 使 $f(x_1) < f(x_0)$.

由介值定理知, $\exists x_2 \in (a, x_1), x_3 \in (x_1, x_0)$, 使 $f(x_2) = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$, 且 $f(x_3) = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} = f(x_2)$.

但又由于 x_0 是唯一的极值点 $\Rightarrow \forall x \in (a, x_0), f'(x) \neq 0 \Rightarrow f$ 在 (a, x_0) 上必为单射, 这与 $f(x_2) = f(x_3)$ 矛盾, 故 $f(a) \leq f(x_0)$.

同理, $f(b) \leq f(x_0)$.

故 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的最大值, 即 x_0 是 f 在 $[a, b]$ 上的最大值点.

即证

练习 <7.4> 设 f 在区间 I 上可导, 证明: f' 在 I 上无第一类间断点.

证明 反设 f' 在 I 上存在第一类间断点 x_0 , 则对于 $\forall x \in (-\infty, x_0) \cap I$, 由 Lagrange 中值定理知:

$$\exists \xi \in (x_1, x_0), \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi).$$

两侧同时取极限得:

$$f'_-(x_0) = f(x_0).$$

同理有, $f'_+(x_0) = f(x_0) = f'_-(x_0)$.

即 f' 在 x_0 处连续, 与假设矛盾. 故 f' 在 I 上无第一类间断点.

即证.

练习 <7.5> (有限增量定理)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且存在常数 $M > 0$, 使得对 $\forall x \in (a, b)$, 有 $|f'(x)| \leq M$. 证明:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in [a, b].$$

证明 $\forall x, y \in (a, b)$, 由 Lagrange 定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}| = |f'(\xi)|$.

又 $\forall x \in (a, b), |f'(x)| \leq M \Rightarrow |f'(\xi)| \leq M$

从而 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

即证

7.2.2 泰勒公式



练习 <7.6> 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且对任意的 x 和 h , 有

$$f(x) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$

证明在 $\mathbb{R}$ 上有 $f''(x) \geq 0$.

证明 由带 Peano 余项的 Taylor 公式知, 当 $h \rightarrow 0$ 时

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2),$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2).$$

代入题设不等式即得 $f''(x) + o(1) \geq 0$, 再令 $h \rightarrow 0$ 便得 $f''(x) \geq 0$.

练习 <7.7> 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且有

$$f(0) = f(1) = 0, \min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1.$$

证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''(\xi) \geq 8$.

证明 设 a 是最小值点, 则 $a \in (0, 1)$, $f(a) = -1$ 且 $f'(a) = 0$. 于是由带拉格朗日余项的泰勒公式知, 存在 $\xi_1 \in (0, a)$ 及 $\xi_2 \in (a, 1)$ 使得

$$f(0) = f(a) + f'(a)(-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2$$

,

$$f(1) = f(a) + f'(a)(1-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-a)^2.$$

于是 $f''(\xi_1) = \frac{2}{a^2}$, $f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-a)^2}$, 从而

$$\max(f''(\xi_1), f''(\xi_2)) \geq \sqrt{\frac{2}{a^2} \cdot \frac{2}{(1-a)^2}} = \frac{2}{a(1-a)} \geq 8$$

练习 <7.8> 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $(-1, 1)$ 内任意阶可导, 并且对任意的 $x \in (-1, 1)$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 有

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!|x|.$$

证明 $f = g$.

证明 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)$ 于是

$$|h^{(n)}(x)| \leq n!|x| \Rightarrow |h^{(n)}(0)| \leq 0 \Rightarrow h^{(n)}(0) = 0, \forall n \geq 0$$



对 $\forall x \in (0, 1), h(x) = h(0) + h'(0)x + \dots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{h^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, 其中 $\xi \in (0, x)$

$$\text{故 } |h(x)| = \left| \frac{h^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leq |\xi| \cdot x^{n+1} \leq |x|^{n+2}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 得 $\lim_{x \rightarrow 0} |h(x)| = 0$, 对 $\forall x \in (0, 1)$ 成立, 故 $h(x) \equiv 0, x \in (0, 1)$

同理有, $h(x) \equiv 0, x \in (-1, 1)$

即 $f = g$.

练习 <7.9> 证明 e^2 是无理数

证明 15. 因为对任意的正整数 n 均有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

所以

$$7 < \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{40} < e^2 < \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{42} < 8,$$

故 $e^2 \notin \mathbb{Z}$. 反设存在互素的正整数 a, b 使得 $e^2 = \frac{a}{b}$, 则 $e = \frac{a}{b}e^{-1}$. 对于正偶数 $n = 2mb (m \in \mathbb{Z}_{>0})$, $\exists \xi \in (0, 1)$ 及 $\eta \in (-1, 0)$ 使得

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} = \frac{a}{b} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{e^\eta}{(n+1)!} \right)$$

两侧同时乘 $n!$ 可得

$$\frac{a}{b} \left(1 - \frac{e^\eta}{(n+1)} - \frac{e^\xi}{n+1} \right) \in \mathbb{Z}$$

注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时上式左边趋于 $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$, 故必可取到充分大的 n 使得上式左边不是整数, 从而矛盾.

练习 <7.10> 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \left(\cos \sqrt{\frac{b \log n}{n}} \right)^n$$

(3) 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散;

(4) 当 $a + \frac{b}{2} > 1$ 时收敛, 当 $a + \frac{b}{2} \leq 1$ 时发散;

练习 <7.11> 研究无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin n}{n^s} \right)$



解 当 $s > \frac{1}{2}$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^s} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^{2s}}$$

均收敛, 故由课本 7.2 节习题 20 的结论知此时无穷乘积收敛.

当 $0 < s \leq \frac{1}{2}$ 时, 为方便起见记 $a_n = \frac{\sin n}{n^s}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \log(1 + a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

进而由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \log(1 + a_n)]$ 发散. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$

发散于 $-\infty$, 所以当 $0 < s \leq \frac{1}{2}$ 时 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin n}{n^s}\right)$ 发散于 0.

7.2.3 函数的单调性与极值

练习 <7.12> 举例说明: 若 $f(x)$ 在 x_0 处任意阶可导, 且 $f^{(n)}(x_0) = 0, \forall n \geq 1$, 不能判定 x_0 是否为 f 的极值点

证明 取

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \end{cases}$$

归纳易证得, $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$, 其中 $p_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 为关于 $\frac{1}{x}$ 的多项式.

$f^{(n)}(0) = 0$, 但 0 显然不是极值点.

练习 <7.13> 设 $x_0 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n - \log(1 + x_n^2)$. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

证明 $x_{n+1} - x_n = -\log(1 + x_n^2) < 0$, 知 $\{x_n\}$ 单调递减. 又 x_n 有下界 0 ($x_n > \log(1 + x_n^2)$).

故由单调有界收敛原理, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

$$\xi = \xi - \log(1 + \xi^2) \Rightarrow \xi = 0$$



故我们有

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}(x_{n-1} - \log(1 + x_{n-1}^2))}{\log(1 + x_{n-1}^2)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - x_n \log(1 + x_n^2)}{x_n^2} \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + x_n^2)}{x_n} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

练习 <7.14> 证明: 函数 $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+p}$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调递减当且仅当 $p \geq \frac{1}{2}$.

证明 $f'(x) = f(x) \left(\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{x+p}{x(1+x)} \right)$.

现记 $g(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{x+p}{x(1+x)}$, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上严格单调递减当且仅当 $g(x) \leq 0$.

容易计算得到 $g'(x) = \frac{(2p-1)x+p}{(2p-1)x+p}$

(i) 当 $p \geq \frac{1}{2}$ 时 $g'(x) > 0 (\forall x > 0)$, 所以 g 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上单调递增, 从而

$$g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

(ii) 当 $p < \frac{1}{2}$ 时 $g'(x)$ 在 $\mathbb{R}_{>\frac{p}{1-2p}}$ 上取负值, 从而 g 在这一集合上严格单调递减, 所以在一集合上 $g(x) > \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

练习 <7.15> 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内可导且 $f'(x)$ 严格单调递增, 又设 $f(0) = 0$. 证明函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调递增.

证明 在 $(0, +\infty)$ 内有

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} (f'(x) - g(x)).$$

由 Lagrange 中值定理知存在 $\xi \in (0, x)$ 使得 $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\xi)$, 进而由 f' 的严格单调递增性知 $g'(x) > 0 (\forall x > 0)$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调递增.



练习 <7.16> 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内二阶可导, 在 I 内无零点, 且存在正实数 L 使得

$$f(x)f''(x) < Lf'(x)^2, \quad \forall x \in I.$$

证明: $|f(x)|$ 在 I 内无极小值点

证明 由介值定理知 $f(x)$ 在 I 上恒正或恒负. 若 x_0 是 $|f(x)|$ 的极值点, 则 x_0 必是 $f(x)$ 的极值点, 从而 $f'(x_0) = 0$, 进而有 $f(x_0)f''(x_0) < 0$. 下面分情况来讨论:

(i) 若 $f(x)$ 在 I 上恒正, 则 $f''(x_0) < 0$, 也即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{x - x_0} < 0$. 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$, 这意味着 $f(x)$ 在 $[x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0]$ 上严格单调递增, 从而 x_0 不是 $f(x)$ 的极小值点当然也不是 $|f(x)|$ 的极小值点.

(ii) 若 $f(x)$ 在 I 上恒负, 则同理可证 x_0 不是 $f(x)$ 的极大值点当然也不是 $|f(x)|$ 的极大值点.

7.2.4 函数的凸性

练习 <7.17>

研究下列函数在其定义域上的凸凹性区间:

(1) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 10$;

(2) $f(x) = x^2 \log x$;

(3) $f(x) = x + \sin x$;

(4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$;

(5) $f(x) = e^{-x^2}$;

(6) $f(x) = x \sin(\log x)$.

1. (1) 在 $(-\infty, \frac{2}{3}]$ 上是凹的, 在 $[\frac{2}{3}, +\infty)$ 上是凸的;

(2) 在 $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$ 上是凹的, 在 $[e^{-2}, +\infty)$ 上是凸的;

(3) 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 上是凹的, $[2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi]$ 上是凸的;

(4) 在 $(-1, +\infty)$ 内是凸的;

(5) 在 $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ 及 $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ 上是凸的, 在 $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ 上是凹的;

(6) 在 $[e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}]$ 内是凸的, 在 $[e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}]$ 上是凹的 ($k \in \mathbb{Z}$).

练习 <7.18> 设 $P(x)$ 是一个 n 次多项式, n 为奇数. 证明: $P(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数当且仅当 $n = 1$.



证明 若 $n = 1, P(x) = ax + b (a \neq 0)$, 则对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 以及正实数 $\alpha, \beta (\alpha + \beta = 1)$, 有

$$\begin{aligned} P(\alpha x_1 + \beta x_2) &= a(\alpha x_1 + \beta x_2) + b(\alpha + \beta) \\ &= \alpha(ax_1 + b) + \beta(ax_2 + b) \\ &\leq \alpha P(x_1) + \beta P(x_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数;

若 $P(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数;

不妨设 $P(x) = x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + \dots + a_1x + a_0$

若 $m \geq 1, P''(x) = (2m+1)(2m)x^{2m-1} + (2m)(2m-1)x^{2m-2} + \dots + a_2$

则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} P''(x) < 0$, 即存在充分大的 $M > 0$, 当 $x < -M$ 时,

$P''(x) < 0 \Rightarrow P(x)$ 在 $(-\infty, -M)$ 上为凹函数 $\Rightarrow$ 矛盾!

故 $m = 0$. 即 $P(x) = ax + b$, 也即 $P(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数当且仅当 $n = 1$.

练习 <7.19> 设 $x \in \mathbb{R}$ 且 $t \in [-1, 1]$, 证明 $e^{xt} \leq \cosh x + t \sinh x$.

证明 对任意给定的 $x, f(t) = e^{xt}$ 是 $[-1, 1]$ 上的凸函数, 因此当 $|t| \leq 1$ 时有

$$e^{xt} \leq \frac{1-t}{2} \cdot f(-1) + \frac{1+t}{2} \cdot f(1) = \cosh x + t \sinh x$$

练习 <7.20> 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的严格凸函数, 且 $x_0 \in (a, b)$ 为其一个极小值点, 证明: x_0 是 f 在 $[a, b]$ 上的唯一极小值点.

证明 反设 f 在 (a, b) 内还有一个异于 x_0 的极小值点 x_1 , 不妨设 $x_0 < x_1$, 则存在 $x_0 < \xi < \eta < x_1$ 使得

$$f(\xi) \geq f(x_0) \text{ 且 } f(\eta) \geq f(x_1)$$

从而 $\max(f(\xi), f(\eta)) \geq \max(f(x_0), f(x_1))$. 但由严格凸性知区间 (x_0, x_1) 内每个点处的函数值均小于 $\max(f(x_0), f(x_1))$, 矛盾.

练习 <7.21> 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 I 的任意有界闭子区间上有界.

证明 设 $[a, b] \subseteq I$. 首先, 对任意的 $\lambda \in [0, 1]$ 有

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leq \max(f(a), f(b))$$

因此 f 在 $[a, b]$ 上有上界. 其次, 对任意的 $x \in [a, b]$ 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{a+b-x}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(a+b-x)}{2} \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{\max(f(a), f(b))}{2},$$

故 $f(x) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \max(f(a), f(b))$, 从而 f 在 $[a, b]$ 上有上界.



练习 <7.22> 设 $f(x)$ 是 (a, b) 内的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

证明 设 $x_0 \in (a, b)$. 对 (a, b) 内满足 $x < x_0 < y$ 的任意两点 x, y 有

$$f(x_0) \leq \frac{y-x_0}{y-x} f(x) + \frac{x_0-x}{y-x} f(y),$$

令 $x \rightarrow x_0^-$ 可得 $f(x_0) \leq \varliminf_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. 另一方面, 对 (a, b) 内满足 $y < x < x_0$ 的任意两点 x, y 有

$$f(x) \leq \frac{x_0-x}{x_0-y} f(y) + \frac{x-y}{x_0-y} f(x_0)$$

令 $x \rightarrow x_0^-$ 可得 $\varlimsup_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$. 综上便得 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 类似可以证明 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 所以 f 在 x_0 处连续. 再由 x_0 的任意性知 f 在 (a, b) 内连续.

练习 <7.23> 设 $f(x)$ 是开区间 I 上的凸函数, $[a, b] \subseteq I$. 如果 $f(a)f(b) < 0$, 证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有且仅有一个零点.

证明 不妨设 $f(a) > 0, f(b) < 0$. 由上题知 $f \in C([a, b])$, 所以由介值定理知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 记 f 在 $[a, b]$ 上的零点的下确界为 c , 则 $c \in (a, b)$, 且由连续性知 $f(c) = 0$. 下证 f 在 (c, b) 内不为 0. 事实上, 对任意的 $\lambda \in (0, 1)$ 有 $f(\lambda c + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(c) + (1-\lambda)f(b) = (1-\lambda)f(b) < 0$

从而 f 在 (c, b) 内恒取负值, 进而得 c 是 f 在 $[a, b]$ 上的唯一零点.

7.2.5 l'Hôpital 法则

练习 <7.24> 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$

(1) $e^{-1}; (2) -\frac{e}{2}$

练习 <7.25> 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) + 2f(x)) = 0$, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

证明 由 l'Hôpital 法则知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} f(x)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x} f(x))'}{(e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f'(x) + f(x)) = 0$$



再利用题设极限式便得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.



鸣谢

编写：曹方涛，申玉凤，董宇欣，吴鸿，李康为，谢书翼；

排版：刘彦麟，崔逾岳；

审稿：崔逾岳，梅乐天，李叙醇.