

泛函分析课程笔记

写在前面的话

泛函分析是数学试验班大三上的专业必修课，难度较高。

为了防止概念混淆，在此说明：如果 A 是 B 的一个特殊情况，就称“ A 是 B ”（如“”）；如果如果 A 与 B 等价，就称“ A 当且仅当 B ”

目录

1 度量空间	3
1.1 压缩映射原理	3
1.2 完备化	14
1.3 列紧集	20
1.4 赋范线性空间	32
1.4.1 线性空间	32
1.4.2 线性空间上的距离	33
1.4.3 范数与 Banach 空间	36
1.4.4 赋范线性空间上的范数等价	40
1.4.5 最佳逼近问题	41
1.4.6 有穷维 B^* 空间的刻画	41
1.4.7 商空间	41
1.5 内积空间	50
Index	54

度量空间

1.1 压缩映射原理

Definition 1.1.1 ▶ 距离与度量空间

设 X 是一个非空集合, 在 X 上定义了一个双变量实值函数 $\rho(x, y)$, 使得 $\forall x, y, z \in X$ 满足

- (1) $\rho(x, y) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = y$;
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- (3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

称 ρ 是一个距离, 并称 (X, ρ) 为一个度量空间.

Remark

后续在欧式空间中, 始终使用欧式距离

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \quad (1.1.1)$$

Example 1.1.2 ▶ 空间 $C[a, b]$

区间 $[a, b]$ 上的所有连续函数所成之集记为 $C[a, b]$, 定义其上的一个距离为

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \quad (1.1.2)$$

此时 $(C[a, b], \rho)$ 是一个度量空间, 简记为 $C[a, b]$.

定义了距离这一概念, 我们便得以刻画将点与点之间的远近程度, 由此导出收敛这一概念.

Definition 1.1.3 ▶ 收敛

度量空间 (X, ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 如果满足 $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则称 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 或 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$.

Remark

在 $C[a, b]$ 中, 点列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 是指 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $x_0(t)$.

- 为什么此处规定需要一致收敛？如果改成收敛会如何？
一致连续这一性质保证了 $x_0(t)$ 的连续性，从而 $x_0 \in C[a, b]$. 仅满足收敛则不一定存在这个性质，例如令 $x_n(t) = t^n \in C[0, 1]$ ，则其逐点收敛至

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1, \\ 1 & t = 1. \end{cases}$$

此时 $x_0 \notin C[0, 1]$.

Definition 1.1.4 ▶ 依测度收敛

在测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 中， $\{f_n\}, f$ 均是复值可测函数，我们称 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f ，如果 $\forall \varepsilon > 0$ ，令 $E_n = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{M}$ ，有 $\mu(E_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

此处 $E_n \in \mathcal{M}$ 是由于 $[\varepsilon, \infty)$ 为 Borel 集，再结合可测函数定义即得.

考虑测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ，其中 μ 是有限测度. 取 X 上的复值可测函数 f, g ，定义双变量函数

$$\rho(f, g) := \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu \leq \int_X 1 d\mu = \mu(X) < \infty, \quad (1.1.3)$$

这是一个良定义，并且容易验证其为一个度量.

Proposition 1.1.5

在式 (1.1.3) 下， $\rho(f_n, f) \rightarrow 0 \iff \{f_n\}$ 依测度收敛至 f .

证明. **必要性：** 假设 $\{f_n\}$ 不依测度收敛至 f ，从而 $\exists \varepsilon_0 > 0, \sigma_0 > 0$ 以及集族 $\{E_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 满足 $\mu(E_{n_k}) \geq \sigma_0 (\forall k \in \mathbb{N})$ ，从而有

$$\rho(f_{n_k}, f) \geq \int_{E_{n_k}} \frac{|f_{n_k} - f|}{1 + |f_{n_k} - f|} d\mu \geq \int_{E_{n_k}} \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} d\mu = \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \mu(E_{n_k}) \geq \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \sigma_0 > 0,$$

故 $\rho(f_n, f) \not\rightarrow 0$ ，从而假设不成立，因此 $\{f_n\}$ 依测度收敛至 f .

充分性： 由 $\{f_n\}$ 依测度收敛至 f 可知， $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ ，使得当 $n > N$ 时有 $\mu(E_n) < \varepsilon$ ，此时有

$$\rho(f_n, f) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} (\chi_{E_n} + \chi_{E_n^c}) d\mu \leq \mu(E_n) + \int_{E_n^c} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \mu(X) < (1 + \mu(X))\varepsilon,$$

从而 $\rho(f_n, f) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

Definition 1.1.6 ▶ 闭集

(X, ρ) 中的子集称为**闭集**, 如果满足: $\forall \{x_n\} \subset E$, 若 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $x_0 \in E$.

- 此处的闭集 (为方便起见, 称为序列闭集) 与拓扑学上的闭集是什么关系?

在度量空间中, 这二者是等价的.

拓扑闭集 $\Rightarrow$ 序列闭集: 设 E 是拓扑闭集, 则 $X \setminus E$ 是开集. 设 $\{x_n\} \subset E$ 且 $x_n \rightarrow x_0$, 假设 $x_0 \notin E$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus E$, 但由收敛性可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时 $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$, 矛盾. 于是 $x_0 \in E$.

序列闭集 $\Rightarrow$ 拓扑闭集: 只要证明 $X \setminus E$ 是开集. 若否, 则存在 $x_0 \in X \setminus E$ 与 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \geq k, B(x_0, 1/n) \not\subset X \setminus E$, 即 $B(x_0, 1/n) \cap E \neq \emptyset$. 对每个 n 从该交集中取出一个元素 x_n , 则 $\rho(x_n, x_0) < 1/n$, 于是 $x_n \rightarrow x_0$, 这与序列闭集的定义矛盾. 于是 $X \setminus E$ 是开集.

Definition 1.1.7 ▶ 基本列 (Cauchy 列) 与完备性

度量空间 (X, ρ) 中的点列 $\{x_n\}$ 如果满足 $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0 (n, m \rightarrow \infty)$ (换句话说, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n \geq N$ 时, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$), 则称其为**基本列 (Cauchy 列)**. 如果一个空间中的所有基本列都是收敛的, 则称该空间是**完备的**.

这一定义拓展了数学分析中对 Cauchy 列的定义, 说明 Cauchy 列不一定是收敛的 (这里的收敛指收敛点在给定空间中).

Example 1.1.8

$(\mathbb{R}^n, \rho)$ 是完备的, 其中 ρ 同式 (1.1.1).

Example 1.1.9

$(C[a, b], \rho)$ 是完备的, 其中 ρ 同式 (1.1.2).

证明. 在 $(C[a, b], \rho)$ 中取 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall m, n \geq N$ 有

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是 $\forall t \in [a, b]$ 有

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m, n \geq N, \quad (1.1.4)$$

固定 t , 显然 $\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列, 从而存在 $x_0(t)$ 使得 $x_n(t)$ 逐点收敛至 $x_0(t)$. 在式 (1.1.4) 中, 令 $m \rightarrow \infty$, 则 $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$, 从而 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $x_0(t)$, 于是 $x_0(t)$ 也是连续函数. 综上, 这一 Cauchy 列是收敛的.

Definition 1.1.10 ▶ 连续映射

设 $T : (X, \rho) \rightarrow (Y, r)$ 是一个映射, 如果对于 X 中的任意点列 $\{x_n\}$ 与 x_0 有

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow r(Tx_n, Tx_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则称映射 T 是连续的.

Proposition 1.1.11

$T : (X, \rho) \rightarrow (Y, r)$ 连续 $\iff \forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in X, \exists \delta > 0$ 使得

$$\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow r(Tx, Tx_0) < \varepsilon \quad (1.1.5)$$

证明. 必要性: 若式 (1.1.5) 不成立, 则 $\exists x_0 \in X, \varepsilon > 0, \{x_n\} \subset X$ 使得 $\rho(x_n, x_0) < 1/n, r(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon (\forall n \in \mathbb{N})$, 从而 $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), r(Tx_n, Tx_0) \not\rightarrow 0$, 矛盾.

充分性: 设式 (1.1.5) 成立, 并且 $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时有 $\rho(x_n, x_0) < \delta$, 从而 $r(Tx, Tx_0) < \varepsilon$, 即 $r(Tx_n, Tx_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

在此介绍不动点问题的一个典型例子. 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \in (-\delta, \delta), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

将其化为积分形式

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [-h, h] \subset (-\delta, \delta), \quad (1.1.7)$$

其中 h 是待定参数. 显然 f 应是有界的, 即 $\exists M > 0$ 使得 $\forall (t, x) \in [-h, h] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 有 $|f(t, x)| \leq M$. 构造映射 $T : C[-h, h] \rightarrow C[-h, h]$ 满足

$$T(x(t)) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (1.1.8)$$

则将原问题转化为求映射 T 的不动点.

Definition 1.1.12 ▶ 压缩映射

考虑映射 $T : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$, 若 $\exists \alpha \in (0, 1)$, 满足 $\forall x, y \in X, \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$, 则称 T 是一个压缩映射.

Example 1.1.13

设 $I = [0, 1]$, $T : I \rightarrow I$ 是可微函数, 满足 $\forall x \in I$ 有

$$T(x) \in I, \quad |T'(x)| \leq \alpha < 1, \quad (1.1.9)$$

则 T 是压缩映射.

证明. 根据微分中值定理, $\forall x, y \in I, \exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$\rho(Tx, Ty) = |T(x) - T(y)| = |T(\theta x + (1 - \theta)y)(x - y)| \leq \alpha |x - y| = \alpha \rho(x, y).$$

- 根据定义显然可知, 如果 T 是压缩映射, 那么 T^2 也一定是压缩映射. 反之是否能从 T^2 是压缩映射得到 T 是压缩映射呢?

不能. 令 $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, 使得对于 $\varphi \in C[0, 1]$ 有

$$T\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt,$$

取常数函数 a, b , 则

$$\rho(Ta, Tb) = \max_{x \in [0, 1]} |(a - b)x| = |a - b| = \rho(a, b),$$

因此 T 不是压缩映射.

$$T^2\varphi(x) = T(T\varphi(x)) = \int_0^x T\varphi(u) du = \int_0^x \int_0^u \varphi(t) dt du,$$

从而有

$$\begin{aligned} \rho(T^2\varphi, T^2\psi) &= \max_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^x \int_0^u \varphi(t) - \psi(t) dt du \right| \\ &\leq \max_{x \in [0, 1]} \int_0^x \int_0^u \rho(\varphi, \psi) dt du \\ &= \rho(\varphi, \psi) \max_{x \in [0, 1]} \int_0^x u du = \frac{1}{2} \rho(\varphi, \psi) \end{aligned}$$

因此 T^2 是压缩映射.

下面我们将介绍泛函分析中基本且重要的一个原理——压缩映射原理.

Theorem 1.1.14 ▶ Banach 不动点定理——压缩映射原理

(X, ρ) 是完备的度量空间, T 是其上的一个压缩映射, 则 T 在 X 上存在唯一的不动点.

证明. **存在性:** 令 $x_0 \in X$. 在 X 上构造迭代序列 $x_{n+1} = Tx_n (n = 0, 1, 2, \dots)$, 则有

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0),$$

从而 $\forall n, p \in \mathbb{N}$ 有

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{i=1}^p \rho(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \leq \rho(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{n+i} = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0).$$

因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 设其收敛至 $x^* \in X$, 于是对迭代式 $x_{n+1} = Tx_n$ 两边同时取极限即得 $x^* = Tx^*$, 从而 T 有不动点 x^* .

唯一性: 假设 T 还存在不动点 y^* , 则有

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Tx^*, Ty^*) \leq \alpha \rho(x^*, y^*),$$

于是 $\rho(x^*, y^*) = 0, y^* = x^*$, 从而 T 的不动点唯一.

- 如果将条件改为 $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) (x \neq y)$, 不动点仍然存在吗? 不一定存在. 在 $\mathbb{R}$ 上定义

$$f(x) = x - \arctan x + \frac{\pi}{2},$$

则根据微分中值定理, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists \xi = \theta x + (1-\theta)y, \theta \in (0, 1)$ 使得

$$|f(x) - f(y)| = |x - y - (\arctan x - \arctan y)| = \frac{\xi^2}{1+\xi^2} |x - y| < |x - y|,$$

此时 $f(x)$ 满足条件, 但若 $f(x) = x$, 则 $\arctan x = \pi/2$, 此时显然没有符合条件的 x . 因此 $f(x)$ 没有不动点.

由此可见, $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ 这一条件太过宽泛, 如果想要在此条件下不动点存在, 就应该加强其他条件, 于是我们自然想到加强定义域的性质.

在证明定理之前, 我们先证明一个简单的不等式, 其在后续证明中会经常使用.

Lemma 1.1.15

在度量空间 (X, ρ) 中, $\forall a, b, c, d \in X$, 有

$$|\rho(a, b) - \rho(c, d)| \leq \rho(a, c) + \rho(b, d).$$

证明. 根据三角不等式

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, d) + \rho(d, b) \Rightarrow \rho(a, b) - \rho(c, d) \leq \rho(a, c) + \rho(b, d),$$

同理可得

$$\rho(c, d) - \rho(a, b) \leq \rho(b, d) + \rho(a, c)$$

综合两式即得结论.

Proposition 1.1.16

$M \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 配备度量 ρ . 考虑映射 $T : M \rightarrow M$, 并且 $\forall x, y \in M, x \neq y$ 有 $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$, 则 T 存在唯一不动点.

证明. 令 $f(x) = \rho(x, Tx), x \in M$, 下证 f 连续.

考虑点列 $\{x_n\} \subset M$ 满足 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 由紧性得 $x_0 \in M$. 从而当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$|f(x_n) - f(x)| = |\rho(x_n, Tx_n) - \rho(x, Tx)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(Tx_n, Tx) < 2\rho(x_n, x) \rightarrow 0,$$

因此 f 连续, 从而由最值定理可知, $\exists x^* \in M$ 满足 $f(x^*) = \min_{x \in M} f(x)$.

若 $f(x^*) = \rho(x^*, Tx^*) = 0$, 则 x^* 为 T 的不动点.

若 $f(x^*) = \rho(x^*, Tx^*) > 0$, 即 $x^* \neq Tx^*$, 则有

$$f(Tx^*) = \rho(Tx^*, T^2x^*) < \rho(x^*, Tx^*) = f(x^*),$$

于是由最小性得到矛盾.

若 $x^{**} \neq x^*$ 也是 T 的不动点, 则

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(Tx^*, Tx^{**}) < \rho(x^*, x^{**}),$$

由此得出矛盾, 从而 $x^{**} = x^*$.

综上, T 存在唯一的不动点.

利用 Banach 不动点定理, 我们可以证明其他定理, 下面给出两个例子.

Example 1.1.17 ▶ 常微分方程初值问题的解的局部存在唯一性

考虑问题 (1.1.5). 任取 $x, y \in C[-h, h]$, 则有

$$\begin{aligned}\rho(Tx, Ty) &= \max_{t \in [-h, h]} |T(x(t)) - T(y(t))| \\ &= \max_{t \in [-h, h]} \left| \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau - \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq h \cdot \max_{t \in [-h, h]} |f(t, x(t)) - f(t, y(t))|.\end{aligned}$$

此时设 f 对于 x 关于 t 一致满足局部 Lipschitz 条件, 即 $\exists \delta > 0, L > 0$, 使得 $\forall t \in [-h, h], \forall x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{N}(x_0, \delta)}$ 有

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|. \quad (1.1.10)$$

考虑完备子空间

$$\overline{B(x_0, \delta)} := \left\{ x \in C[-h, h] : \rho(x, x_0) = \max_{t \in [-h, h]} |x(t) - x_0| \leq \delta \right\},$$

令映射 $T : \overline{B(x_0, \delta)} \rightarrow C[-h, h]$, 并任取该子空间内的元素 x, y . 一方面有

$$\rho(Tx, Ty) \leq Lh \cdot \max_{t \in [-h, h]} |x(t) - y(t)| = Lh \cdot \rho(x, y),$$

此时令 $Lh < 1$. 另一方面, $\forall x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ 有

$$\rho(Tx, x_0) = \max_{t \in [-h, h]} \left| \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq hM,$$

此时令 $hM < \delta$. 因此令 $h < \min\{1/L, \delta/M\}$, 则 T 是压缩映射, 从而有唯一的不动点 x^* .

根据上述分析, 我们得到以下定理:

Theorem 1.1.18

设定义在 $[-h, h] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的函数 $f(t, x)$ 连续且满足条件 (1.1.10), 则当 $h < \min\{\delta/M, 1/L\}$ 时, 初值问题 (1.1.5) 在 $[-h, h]$ 上存在唯一的解.

Example 1.1.19 ▶ 隐函数定理

函数 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y))^T$, $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 是

(x_0, y_0) 的一个邻域. 设 f 与

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

均在 $U \times V$ 上连续, 并且

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad \det \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq 0,$$

则存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ 以及连续函数 $\varphi: U_0 \rightarrow V_0$ 满足

$$\begin{cases} f(x, \varphi(x)) = 0, x \in U_0, \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases}$$

证明. 首先记

$$M = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

则 M^{-1} 存在, 并记 $M^{-1} = (a_{ij})_{m \times m}$, $a_M = \max_{1 \leq i, j \leq m} |a_{ij}|$, 从而有

$$M^{-1}f = \begin{pmatrix} a_{11}f_1 + \cdots + a_{1m}f_m \\ \vdots \\ a_{m1}f_1 + \cdots + a_{mm}f_m \end{pmatrix}.$$

再令

$$T\varphi = \varphi(x) - M^{-1}f(x, \varphi(x)),$$

如果存在 φ^* 使得 $T\varphi^* = \varphi^*$, 则 $-M^{-1}f(x, \varphi^*(x)) = 0$, 也即 $f(x, \varphi^*(x)) = 0$. 由此将原定理转化为不动点问题.

令 $r > 0$, 考虑连续映射空间 $C(\overline{B(x_0, r)}, \mathbb{R}^m)$, 定义其上的距离为

$$\rho(\varphi, \psi) = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{x \in \overline{B(x_0, r)}} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|,$$

基于连续性, 对于 $A > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall 1 \leq i, j \leq m, \forall x \in \overline{B(x_0, r)}, y \in \overline{B(y_0, \delta)}$ 有

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y) - \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right| \leq A,$$

Lemma

完备空间的闭子集是一个完备子空间.

证明. 设 X' 是完备空间 X 的一个闭子集, $\{x_n\}$ 是 X' 中的 Cauchy 列, 显然 $\{x_n\}$ 也是 X 中的 Cauchy 列. 设 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 则由闭集性质得 $x_0 \in X'$, 因此 X' 是完备的.

考虑集合

$$X = \left\{ \varphi \in C(\overline{B(x_0, r)}, \mathbb{R}^m) : \varphi(x_0) = y_0, \varphi(x) \in \overline{B(y_0, \delta)} (\forall x \in \overline{B(x_0, r)}) \right\}.$$

则 X 是 $C(\overline{B(x_0, r)}, \mathbb{R}^m)$ 中的闭集, 从而是完备空间. $\forall \varphi, \psi \in X$ 有

$$\rho(T\varphi, T\psi) = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{x \in \overline{B(x_0, r)}} |\varphi_i - \psi_i - (M^{-1}f(x, \varphi))_i + (M^{-1}f(x, \psi))_i|.$$

由 $M^{-1}f$ 的表达式得, 对 $1 \leq i \leq m$ 有

$$(M^{-1}f(x, \varphi))_i - (M^{-1}f(x, \psi))_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} (f_k(x, \varphi) - f_k(x, \psi)),$$

根据微分中值定理, 对于 $1 \leq k \leq m$ 有

$$f_k(x, \varphi) - f_k(x, \psi) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x, \hat{y}^{(k)}) \cdot (\varphi_j - \psi_j),$$

其中 $\hat{y}^{(k)}$ 在 φ 与 ψ 之间. 代入上式并按照 $\varphi_k - \psi_k$ 合并同类项

$$(M^{-1}f(x, \varphi))_i - (M^{-1}f(x, \psi))_i = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, \hat{y}^{(j)}) \right) (\varphi_k - \psi_k),$$

分析外层求和的第 k 项可得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, \hat{y}^{(j)}) \right) (\varphi_k - \psi_k) &= - \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x_0, y_0) - \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, \hat{y}^{(j)}) \right) \right) (\varphi_k - \psi_k) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x_0, y_0) \right) (\varphi_k - \psi_k), \end{aligned}$$

注意到第二项 $\varphi_k - \psi_k$ 的系数恰好是 M^{-1} 的第 i 行行向量与 M 的第 k 列列向量的内积, 因此若 $k = i$ 则为 1, 否则为 0. 结合前文的连续性可得

$$\left| \chi_{\{i\}}(k) \cdot (\varphi_i - \psi_i) - \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, \hat{y}^{(j)}) \right) (\varphi_k - \psi_k) \right| \leq m \cdot A \cdot a_M \cdot |\varphi_k - \psi_k|,$$

其中 χ 是示性函数. 对 k 从 1 到 m 求和, 利用三角不等式得

$$|\varphi_i - \psi_i - (M^{-1}f(x, \varphi))_i + (M^{-1}f(x, \psi))_i| \leq m^2 \cdot A \cdot a_M \cdot \max_{1 \leq i \leq m} \max_{x \in \overline{B(x_0, r)}} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|,$$

再对不等式左边关于 $1 \leq i \leq m$ 与 $x \in \overline{B(x_0, r)}$ 取最大值, 即得

$$\rho(T\varphi, T\psi) \leq m^2 \cdot A \cdot a_M \cdot \rho(\varphi, \psi),$$

取合适的 A 即可使得 $m^2 \cdot A \cdot a \leq 1/2 < 1$.

下面证明 T 是 X 到自身的映射. 任取 $\varphi \in X$, 我们有

$$\rho(T\varphi, y_0) \leq \rho(T\varphi, Ty_0) + \rho(Ty_0, y_0) \leq \frac{1}{2}\rho(\varphi, y_0) + \max_{1 \leq i \leq m} \max_{x \in \overline{B(x_0, r)}} (M^{-1}f(x, y_0))_i,$$

利用 f 的连续性及 $f(x_0, y_0) = 0$, 取充分小的 r 即有

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{x \in \overline{B(x_0, r)}} (M^{-1}f(x, y_0))_i \leq \frac{\delta}{2}, \quad \rho(T\varphi, y_0) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

从而 $T\varphi \in X$.

综上, T 是一个压缩映射, 从而其在完备空间 X 中存在唯一满足条件的不动点 φ^* .

这一证明与上一定理的证明均用到了“先验”的方法, 对于某些参数先假设其存在并且使得条件成立, 再利用所给的条件得到其限制范围. 例如在本证明过程中, 我们首先设出 r, δ, A , 其中 A 与 δ 是相关的. 通过对压缩映射系数的限制, 我们得到了 A 的范围, 再在限制自身映射的条件下取充分小的 r 即得结果.

1.2 完备化

在压缩映射原理中, 对空间的完备性要求一般是不能省略的. 例如考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1},$$

其在 $[0, 1]$ 上的压缩映射, 存在唯一的不动点 x_0 , 则 f 在 $X = [0, 1] \setminus \{x_0\}$ 上不存在不动点. 受此过程的启发, 对于不完备的空间 (X, ρ) , 我们或许可以尝试在其中添加若干元素, 使其扩充为一个完备空间.

空间的完备性与其上的距离也有关.

例如, 在 $C[a, b]$ 上构造距离

$$\rho_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

考虑函数

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2), \\ n(x - 1/2) & x \in [1/2, 1/2 + 1/n), \\ 1 & x \in [1/2 + 1/n, 1], \end{cases}$$

当 $m > n \geq 2$ 且 $m, n \rightarrow \infty$ 时

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

因此 $\{\varphi_n\}$ 是 Cauchy 列. 设 $\varphi \in C[0, 1]$, 若有

$$\rho(\varphi_n, \varphi) = \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} \left| \varphi_n(x) - \varphi(x) \right| dx + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 |1 - \varphi(x)| dx \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

则当 $x \in [0, 1/2]$ 时 $\varphi(x) = 0$, 当 $x \in (1/2, 1]$ 时 $\varphi(x) = 1$, 这与 $\varphi \in C[0, 1]$ 矛盾.

或者考虑 $x_n(t) = t^n \in C[0, 1]$, 则当 $m, n \rightarrow \infty$ 时

$$\rho(x_n, x_m) = \int_0^1 |t^n - t^m| dt = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| \rightarrow 0,$$

于是 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 但其收敛到的元素不属于 $C[0, 1]$.

Definition 1.2.1 ▶ 等距同构

设 $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ 是度量空间, 若存在映射 $T: X_1 \rightarrow X_2$ 满足

(1) T 是满射,

(2) $\forall x, y \in X_1, \rho_1(x, y) = \rho_2(Tx, Ty)$,

则称 $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ 是等距同构的, T 称为等距同构映射, 简称为等距同构.

由 (2) 可知 T 还是单射, 从而是一个双射.

Remark

在等距同构的度量空间中, 与距离有关的性质 (例如收敛性) 是相同的, 因此在某种意义下可以认为它们是 “相同” 的. 如果度量空间 (X_1, ρ_1) 与 (X_2, ρ_2) 的子空间 (X'_2, ρ_2) 等距同构, 我们就称 (X_1, ρ_1) 可以嵌入 (X_2, ρ_2) , 记为 $(X_1, \rho_1) \hookrightarrow (X_2, \rho_2)$, 并且认为前者是后者的一个子空间.

Definition 1.2.2 ▶ 稠密子集

设 (X, ρ) 是度量空间, 如果集合 $E \subset X$ 满足 $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in E$ 使得 $\rho(x, y) < \varepsilon$, 则称 E 是在 X 中的稠密子集.

这一定义也说明 X 中的任意一点可由稠密子集 E 中的点列充分逼近.

Example 1.2.3

设 $P[a, b]$ 为 $[a, b]$ 上全体多项式所成之集, 由 Weierstrass 逼近定理可得其是 $C[a, b]$ 的稠密子集.

Definition 1.2.4 ▶ 完备化空间

给定度量空间 (X, ρ) , 如果存在度量空间 (Y, r) 满足

- (1) $(X, \rho) \subset (Y, r)$,
- (2) (Y, r) 是任何以 (X, ρ) 为子空间的完备度量空间的子空间,

则称 (Y, r) 是 (X, ρ) 的完备化空间.

换句话说, 完备化空间是包含原空间的最小的完备空间. 这一定义类似于 “由 $\mathcal{E}$ 生成的 σ -代数”.

Proposition 1.2.5

(X_1, ρ_1) 是完备度量空间, 并且 $X \subset X_1$ 是稠密子集, 则 X_1 是 X 的完备化空间.

证明. 根据稠密性, $\forall x_0 \in X_1, \exists \{x_n\} \subset X$ 使得 $\rho_1(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\{x_n\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列, 从而也是 X 中的 Cauchy 列. 若 (X_2, ρ_2) 也是以 (X, ρ) 为子空间的完备度量空间, 则 $\rho_1|_{X \times X}$ 与 $\rho_2|_{X \times X}$ 等距同构, 于是 $\{x_n\}$ 是 X_2 中的 Cauchy 列, 因此存在 $\widehat{x_0} \in X_2$ 使得 $\rho_2(x_n, \widehat{x_0}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

假设 $\exists \{z_n\} \subset X$ 使得 $\rho_1(z_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且 $\exists \overline{x_0} \in X_2$ 使得 $\rho_2(z_n, \overline{x_0}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则

当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned}\rho_2(\widehat{x_0}, \overline{x_0}) &\leq \rho_2(\widehat{x_0}, x_n) + \rho_2(x_n, z_n) + \rho_2(z_n, \overline{x_0}) \\ &= \rho_2(\widehat{x_0}, x_n) + \rho(x_n, z_n) + \rho_2(z_n, \overline{x_0}) \\ &\leq \rho_2(\widehat{x_0}, x_n) + \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, z_n) + \rho_2(z_n, \overline{x_0}) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

因此 $\overline{x_0} = \widehat{x_0}$, 即 $\widehat{x_0}$ 不依赖于 $\{x_n\}$ 的选取.

构造映射 $T: X_1 \rightarrow X_2$ 满足 $Tx_0 = \widehat{x_0}$. 任取 $y_0 \in X_1, \exists \{y_n\} \subset X$ 使得 $\rho_1(y_n, y_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 从而有

$$\rho_1(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, y_n) = \rho_2(\widehat{x_0}, \widehat{y_0}) = \rho_2(Tx_0, Ty_0),$$

于是 T 是等距同构映射, 从而 (X_1, ρ_1) 与 (X_2, ρ_2) 的一个子空间等距同构, 则 (X_1, ρ_1) 是 (X_2, ρ_2) 的子空间.

综上, X_1 是 X 的完备化空间.

Theorem 1.2.6

每个度量空间都有完备化空间, 并且在等距同构意义下是唯一的.

证明. **存在性:** (1.1) 考虑度量空间 (X, ρ) , 记 X 中的所有 Cauchy 列所成之集为 X_0 , 定义关系 $\{x_n\} R \{y_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. 显然 R 是一个等价关系, 记所有等价类所成之集为 X_1 , 并且 $\forall \xi, \eta \in X_1$, 任取 $\{x_n\} \in \xi, \{y_n\} \in \eta$, 定义

$$\rho_1(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n). \quad (1.2.1)$$

下面证明这是一个良定义. 根据命题 1.1.15, 有

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty,$$

因此 $\{\rho(x_n, y_n)\}$ 是 Cauchy 列, 从而定义右侧极限存在. 再取 $\{x'_n\} \in \xi, \{y'_n\} \in \eta$, 即 $\{x_n\} R \{x'_n\}, \{y_n\} R \{y'_n\}$, 则有

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

因此 $\rho_1(\xi, \eta)$ 的值与 Cauchy 列的选取无关. 综上即得式 (1.2.1) 是良定义.

根据定义, ρ_1 是具有对称性的非负函数. 一方面有

$$\rho_1(\xi, \eta) = 0 \iff \rho(x_n, y_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \iff \{x_n\} R \{y_n\} \iff \xi = \eta,$$

另一方面, 取 $\{z_n\} \in \zeta \in X_1$, 则有

$$\rho_1(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n) = \rho_1(\xi, \zeta) + \rho_1(\zeta, \eta),$$

因此 ρ_1 是一个距离, (X_1, ρ_1) 是度量空间.

(1.2) $\forall x \in X$, 以 ξ_x 表示包含各项全为 x 的序列的等价类, 所成之集记为 X' , 则有 $X' \subset X_1$. 构造映射 $T: X \rightarrow X', x \mapsto \xi_x$, 显然 T 是满射, 并且有

$$\rho(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, y) = \rho_1(\xi_x, \xi_y) = \rho_1(Tx, Ty),$$

于是 $(X', \rho_1), (X, \rho)$ 等距同构, 从而 $(X, \rho) \hookrightarrow (X_1, \rho_1)$.

$\forall \xi \in X_1, \forall \varepsilon > 0$, 取 $\{x_n\} \in \xi, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n, m > N$ 有 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$, 此时固定 $M > N$, 则有

$$\rho_1(\xi, \xi_{x_M}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_M) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

综上, X' 在 X_1 中稠密, 也即 X 在 X_1 中稠密.

(1.3) 设 $\{\xi^{(n)}\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列. 由稠密性可知, $\forall \xi^{(n)} \in X_1, \exists \overline{\xi^{(n)}} \in X'$ 满足 $\rho_1(\xi^{(n)}, \overline{\xi^{(n)}}) < 1/n$. 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时

$$\rho_1(\overline{\xi^{(n)}}, \overline{\xi^{(m)}}) \leq \rho_1(\overline{\xi^{(n)}}, \xi^{(n)}) + \rho_1(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) + \rho_1(\xi^{(m)}, \overline{\xi^{(m)}}) < \frac{1}{n} + \rho_1(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) + \frac{1}{m} \rightarrow 0,$$

因此 $\{\overline{\xi^{(n)}}\}$ 是 X' 中的 Cauchy 列. 根据 (1.2) 中定义的 T , 对每个 $\xi^{(n)}, \exists x_n \in X$ 使得 $Tx_n = \xi^{(n)}$, 于是 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 因此 $\exists \xi \in X_1$ 使得 $\{x_n\} \in \xi$, 此时有

$$\rho_1(\xi^{(n)}, \xi) \leq \rho_1(\xi^{(n)}, \overline{\xi^{(n)}}) + \rho_1(\overline{\xi^{(n)}}), \xi),$$

再取 $\{x_n, \dots, x_n, \dots\} \in \overline{\xi^{(n)}}, \{x_1, \dots, x_k, \dots\} \in \xi$, 则有

$$\rho_1(\xi^{(n)}, \xi) < \frac{1}{n} + \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

也即 $\xi^{(n)} \rightarrow \xi \in X_1 (n \rightarrow \infty)$, 因此 (X_1, ρ_1) 是完备的.

综上, 结合命题 (1.2.5) 即得 X_1 是 X 的完备化空间.

(2) 假设还存在完备空间 (X_2, ρ_2) 使得 X 与 X_2 的稠密子空间 X'' 等距同构, 则 X'' 与 X' 等距同构.

令 $\varphi: X'' \rightarrow X'$ 是等距同构映射. 根据稠密性, $\forall u \in X_2$, 存在 $\{u_n\} \subset X''$ 使得 $\rho_2(u_n, u) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 于是 $\{\varphi(u_n)\}$ 是 X' 中的 Cauchy 列, 因此存在 $\xi \in X_1$ 使得 $\rho_1(\varphi(u_n), \xi) \rightarrow 0$.

令 $\Phi: X_2 \rightarrow X_1, \varphi(u) = \xi$. 若还存在 $\{v_n\} \in X''$ 使得 $\rho_2(v_n, u) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则存在 $\eta \in X_1$ 使得 $\rho_1(\varphi(v_n), \eta) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 于是有

$$\rho_1(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(\varphi(u_n), \varphi(v_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(u_n, v_n) = 0,$$

因此 $\Phi(u) = \xi$ 与 $\{u_n\}$ 的选取无关, 从而映射 Φ 是良定义.

$\forall \xi_0 \in X_1$, 根据稠密性, 存在 $\{\xi_n\} \subset X'$ 使得 $\rho_1(\xi_n, \xi_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\{\varphi^{-1}(\xi_n)\}$ 是 X'' 中的 Cauchy 列, 从而又存在 $u_0 \in X_2$ 使得 $\rho_2(\varphi^{-1}(\xi_n), u_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 此时即有 $\Phi(u_0) = \xi_0$, 因此 Φ 是满射.

类似 Φ 的构造过程, $\forall u, w \in X_2$, 存在 X'' 中的 Cauchy 列 $\{u_n\}, \{w_n\}$ 分别收敛至 u, w , 并且存在 $\xi, \zeta \in X_1$ 使得 $\varphi(u_n) \rightarrow \xi, \varphi(w_n) \rightarrow \zeta (n \rightarrow \infty)$, 此时有

$$\rho_2(u, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(u_n, w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(\varphi(u_n), \varphi(w_n)) = \rho_1(\xi, \zeta) = \rho_2(\Phi u, \Phi w),$$

综上, Φ 是等距同构映射, 也即 X_1, X_2 等距同构.

$$\begin{array}{ccc} \{\varphi(u_n)\} & \longrightarrow & \xi \\ X' & \hookrightarrow & X_1 \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \Phi \\ X'' & \hookrightarrow & X_2 \\ \{u_n\} & \longrightarrow & u \end{array}$$

Example 1.2.7

$P[a, b]$ 按式 (1.1.2) 定义的距离的完备化空间是 $C[a, b]$.

Example 1.2.8

$C[a, b]$ 按式 (1.2.1) 定义的距离的完备化空间是 $L^1[a, b]$.

Example ▶ 习题 1.2.1

考虑无穷实数 (或复数) 序列 $x = \{\xi_1, \dots, \xi_n, \dots\}$, 所有序列所成之集记为 S . 取 $y = \{\eta_1, \dots, \eta_n, \dots\} \in S$, 定义函数

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|},$$

则其为一个距离, 并且 (S, ρ) 是完备的度量空间.

证明. 正定性与对称性显然, 下证三角不等式. 考虑函数

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0,$$

因此 $f(t)$ 严格单调递增. 取 $z = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n, \dots\}$, 则有

$$\frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} = \frac{|\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \eta_i|} \leq \frac{|\xi_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \zeta_i|} + \frac{|\zeta_i - \eta_i|}{1 + |\zeta_i - \eta_i|},$$

由此可得 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Lemma

在 S 中取 $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots\}$, $x = \{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots\}$, 则 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \iff \forall i \in \mathbb{N}, \xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i (n \rightarrow \infty)$.

证明. **必要性:** 由 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 可得, $\forall \varepsilon > 0, \forall i \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时有

$$\frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \leq 2^i \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

因此 $\forall i \in \mathbb{N}, |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon$.

充分性: $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon,$$

再由条件可得 $\forall i \in \{1, \dots, M\}, \exists N_i \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N_i$ 时有 $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon$. 令 $N = \max_{1 \leq i \leq M} N_i$, 则当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x) &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \\ &\leq \sum_{i=1}^M \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

取 Cauchy 列 $\{x_n\} \subset S$, 其中 $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots\}$, 则 $\forall n, p \in \mathbb{N}, \rho(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 从而由引理可得 $\forall i \in \mathbb{N}, |\xi_i^{(n+p)} - \xi_i^{(n)}| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\{\xi_i^{(n)}\}$ 是 $\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) 中的 Cauchy 列, 从而 $\forall i \in \mathbb{N}, \exists \xi_i$ 使得 $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i$. 再令 $x = \{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots\} \in S$, 则由引理得 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 (S, ρ) 完备.

1.3 列紧集

Definition ▶ 有界集

在度量空间 (X, ρ) 中, 子集 A 称为是**有界的**, 如果 $\exists x_0 \in X, r > 0$ 使得 $A \subset B(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$.

根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 有界无穷集合必有收敛子列, 但这一性质不能推广到任意度量空间中, 下面给出一个反例.

Example 1.3.1

在 $C[0, 1]$ 上考虑点列

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 1/n, \\ 1 - nt, & t < 1/n. \end{cases}$$

则 $\{x_n\} \subset B(\theta, 2)^a$, 其中 θ 表示恒为 0 的函数, 但此时 $\{x_n\}$ 无收敛子列.

^a参考文献中此处为 $B(\theta, 1)$, 可能指闭球

证明. $\forall m, n \in \mathbb{N}$, 不妨设 $n > m$, 并记

$$\|x_m - x_n\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x_m(t) - x_n(t)|.$$

令 $t = 1/n$, 则有

$$\|x_m - x_n\| \geq \left| x_m\left(\frac{1}{n}\right) - x_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 - \frac{m}{n}.$$

任取子列 $\{x_{n_k}\}$, 对每个 k , 我们总可以选取充分大的 l 使得 $n_l > 2n_k$, 从而 $\|x_{n_k} - x_{n_l}\| > 1/2$, 因此该子列不收敛.

点列 $\{t^n\}$ 同样为一反例.

Definition 1.3.2 ▶ 列紧、自列紧与列紧空间

设 A 是度量空间 (X, ρ) 的子集. 若 A 中的任意点列在 X 中有收敛子列, 则称 A 是**列紧的**. 若这个子列还收敛到 A 中的点, 则称 A 是**自列紧的**. 若空间 X 是列紧的, 则称 X 为**列紧空间**.

Proposition 1.3.3

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 任意有界 (闭) 集是 (自) 列紧集.

Proposition 1.3.4

列紧空间中的任意 (闭) 子集都是 (自) 列紧集.

这说明闭的列紧集是自列紧集.

Proposition 1.3.5

列紧空间是完备的.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是列紧空间 (X, ρ) 中的 Cauchy 列, 于是存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 $x_0 \in X$.

Lemma ▶ 习题 1.2.2

在度量空间中, Cauchy 列是收敛列当且仅当其中存在收敛子列.

证明. 必要性显然, 下证充分性.

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X, ρ) 中的 Cauchy 列, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x_0 . 根据定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得当 $m, n > N$ 时有 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. 又由收敛性可得 $\exists K \in \mathbb{N}$, 使得当 $k > K$ 时有 $\rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon/2$. 选取充分大的 k_0 使得 $k_0 > K$ 且 $n_{k_0} > N$, 则当 $n > N$ 时有

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$.

由该引理即得 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 从而 (X, ρ) 是完备空间.

完备空间不一定是列紧空间, 例如 $\mathbb{R}$ 中的点列 $\{n\}$ 无收敛子列.

Definition 1.3.6 ▶ ε 网

设 M 是度量空间 (X, ρ) 的一个子集, $\varepsilon > 0, N \subset M$, 若 $\forall x \in M, \exists y \in N$ 使得 $\rho(x, y) < \varepsilon$, 则称 N 是 M 的 ε 网. 若 N 还是有穷集 (元素个数依赖于 ε), 则称其为 M 的有穷 ε 网.

由定义即得

$$M \subset \bigcup_{y \in N} B(y, \varepsilon).$$

Definition 1.3.7 ▶ 完全有界

若 $\forall \varepsilon > 0, M$ 都存在有穷 ε 网, 则称 M 是完全有界的.

完全有界集显然是有界集, 但有界集不一定是完全有界集.

在习题 1.3.3 中, 考虑平方可和的数列构成的集合 l^2 中的无穷子集 $E = \{e_k\}_{k=1}^\infty$, 其中

$$e_k = \{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots\},$$

这一集合显然是有界的, 但任意两个点之间的距离为 $\sqrt{2}$, 因此对于 $\varepsilon \in (0, \sqrt{2}/2)$, 任何半径为 ε 的球最多只能包含 E 中的一个点, 从而 E 不存在有穷 ε 网.

Theorem 1.3.8 ▶ Hausdorff

设 M 是度量空间 (X, ρ) 中的集合.

- (1) 若 M 是列紧集, 则 M 是完全有界集.
- (2) 若 (X, ρ) 还是完备的, 则 M 是列紧集当且仅当 M 是完全有界集.

证明. 只需证明 (1) 与 (2) 的充分性部分.

(1) 假设 M 不是完全有界集, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, M 没有有穷 ε_0 网.

任取 $x_1 \in M, \exists x_2 \in M$ 使得 $x_2 \in M \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$;

对 $x_1, x_2 \in M, \exists x_3 \in M$ 使得 $x_3 \in M \setminus (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))$;

对 $x_1, x_2, x_3 \in M, \exists x_4 \in M$ 使得 $x_4 \in M \setminus (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0) \cup B(x_3, \varepsilon_0))$;

.....

由此构造出点列 $\{x_n\}$, 其中 $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0 (\forall m \neq n)$, 于是 $\{x_n\}$ 没有收敛子列, 这与 M 的列紧性矛盾.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是 M 中的无穷点列.

在有穷 1 网中 $\exists y_1 \in M$, 使得 $\{x_n\}$ 存在无穷子列 $\{x_n^{(1)}\} \subset B(y_1, 1)$. 若不然, 由完全有界性可得 $\{x_n\}$ 是有穷点列.

在有穷 $1/2$ 网中 $\exists y_2 \in M$, 使得 $\{x_n^{(1)}\}$ 存在无穷子列 $\{x_n^{(2)}\} \subset B(y_2, 1/2)$;

在有穷 $1/3$ 网中 $\exists y_3 \in M$, 使得 $\{x_n^{(2)}\}$ 存在无穷子列 $\{x_n^{(3)}\} \subset B(y_3, 1/3)$;

.....

重复上述过程, 取点列 $\{x_k^{(k)}\}$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = [2/\varepsilon] + 1$, 从而 $\forall n > N, p \in \mathbb{N}$ 有

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \leq \rho(x_{n+p}^{(n+p)}, y_n) + \rho(y_n, x_n^{(n)}) < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

于是 $\{x_k^{(k)}\}$ 是 Cauchy 列, 在度量空间中收敛, 因此 M 是列紧的.

Definition 1.3.9 ▶ 可分性

一个度量空间有可数的稠密子集, 则称度量空间是**可分的**.

可数“的”稠密子集 $\neq$ 可数“个”稠密子集

Theorem 1.3.10

度量空间中的完全有界集是可分的.

证明. 设 M 是度量空间 (X, ρ) 中的完全有界集, 取 N_n 为 M 的有穷 $1/n$ 网, 并记 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$.
 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in M, \exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $1/n < \varepsilon$, 取 $y \in N_n \subset E$ 则有 $\rho(x, y) < 1/n < \varepsilon$. 因此 E 是 M 的可数稠密子集.

Definition 1.3.11 ▶ 紧性

在拓扑空间 X 中, 如果集合 M 的每个开覆盖都有有限的子覆盖, 则称集合 M 是紧的.

Theorem 1.3.12

在度量空间 (X, ρ) 中, M 是紧集当且仅当 M 是闭的列紧集, 也即当且仅当是自列紧集.

证明. **必要性:** 首先证明 M 是闭集, 只要证明 $X \setminus M$ 是开集. 任取 $x_0 \in X \setminus M$, 显然有

$$M \subset \bigcup_{x \in M} B\left(x, \frac{1}{2}\rho(x, x_0)\right),$$

由 M 的紧性可得, $\exists x_k \in M (k = 1, 2, \dots, n)$ 使得

$$M \subset \bigcup_{k=1}^n B\left(x_k, \frac{1}{2}\rho(x_k, x_0)\right) := \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \delta_k).$$

取 $\delta = \min_{1 \leq k \leq n} \delta_k$, 则 $\forall x \in B(x_0, \delta), \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有

$$\rho(x, x_k) \geq \rho(x_k, x_0) - \rho(x_0, x) > 2\delta_k - \delta \geq 2\delta_k - \delta_k = \delta_k.$$

因此 $B(x_0, \delta) \cap M = \emptyset$, 从而 $X \setminus M$ 是开集.

再证明 M 是列紧集. 假设 M 中存在点列 $\{x_n\}$ 没有收敛子列, 不妨设 x_n 是互异的 (若有有限项相同, 显然可以除去而不影响收敛子列的存在性; 若有无穷多项相同, 则其构成一串收敛子列),
 $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $S_n = \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots\}$, 则 S_n 不含收敛子列, 没有极限点, 从而是闭集, 也即 $X \setminus S_n$ 是开集. 然而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus S_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = X \supset M,$$

由 M 是紧集可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$M \subset \bigcup_{k=1}^N (X \setminus S_{n_k}) = X \setminus \bigcap_{k=1}^N S_{n_k},$$

任取 $m \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, \dots, n_N\}$, 于是由 $x_m \in M$ 且 $x_m \in S_{n_k} (k = 1, 2, \dots, N)$ 得出矛盾. 因此 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 从而 M 是列紧的.

综上, M 是闭的列紧集.

充分性: 假设 M 的一个开覆盖 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ 没有有限的子覆盖. 由于 M 列紧, 从而完全有界, 因此 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在有穷 $1/n$ 网 $N_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$, 从而有

$$M \subset \bigcup_{y \in N_n} B\left(y, \frac{1}{n}\right).$$

由假设可知, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in N_n$ 使得 $B(y_n, 1/n)$ 不能被有限个 G_λ 覆盖, 根据自列紧性可得存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛到点 $y_0 \in G_{\lambda_0}$, 从而 $\exists \delta > 0$ 使得 $B(y_0, \delta) \subset G_{\lambda_0}$. 此时取充分大的 k 使得 $n_k > 2/\delta$, 并且 $\rho(y_{n_k}, y_0) < \delta/2$, 则 $\forall x \in B(y_{n_k}, 1/n_k)$ 有

$$\rho(x, y_0) \leq \rho(x, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2} < \delta,$$

于是 $x \in B(y_0, \delta)$, 从而 $B(y_{n_k}, 1/n_k) \subset B(y_0, \delta) \subset G_{\lambda_0}$, 这与 $B(y_n, 1/n)$ 不能被有限个 G_λ 覆盖矛盾.

综上, M 是紧集.

设 (M, ρ) 是一个紧的度量空间, $C(M)$ 表示全体 $M \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续函数所成之集, 并在其上定义

$$d(u, v) = \max_{x \in M} |u(x) - v(x)|. \quad (1.3.1)$$

Proposition 1.3.13

$(C(M), d)$ 是完备度量空间.

证明. 首先证明是良定义. 任取 $u \in C(M)$, 对任意点列 $\{y_n\} \subset u(M)$, 总存在 $\{x_n\} \subset M$ 使得 $u(x_n) = y_n$. 由于 M 是紧集, 即是自列紧集, 从而存在子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in M (k \rightarrow \infty)$, 再由 u 的连续性得 $u(x_{n_k}) \rightarrow u(x_0) (k \rightarrow \infty)$. 令 $u(x_0) = y_0$, 则 $y_{n_k} \rightarrow y_0 \in u(M) (k \rightarrow \infty)$, 从而 $u(M) \subset \mathbb{R}$ 是自列紧集, 也即是紧集, 故是 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集. 由紧性可得, $\min u(M) = \alpha \in u(M), \max u(M) = \beta \in u(M)$, 因此 $\max_{x \in M} |u(x)|$ 存在, 从而式 (1.3.1) 右侧最值存在, 并且显然满足距离的定义, 因此 $(C(M), d)$ 是度量空间.

完备性证明同例 1.1.9 对 $C[a, b]$ 的证明.

M 的紧性不可省略, 否则令 $M = (0, 1), u(x) = 1/x$, 此时 $d(u, \theta)$ 不存在, 从而不是一个良定义.

Definition 1.3.14 ▶ 一致有界与等度连续

设 F 是 $C(M)$ 的子集, 若 $\exists M_1 > 0$ 使得

$$|\varphi(x)| \leq M_1 \quad (\forall \varphi \in F, \forall x \in M),$$

则称 F 是一致有界的. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon \quad (\forall \varphi \in F, \forall x_1, x_2 \in M, \rho(x_1, x_2) < \delta),$$

则称 F 是等度连续的.

在 $C(M)$ 中, 有界与一致有界是等价的.

Theorem 1.3.15 ▶ Arzelà-Ascoli

$F \subset C(M)$ 是列紧集当且仅当 F 一致有界且等度连续.

证明. 由定理 1.3.8(2) 与命题 1.3.13 可知, $F \subset C(M)$ 是列紧集当且仅当 F 完全有界.

必要性: $\forall \varepsilon > 0$, 取 F 的有穷 ε 网 $N_\varepsilon = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, 则有

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n B(\varphi_i, \varepsilon),$$

令 $M_1 = \max\{d(\varphi_i, \varphi_j) : 1 \leq i, j \leq n\}$. $\forall \varphi \in F, \exists i, j$ 使得 $\varphi \in B(\varphi_i, \varepsilon), \theta \in B(\varphi_j, \varepsilon)$, 此时有

$$d(\varphi, \theta) \leq d(\varphi, \varphi_i) + d(\varphi_i, \varphi_j) + d(\varphi_j, \theta) < M_1 + 2\varepsilon,$$

因此 F 一致有界.

根据连续性, $\exists \delta > 0$ 使得当 $\rho(x_1, x_2) < \delta$ 时有

$$|\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n.$$

$\forall \varphi \in F, \exists \varphi_k \in N_\varepsilon$ 使得 $d(\varphi, \varphi_k) < \varepsilon$, 故 $\forall x_1, x_2 \in M, \rho(x_1, x_2) < \delta$ 有

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| &\leq |\varphi(x_1) - \varphi_k(x_1)| + |\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x_2)| + |\varphi_k(x_2) - \varphi(x_2)| \\ &< 2d(\varphi, \varphi_k) + \varepsilon < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

因此 F 等度连续.

充分性: 由等度连续可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall \varphi \in F$, 当 $\rho(x, x') < \delta$ 时 $|\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon/3$. 取紧集 M 的有穷 δ 网 $N_\delta = \{x_1, \dots, x_n\}$, 并构造映射 $T: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足

$$T\varphi = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))^T.$$

记 $\tilde{F} = T(F) \subset \mathbb{R}^n$, 由一致有界可得 $\exists M_1 > 0$ 使得 $\forall \varphi \in F, \forall x \in M$ 有 $|\varphi(x)| \leq M_1$, 于是

$$|T\varphi| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^2} \leq \sqrt{n} \max_{x \in M} |\varphi(x)| \leq \sqrt{n} M_1,$$

故 $\tilde{F}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, 从而是列紧集, 也即完全有界. 取 $\tilde{F}$ 的有穷 ε 网 $\tilde{N}_\varepsilon = \{T\varphi_1, \dots, T\varphi_m\}$, 则 $\forall \varphi \in F, \exists T\varphi_k \in \tilde{N}_\varepsilon$ 满足 $\rho_n(T\varphi, T\varphi_k) < \varepsilon/3$, 其中 ρ_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的距离. 任取 $x \in M, \exists x_r \in N_\delta$ 使得 $\rho(x, x_r) < \delta$, 此时有

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi_k(x)| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_r)| + |\varphi(x_r) - \varphi_k(x_r)| + |\varphi_k(x_r) - \varphi_k(x)| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \rho_n(T\varphi, T\varphi_k) < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 F 存在有穷 ε 网 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$, 再由 ε 的任意性可得 F 完全有界.

Example 1.3.16

设集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开凸集, M_1, M_2 是两个给定的正数, 则集合

$$F = \{\varphi \in C^1(\bar{\Omega}) : |\varphi(x)| \leq M_1, |\text{grad } \varphi(x)| \leq M_2\}$$

是 $C(\bar{\Omega})$ 上的列紧集, 其中 $C^1(\bar{\Omega})$ 表示 $\bar{\Omega}$ 上的连续可微函数所成之集.

证明. 显然 F 一致有界.

$\forall \varphi \in F, x_1, x_2 \in \bar{\Omega}$, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (x_1 - x_2) \cdot \text{grad } \varphi(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2),$$

从而有

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq M_2 \rho_n(x_1, x_2),$$

因此 F 是等度连续的.

综上, F 是列紧集.

下面介绍 l^p 空间及其相关性质.

Definition ▶ l^p 空间

设 $x = \{\xi\}_{i=1}^\infty$, 其中 $\forall i, \xi_i \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$. 设对 $p \in [1, \infty)$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty,$$

则所有满足该性质的 x 所成之集为 l^p . 令 $y = \{\eta_i\} \in l^p$, 定义

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

于是 (l^p, ρ) 是度量空间, 称为 l^p 空间.

设 $x = \{\xi_i\} \in l^p, y = \{\eta_i\} \in l^p, p > 1$, 则有

$$|\xi_n \pm \eta_n|^p \leq (|\xi_n| + |\eta_n|)^p \leq 2^p (\max\{|\xi_n|, |\eta_n|\})^p \leq 2^p (|\xi_n|^p + |\eta_n|^p),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \pm \eta_n|^p \leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right) < \infty,$$

因此 $x \pm y \in l^p$.

下面验证该定义中的 ρ 确实符合距离的定义, 在证明之前首先给出需要用到的不等式.

Example ▶ Young 不等式

设 $a, b \geq 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

等号成立当且仅当 $a = b$.

证明. 考虑函数 $f(x) = x^m, x \geq 1, m \in (0, 1)$, 则 $\exists \xi \in (1, x)$ 使得

$$x^m - 1 = m\xi^{m-1}(x - 1) \leq m(x - 1),$$

等号成立当且仅当 $x = 1$. 此时不妨设 $u \geq v > 0$, 并令 $x = \frac{u}{v}$, 代入不等式并整理得

$$u^m v^{1-m} \leq mu + (1 - m)v,$$

等号成立当且仅当 $u = v$. 再令 $m = \frac{1}{p}, 1 - m = \frac{1}{q}, a = u^{\frac{1}{p}}, b = v^{\frac{1}{q}}$ 即得结论.

Example ▶ Hölder 不等式

设 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 取 $x = \{\xi_i\} \in l^p, y = \{\eta_i\} \in l^q$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

等号成立当且仅当存在常数 c_1, c_2 满足 $\forall i, c_1 |\xi_i|^p = c_2 |\eta_i|^q$.

证明. x 或 y 各项均为 0 时, 不等式显然成立. 于是令

$$u_n = \frac{|\xi_n|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad v_n = \frac{|\eta_n|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}},$$

根据 Young 不等式有

$$u_n v_n \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|\xi_n|^p}{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|\eta_n|^q}{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q},$$

$$|\xi_n \eta_n| \leq \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{|\xi_n|^p}{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|\eta_n|^q}{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

等式两边对 n 求和即得结论.

Example ▶ Minkowski 不等式

设 $p \geq 1$, 取 $x = \{\xi_i\} \in l^p, y = \{\eta_i\} \in l^p$, 则有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$p = 1$ 时不等式显然成立, 下证 $p > 1$ 的情形.

令 $q > 1$ 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad q = \frac{p}{p-1}, \quad \frac{p}{q} + 1 = p,$$

考虑 $\{|\xi_n + \eta_n|^{\frac{p}{q}}\} \in l^q$, 根据 Hölder 不等式有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \cdot |\xi_n + \eta_n|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \cdot |\xi_n + \eta_n|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{q}},$$

两式相加得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \leq \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

由此得出结论.

Proposition

l^p 空间中的 ρ 是距离.

证明. 正定性与对称性显然. 令 $p \geq 1, z = \{\zeta_i\} \in l^p$, 则由 Minkowski 不等式得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|\xi_n - \zeta_n + \zeta_n - \eta_n|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \zeta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n - \eta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

从而 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, 得证.

Proposition 1.3.17

(l^p, ρ) 是完备度量空间.

证明. 设 $\{x_n\} \subset l^p$ 是 Cauchy 列, 其中 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall m, n > N$ 有

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \Rightarrow \forall i, |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon,$$

因此 $\forall i, \{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 Cauchy 列, 设 $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i (n \rightarrow \infty)$, 并令 $x = \{\xi_i\}$. $\forall k \in \mathbb{N}$ 有

$$\sum_{i=1}^k |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p,$$

令 $m \rightarrow \infty$ 即得

$$\sum_{i=1}^k |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p,$$

再令 $k \rightarrow \infty$ 得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leq \varepsilon^p,$$

于是 $x_n - x \in l^p$, 并且 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 也即 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 其中 $x = x_n - (x_n - x) \in l^p$. 综上, l^p 空间完备.

Proposition 1.3.18

(l^p, ρ) 是可分的.

证明. 不妨设 l^p 中均是实数列, 若不然, 分别讨论实部和虚部也可得到结论.

令 $A = \{\{\eta_1, \dots, \eta_n, 0, 0, \dots\} : n \in \mathbb{N}, \eta_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, n\}$, 则 $A \subset l^p$ 且是可数的, 下证 A 在 l^p 中稠密.

任取 $x = \{\xi_n\} \in l^p$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^p < \varepsilon^p,$$

并且对于 $n = 1, \dots, N$, 由有理数的稠密性可得 $\exists \eta_n \in \mathbb{Q}$ 使得

$$|\xi_n - \eta_n| < \frac{\varepsilon}{N^{\frac{1}{p}}}, n = 1, \dots, N,$$

此时取 $y = \{\eta_1, \dots, \eta_N, 0, 0, \dots\} \in A$, 即有

$$(\rho(x, y))^p = \sum_{n=1}^N |\xi_n - \eta_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p < \varepsilon^p + \varepsilon^p = 2\varepsilon^p \Rightarrow \rho(x, y) < 2^{\frac{1}{p}}\varepsilon,$$

命题得证.

Proposition

设 $F \subset l^p$, 则 F 是列紧集当且仅当 F 是有界集且满足 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall x = \{\xi_n\} \in F$ 有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^p < \varepsilon.$$

证明. 由于 l^p 完备, 因此 F 是列紧集当且仅当 F 是完全有界集.

充分性: 任取 $\sigma > 0$, 下证 F 存在有穷 σ 网. 条件中的 ε 待定, 并给定对应的 N , 令 $\tilde{F} = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) : x = \{\xi_n\} \in F\} \subset \mathbb{R}^N$, 于是 $\tilde{F}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界集, 从而是列紧集, 也即是完全有界集, 因此 $\exists x^{(l)} = \{\xi_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty} \in F (l = 1, \dots, m)$ 使得 $\{(\xi_1^{(l)}, \dots, \xi_N^{(l)}) : l = 1, \dots, m\}$ 是 $\tilde{F}$ 的有穷 σ_1 网 (σ_1 待定).

$\forall x = \{\xi_i\} \in F, \exists l \in \{1, \dots, m\}$ 使得

$$\rho_N((\xi_1, \dots, \xi_N), (\xi_1^{(l)}, \dots, \xi_N^{(l)})) = \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i^{(l)} - \xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \sigma_1 \Rightarrow |\xi_i^{(l)} - \xi_i| < \sigma_1, i = 1, \dots, N,$$

因此有

$$(\rho_{l^p}(x, x^{(l)}))^p = \sum_{i=1}^N |\xi_i^{(l)} - \xi_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^{(l)} - \xi_i|^p < N \cdot \sigma_1^p + 2^p(\varepsilon + \varepsilon),$$

故取 $\sigma_1 = (\varepsilon/N)^{\frac{1}{p}}, \varepsilon < \sigma^p/(1 + 2^{p+1})$, 从而 $\rho_{l^p}(x, x^{(l)}) < \sigma$, 因此 $\{x^{(l)}\}_{l=1}^m$ 是 F 的有穷 σ 网.

必要性: 有界性显然成立.

由完全有界性可得, F 存在有穷 σ_2 网 $\{x^{(l)}\}_{l=1}^m$, 其中 σ_2 待定, $x^{(l)} = \{\xi_i^{(l)}\}_{i=1}^{\infty}$. 由 l^p 的定义可

知, $\forall l \in \{1, \dots, m\}, \exists N_l \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{i=N_l+1}^{\infty} |\xi_i^{(l)}|^p < \sigma_3, \quad l = 1, \dots, m,$$

其中 σ_3 待定, 再取 $N = \max_{1 \leq l \leq m} N_l$. $\forall x = \{\xi_i\} \in F, \exists x^{(l)}$ 使得 $\rho_{l^p}(x, x^{(l)}) < \sigma_2$, 因此有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(l)} + \xi_i^{(l)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(l)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^{(l)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \rho_{l^p}(x, x^{(l)}) + \sigma_3^{\frac{1}{p}} < \sigma_2 + \sigma_3^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

取 $\sigma_2 = \varepsilon^{\frac{1}{p}}/2, \sigma_3 = \varepsilon/2^p$, 即有

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon.$$

命题得证.

最后考虑 l^∞ 空间:

$$l^\infty = \left\{ \{\xi_n\}_{n=1}^\infty : \sup_n |\xi_n| < \infty \right\},$$

并定义其上的距离

$$\rho(x, y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n|.$$

Proposition

l^∞ 不可分.

证明. 令 $A = \{\{\eta_n\}_{n=1}^\infty : \eta_n \in \{0, 1\}, \forall n\}$, 则由二进制表示可得 A 与 $[0, 1]$ 等势, 从而 A 不可数. 若 $x, y \in A, x \neq y$, 则有 $\rho(x, y) = 1$.

假设 l^∞ 可分, 则 $\exists \{z_k\}_{k=1}^\infty$ 是 l^∞ 的一个可数稠密子集, 不妨设其中各个点互不相同. $\forall x, y \in A, x \neq y$, 有 $B(x, 1/3) \cap B(y, 1/3) = \emptyset$, 并且由稠密性可知, 任取 $x \in A$, 存在唯一的 z_k 使得 $z_k \in B(x, 1/3)$, 与可数性矛盾. 因此 l^∞ 空间不可分.

1.4 赋范线性空间

1.4.1 线性空间

Definition 1.4.1 ▶ 复 (实) 线性空间

设 X 是非空集, $\mathbb{K}$ 是复 (实) 数域, 称 X 为复 (实) 线性空间, 如果满足下列条件:

(1) X 是加法交换群, 即 $\forall x, y \in X$, 存在 $u \in X$ 使得 $u = x + y$, 称 u 为 x, y 之和, 满足

$$(1.1) \quad x + y = y + x;$$

$$(1.2) \quad (x + y) + z = x + (y + z);$$

(1.3) 存在唯一的 $\theta \in X$, 使得 $\forall x \in X$ 有 $x + \theta = \theta + x = x$;

(1.4) $\forall x \in X$, 存在唯一的 $x' \in X$ 使得 $x + x' = \theta$, 记 x' 为 $-x$.

(2) 定义了数域 $\mathbb{K}$ 中的数 α 与 $x \in X$ 的数乘运算, 即 $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$, 存在 $u \in X$ 使得 $u = \alpha x$, 称 u 为 x 对 α 的数乘, 满足

$$(2.1) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$

$$(2.2) \quad 1 \cdot x = x;$$

$$(2.3) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$(2.4) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

线性空间的元素又称为向量, 从而线性空间又称为向量空间. 以下是线性空间中的一些概念:

- **线性同构** 设 X, X_1 是线性空间, $T: X \rightarrow X_1$ 称为线性同构, 如果它是一个双射, 并且满足 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$.
- **线性子空间** 设 $E \subset X$, 若其在 X 的加法和数乘运算下也构成一个线性空间, 则称 E 是 X 的一个线性子空间. 显然 X 与 $\{\theta\}$ 是 X 的线性子空间, 称为平凡子空间, 其余子空间称为真子空间.
- **线性流形** 设 $E \subset X$, 若存在线性子空间 $E_0 \subset X$ 及向量 $x_0 \in X$, 使得 $E = E_0 + x_0 = \{x + x_0 : x \in E_0\}$, 则称 E 是线性流形. 换句话说, 线性流形是子空间对某个向量的平移.
- **线性相关** 一组向量 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ 称为是线性相关的, 如果存在不全为 0 的一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 使得 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, 否则称为是线性无关的.
- **线性基** 若 A 是 X 的一个极大线性无关向量组, 即 A 中的向量线性无关, 并且 X 中的任一向量都是 A 中向量的线性组合, 则称 A 是 X 的一组线性基.
- **维数** 线性空间中的线性基的元素个数 (势), 称为维数.
- **线性包** 设 Λ 是一个指标集, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 中的向量族, 由 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 的一切有穷线性组合组成的集合 $\{\alpha_1 x_{\lambda_1} + \alpha_2 x_{\lambda_2} + \dots + \alpha_n x_{\lambda_n} : \lambda_i \in \Lambda, \alpha \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n\}$ 称为 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 的线性包, 其为一个线性子空间, 并且是包含 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 的一切线性子空间的交, 因此称线性包为 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 张成的线性子空间, 记为 $\text{span}\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 的线性包是线性子空间易证, 下证该线性包是包含 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 的一切线性子空间的交. 记这些线性子空间为 $E_m (m \in M)$, 其中 M 是指标集. 一方面, 由于 $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset E_m (\forall m \in M)$, 由线性空间定义即得 $\text{span}\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset E_m (\forall m \in M)$, 从而 $\text{span}\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \bigcap_{m \in M} E_m$. 另一方面, $\text{span}\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 本身就是一个线性子空间, 因此存在 $m_0 \in M$ 使得 $\text{span}\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = E_{m_0} \supset \bigcap_{m \in M} E_m$. 结论得证.

- **线性和与直和** 设 E_1, E_2 是 X 的子空间, 称集合 $\{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}$ 是 E_1 与 E_2 的线性和, 记作 $E_1 + E_2$, 以此类推可定义任意有限个子空间的线性和. 若 (E_1, E_2) 中任意一对非零向量都是线性无关的, 则称线性和 $E_1 + E_2$ 为直和, 记作 $E_1 \oplus E_2$, 此时 $E_1 \cap E_2 = \{\theta\}$, 从而 $\forall x \in E_1 \oplus E_2$ 有唯一的分解 $x = x_1 + x_2 (x_1 \in E_1, x_2 \in E_2)$.

1.4.2 线性空间上的距离

我们希望线性空间 X 上的距离 ρ 有如下性质:

- (1) 平移不变性:

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y) \quad (\forall x, y, z \in X).$$

由此可得, ρ 对加法连续, 即

$$\rho(x_n, x) \rightarrow 0, \rho(y_n, y) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(x_n + y_n, x + y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这是由于

$$\begin{aligned} \rho(x_n + y_n, x + y) &= \rho(x_n + y_n - x - y, \theta) \\ &= \rho(x_n - x, y_n - y) \\ &\leq \rho(x_n - x, \theta) + \rho(y_n - y, \theta) \\ &= \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y). \end{aligned}$$

- (2) 数乘连续性:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x) \rightarrow 0 &\Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, \forall \alpha \in \mathbb{K}), \\ \alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{K} &\Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, \forall x \in X). \end{aligned}$$

根据上述条件, 我们令 $p : X \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = \rho(x, \theta)$, 根据平移不变性得到 $p(x - y) = \rho(x, y)$, 从而由距离公理得

- $p(x) \geq 0$, 并且 $p(x) = 0$ 当且仅当 $x = \theta$;
- $p(-x) = p(x)$;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

再由数乘连续性得到

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow \theta &\Rightarrow p(\alpha x_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, \forall \alpha \in \mathbb{K}), \\ \alpha_n \rightarrow 0 &\Rightarrow p(\alpha_n x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, \forall x \in X). \end{aligned}$$

由此给出以下定义:

Definition 1.4.2 ▶ 准范数 (准模)

定义线性空间 X 上的一个函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

- (1) $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- (2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- (3) $\|-x\| = \|x\|$;
- (4) $\lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n x\| = \lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \|\alpha x_n\| = 0$.

则称其为 X 上的准范数 (准模).

Definition 1.4.3 ▶ F^* 空间与 F 空间

赋予准范数的线性空间 X , 若按 $\|x_n - x\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 定义 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 则称其为 F^* 空间. 完备的 F^* 空间称为 F 空间.

Example 1.4.4 ▶ 空间 $C(M)$

M 是紧集, 在空间 $C(M)$ 上定义准范数

$$\|u\| = \max_{x \in M} |u(x)|,$$

于是 $C(M)$ 是一个 F 空间.

Example 1.4.5 ▶ 空间 $\mathbb{R}^n$

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义准范数

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

于是 $\mathbb{R}^n$ 是一个 F 空间.

Example 1.4.6 ▶ 空间 S

用 S 表示一切无穷序列 $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 组成的线性空间, 并按照自然方式定义加法与数乘运算. 令

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n|}{1 + |x_n|},$$

则其为一个准范数, 此时 S 是一个 F 空间.

证明. 首先证明 $\|x\|$ 是准范数. 这一无穷级数显然收敛, 并且条件 (1)(3) 是显然的, 下面先验证条件 (2). 设 $y = \{y_n\} \in S$, 则

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n + y_n|}{1 + |x_n + y_n|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n| + |y_n|}{1 + |x_n| + |y_n|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{|x_n|}{1 + |x_n|} + \frac{|y_n|}{1 + |y_n|} \right) = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

再验证条件 (4). 注意到 $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$ 有

$$\frac{ab}{1 + ab} \leq \max(a, 1) \cdot \frac{b}{1 + b},$$

因此若 $\|x_n\| \rightarrow 0$, 则 $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \|\alpha x_n\| \leq \max(\alpha, 1) \|x_n\| \rightarrow 0$.

若 $|\alpha_m| \rightarrow 0$, $\forall \varepsilon > 0$, 取充分大的 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $1/2^{n_0} < \varepsilon/2$, 再取 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $m > N$ 时有

$$|\alpha_m| \max_{1 \leq i \leq n_0} |x_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而有

$$\begin{aligned} \|\alpha_m x\| &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\alpha_m x_n|}{1 + |\alpha_m x_n|} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\alpha_m x_n|}{1 + |\alpha_m x_n|} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

最后验证 S 的完备性. 考虑 Cauchy 列 $\{x^{(l)}\}, x^{(l)} = \{x_n^{(l)}\}$ 满足 $\forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$\|x^{(m+p)} - x^{(m)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n^{(m+p)} - x_n^{(m)}|}{1 + |x_n^{(m+p)} - x_n^{(m)}|} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

于是 $\forall n, p \in \mathbb{N}$ 有 $|x_n^{(m+p)} - x_n^{(m)}| \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$, 从而存在 x_n^* 满足 $x_n^{(m)} \rightarrow x_n^* (m \rightarrow \infty), \forall \varepsilon > 0$.

取充分大的 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $1/2^{n_0} < \varepsilon/2$, 再取 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $m > N$ 时有

$$|x_n^{(m)} - x_n^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n = 1, \dots, n_0),$$

从而有

$$\begin{aligned} \|x^{(m)} - x^*\| &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n^{(m)} - x_n^*|}{1 + |x_n^{(m)} - x_n^*|} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n^{(m)} - x_n^*|}{1 + |x_n^{(m)} - x_n^*|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} |x_n^{(m)} - x_n^*| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

综上, S 是 F 空间.

Remark

由该例可得, $x^{(m)}$ 收敛于 θ 当且仅当每个分量 $x_n^{(m)}$ 都收敛于 θ , 因此按 S 距离收敛等价于按坐标收敛.

Example 1.4.7 ▶ 空间 $C(\mathbb{R}^n)$

令 $C(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上全体连续函数组成的集合, 定义准范数

$$\|u\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max_{|x| \leq k} |u(x)|}{1 + \max_{|x| \leq k} |u(x)|},$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, 于是 $C(\mathbb{R}^n)$ 是一个 F 空间.

1.4.3 范数与 Banach 空间

通过上述例子我们发现, 例 1.4.5 与例 1.4.6 中的准范数具有齐次性, 即 $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$, 有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, 而例 1.4.7 与例 1.4.8 中的准范数则不具有齐次性.

Definition 1.4.8

定义线性空间 X 上的一个非负函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, 若其满足

- (1) $\|x\| \geq 0$, 并且 $\|x\| = 0 \iff x = \theta$;
- (2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

则称其为 X 上的范数.

显然, 范数是一种准范数.

Definition 1.4.9 ▶ 赋范线性空间 (B^* 空间) 与 Banach 空间 (B 空间)

当线性空间中赋予的准范数是范数时, 此空间称为**赋范线性空间** (B^* 空间). 完备的 B^* 空间称为 **Banach 空间** (B 空间).

Example 1.4.10 ▶ 空间 $L^p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$)

设 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间, u 是 Ω 上的可测函数, 则 $|u(x)|^p$ 在 Ω 上也可测. 若有

$$\int_{\Omega} |u|^p d\mu < \infty,$$

则称 u 是 Ω 上的 p 次可积函数, 将这类函数全体记为 $L^p(\Omega, \mu)$, 称为 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ 上的 p 次可积函数空间, 按正常的加法与数乘规定运算, 并且将几乎处处相等的函数视为相同, 则此时 $L^p(\Omega, \mu)$ 是一个线性空间, 并定义

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

由 Minkowski 不等式得 $\|\cdot\|$ 是一个范数.

Theorem 1.4.11 ▶ Riesz-Fischer 定理

当 $1 \leq p < \infty$ 时, $L^p(\Omega, \mu)$ 是 B 空间.

证明. 取 L^p 中的 Cauchy 列 $\{u_n\}$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall m, n > N$ 有

$$\|u_n - u_m\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |u_n - u_m|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

$\forall \sigma > 0$, 记 $E_{n,m}(\sigma) := \{x \in \Omega : |u_n(x) - u_m(x)| \geq \sigma\}$, 则有

$$\mu(E_{n,m}(\sigma)) = \frac{1}{\sigma^p} \int_{\Omega} \sigma^p \chi_{E_{n,m}(\sigma)} d\mu \leq \frac{1}{\sigma^p} \int_{\Omega} |u_n - u_m|^p d\mu < \frac{\varepsilon^p}{\sigma^p},$$

因此 $\{u_n\}$ 是依测度 Cauchy 的^a, 从而存在可测函数 u 使得 $\{u_n\}$ 依测度收敛到 u , 并且存在子列 $\{u_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 u ^b. 当 $n_k, n_l > N$ 时有

$$\int_{\Omega} |u_{n_k} - u_{n_l}|^p d\mu < \varepsilon^p,$$

取定 $n_K > N$, 令 $l \rightarrow \infty$, 则 $|u_{n_K} - u_{n_l}|^p \rightarrow |u_{n_K} - u|^p$ a.e., 于是由 Fatou 引理

$$\int_{\Omega} |u_{n_K} - u|^p d\mu \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_{n_K} - u_{n_l}|^p d\mu \leq \varepsilon^p,$$

因此 $u_{n_K} - u \in L^p$, 从而 $u \in L^p$.

当 $n > N$ 时有

$$\|u_n - u\|_{L^p} \leq \|u_n - u_{n_K}\|_{L^p} + \|u_{n_K} - u\|_{L^p} < 2\varepsilon,$$

因此 $u_n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$. 综上, L^p 空间完备.

^a 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是测度空间, $\{f_n\}$ 是一列可测函数, 若 $\forall \varepsilon > 0$ 都有 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$, 则称 $\{f_n\}$ 依测度 Cauchy.

^b 见 Real Analysis, Folland 中的 Theorem 2.30.

Example 1.4.12 ▶ 空间 $L^\infty(\Omega, \mu)$

设 $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间, μ 是 σ -有限测度, u 是 Ω 上的可测函数. 若 u 与 Ω 上的一个有界函数几乎处处相等, 则称 u 是 Ω 上的本性有界可测函数, 将这类函数全体记为 $L^\infty(\Omega, \mu)$, 按正常的加法与数乘规定运算, 并且将几乎处处相等的函数视为相同, 则此时 $L^p(\Omega, \mu)$ 是一个线性空间.

由定义可知 $\exists E \subset \Omega, \mu(E) = 0$ 使得 $\sup_{x \in \Omega \setminus E} |u(x)| < \infty$, 于是在空间上定义

$$\|u\|_{L^\infty} := \inf_{\substack{E \subset \Omega \\ \mu(E)=0}} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus E} |u(x)| \right) := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

该定义中的下确界是可以取到的, 即 $\exists E \subset \Omega, \mu(E) = 0$ 使得 $\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega \setminus E} |u(x)|$.

事实上, 根据定义可得 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists E_n \subset \Omega, \mu(E_n) = 0$ 使得

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_n} |u(x)| < \|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}.$$

令 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $\mu(E) = 0$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \sup_{x \in \Omega \setminus E} |u(x)| \leq \sup_{x \in \Omega \setminus E_n} |u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{n},$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即得结论.

Proposition 1.4.13

$L^\infty(\Omega, \mu)$ 是 B 空间.

证明. 首先证明 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是范数, 其中齐次性显然成立.

$\forall u \in L^\infty(\Omega, \mu)$, 根据定义显然有 $\|u\|_{L^\infty} \geq 0$, 并且若 $u = 0$ a.e., 则 $\|u\|_{L^\infty} = 0$. 设 $\|u\|_{L^\infty} = 0$,

则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists E_n \subset \Omega, \mu(E_n) = 0$ 使得 $\sup_{x \in \Omega \setminus E_n} |u(x)| < 1/n$. 由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus E_n) = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right),$$

令 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $\mu(E) = 0$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \Omega \setminus E} |u(x)| < 1/n$, 从而 $u = \theta$ a.e.. 正定性得证.

$\forall u, v \in L^\infty(\Omega, \mu)$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists E_1, E_2 \subset \Omega, \mu(E_1) = \mu(E_2) = 0$ 使得

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_1} |u(x)| < \|u\|_{L^\infty} + \varepsilon, \quad \sup_{x \in \Omega \setminus E_2} |v(x)| < \|v\|_{L^\infty} + \varepsilon,$$

令 $E = E_1 \cup E_2$, 则 $\mu(E) = 0$, 且

$$\|u + v\|_{L^\infty} \leq \sup_{x \in \Omega \setminus E} (|u(x)| + |v(x)|) \leq \sup_{x \in \Omega \setminus E_1} |u(x)| + \sup_{x \in \Omega \setminus E_2} |v(x)| < \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} + 2\varepsilon,$$

三角不等式得证. 综上可得 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是范数, 从而 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 是 B^* 空间.

取 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 中的 Cauchy 列 $\{u_n\}$, 当 $n, p \rightarrow \infty$ 时, $\|u_{n+p} - u_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0$. 于是 $\forall n, p \in \mathbb{N}, \exists E_{n,p} \subset \Omega, \mu(E_{n,p}) = 0$ 满足

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_{n,p}} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{2^{n+p}},$$

令 $E = \bigcup_{n,p=1}^{\infty} E_{n,p}$, 则 $\mu(E) = 0$, 且 $\forall x \in \Omega \setminus E$ 有

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leq \sup_{x \in \Omega \setminus E} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leq \sup_{x \in \Omega \setminus E_{n,p}} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{2^{n+p}},$$

因此 $\{u_n\}$ 在 $\Omega \setminus E$ 上逐点为 Cauchy 列, 从而存在 $\Omega \setminus E$ 上的可测函数 u 满足在 $\Omega \setminus E$ 上有 $u_n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$, 即在 Ω 上有 $u_n \rightarrow u$ a.e. ($n \rightarrow \infty$). $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega \setminus E$ 有 $|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon$, 令 $p \rightarrow \infty$ 即有 $|u(x) - u_n(x)| < \varepsilon$, 因此 $u - u_n \in L^\infty(\Omega, \mu)$, 从而 $u = u_n + (u - u_n) \in L^\infty(\Omega, \mu)$. 又由于

$$\|u - u_n\|_{L^\infty} \leq \sup_{x \in \Omega \setminus E} |u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon,$$

因此在 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 中 $u_n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$. 综上, $L^\infty(\Omega, \mu)$ 是 B 空间.

Example 1.4.14 $\triangleright C^k(\overline{\Omega})$ 空间

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界连通区域, $\overline{\Omega}$ 上具有直到 k 阶连续偏导数的函数 $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ 的全体记为 $C^k(\overline{\Omega})$. 按正常的加法与数乘规定运算, 并且将几乎处处相等的函数视为相同, 则此时

$L^p(\Omega, \mu)$ 是一个线性空间, 并定义

$$\|u\|_{C^k} := \max_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)|,$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, 以及

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

显然其为一个范数.

Proposition 1.4.15

$C^k(\bar{\Omega})$ 是 B 空间.

证明. 取 $C^k(\bar{\Omega})$ 中的 Cauchy 列 $\{u_n\}$, 则当 $l, m \rightarrow \infty$ 时, $\|u_l - u_m\|_{C^k} \rightarrow 0$. 于是 $\forall \alpha, |\alpha| \leq k$, 当 $l, m \rightarrow \infty$ 时有 $\max_{x \in \bar{\Omega}} |\partial^\alpha u_l - \partial^\alpha u_m| \rightarrow 0$, 回忆 $C(M)$ 的完备性, $\exists v_\alpha \in \bar{\Omega}$ 使得 $\partial^\alpha u_l \rightarrow v_\alpha (l \rightarrow \infty)$.

当 $|\alpha| = 0$ 时, $u_l \rightarrow v_0 (l \rightarrow \infty)$.

当 $|\alpha| = 1$ 时, 令 $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, 则 $\partial_{x_1} u_l \rightarrow v_1 (l \rightarrow \infty)$.

取定 $(x_1^0, x_2, \dots, x_n)$, 考虑 $(x_1, \dots, x_n)$, 则

$$u_n(x_1, \dots, x_n) = \int_{(x_1^0, x_2, \dots, x_n)}^{(x_1, \dots, x_n)} \partial_{x_1} u_l(x) dx + u_l(x_1^0, x_2, \dots, x_n),$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$v_0(x_1, \dots, x_n) = \int_{(x_1^0, x_2, \dots, x_n)}^{(x_1, \dots, x_n)} v_1(x) dx + v_0(x_1^0, x_2, \dots, x_n),$$

对 x_1 分量求导即得 $\partial_{x_1} v_0 = v_1$, 即 $\partial_{x_1} u_l \rightarrow \partial_{x_1} v_0$, 同理对每个分量都有相同的结果, 结合数学归纳法即得 $v_0 \in C^k(\bar{\Omega})$, 并且当 $l \rightarrow \infty$ 时有

$$\|u_l - v_0\|_{C^k} = \max_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |\partial^\alpha u_l(x) - \partial^\alpha v_0(x)| \rightarrow 0,$$

因此 $C^k(\bar{\Omega})$ 是完备的.

1.4.4 赋范线性空间上的范数等价

Definition 1.4.16 ▶ 强与等价

在线性空间 X 上给定两个范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, 并取 $\{x_n\} \subset X$. 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\|x_n\|_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\|_1 \rightarrow 0,$$

则称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强. 如果还有 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强, 则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

1.4.5 最佳逼近问题

1.4.6 有穷维 B^* 空间的刻画

1.4.7 商空间

Definition 1.4.17 ▶ 商空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 B^* 空间, $X_0 \subset X$ 是闭线性子空间, 在其上定义等价关系 $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in X_0,$$

由此得到等价类

$$[x] := \{y \in X : y - x \in X_0\},$$

所有等价类组成的空间称为关于 X_0 的商空间, 记为 X/X_0 , 并在其上定义加法和数乘:

$$[x] + [y] = [x + y], \quad [\alpha x] = \alpha[x], \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Proposition 1.4.18

商空间 X/X_0 是线性空间.

证明. 首先验证加法和数乘不依赖于代表元的选取.

令 $x, x' \in [x], y, y' \in [y]$, 则有

$$\begin{aligned} x + y - (x' + y') &= (x - x') + (y - y') \in X_0 \Rightarrow [x + y] = [x' + y'], \\ \alpha x - \alpha x' &= \alpha(x - x') \in X_0 \Rightarrow \alpha[x] = \alpha[x']. \end{aligned}$$

加法显然满足交换律与结合律. 选取 $\theta \in X_0, x \in X$, 则有

$$[x] + [\theta] = [x + \theta] = [x],$$

因此 $[\theta]$ 是 X/X_0 中的零元. 任取 $x_0 \in [\theta]$, 则 $x_0 - \theta \in X_0, x_0 \in X_0$, 从而 $[\theta] \subset X_0$, 并且显然有 $X_0 \subset [\theta]$, 因此 $[\theta] = X_0$.

$\forall [x] \in X/X_0$, 选取 $[x'] = [x_0 - x] \in X/X_0$, 则 $[x] + [x'] = [x_0]$. 若还存在 $[x''] \in X/X_0$ 使得 $[x] + [x''] = [x_0]$, 则有

$$[x'] = [x'] + [x_0] = [x'] + [x''] + [x] = [x''] + [x_0] = [x''].$$

数乘的各项性质显然满足. 综上, X/X_0 是线性空间.

Theorem 1.4.19

$\forall [x] \in X/X_0$, 定义

$$\|[x]\|_0 := \inf_{y \in [x]} \|y\|,$$

则 $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 是 B^* 空间. 若 $(X, \|\cdot\|)$ 是 B 空间, 则 $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 也是 B 空间.

证明. $\|[x]\| \geq 0$ 显然成立. 若 $[x] = [\theta]$, 显然 $\|[x]\| = 0$. 反之设 $\|[x]\| = 0$, 则存在 $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset [x]$ 使得 $\|y_n\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 $y_n \rightarrow \theta \in X_0 (n \rightarrow \infty)$. 取 $x' \in [x]$, 由于 $x' - y_n = x' - x + x - y_n \in X_0$, 并且 X_0 是闭的, 因此 $x' - y_n \rightarrow x' - \theta = x' \in X_0 = [\theta]$, 从而 $[x] = [\theta]$.

$\forall \alpha \in \mathbb{F}$ 有

$$\|\alpha[x]\|_0 = \inf_{y \in \alpha[x]} \|y\| = \inf_{y \in [x]} \|\alpha y\| = |\alpha| \|[x]\|_0.$$

@

Definition ▶ 凸集

设 X 是线性空间, $E \subset X$, 若 $\forall x, y \in E, t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in E$, 则 E 称为凸集.

Proposition

如果 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族凸集, 那么 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ 也是凸集.

Definition ▶ 凸包

设 $A \subset X, \{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是包含 A 的所有凸集, 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ 称为 A 的凸包, 记为 $Co(A)$.

Definition ▶ 凸组合

设 $A \subset X$, 任取 A 中有限个向量 $x_1, \dots, x_n$, 称

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \left(\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right)$$

为 A 中 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的凸组合.

Proposition

$$Co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in A, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

证明. 记右侧集合为 S . 任取 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \in S, t \in [0, 1]$, 则

$$t \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + (1-t) \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = \sum_{i=1}^n t \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m (1-t) \mu_j y_j.$$

由于 $\sum_{i=1}^n t \lambda_i + \sum_{j=1}^m (1-t) \mu_j = t + 1 - t = 1$, 故 S 是凸集, 从而 $Co(A) \subset S$.

任取 $E \supset A$ 是凸集, 则 A 中的所有凸组合也包含在 E 中, 于是 $S \subset E$, 从而 $S \subset Co(A)$. 综上所述得证.

Proposition

设 E 是凸集, 则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in E$.

任取两个元素 x_1, x_2 时, 由定义即得命题成立.

假设 E 中任意 n 个元素 $x_1, \dots, x_n$ 的凸组合包含在 E 中, 不妨设 $\lambda_{n+1} \in (0, 1)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1},$$

其中

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i \in E,$$

因此 $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in E$, 从而任意 $n+1$ 个元素的凸组合也包含在 E 中. 根据数学归纳法, 命题得证.

我们考虑这样一个问题: X 是线性空间, $C \subset X, \theta \in C$. 任取 $x \in X$, 是否存在 $\lambda > 0$ 使得 $x/\lambda \in C$? 此时 λ 的下确界是多少? 为此引入这一概念:

Definition ▶ Minkowski 泛函

X 是线性空间, $C \subset X, \theta \in C$. 定义 $p(\cdot) : X \rightarrow [0, \infty]$ 为

$$p(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C \right\},$$

称其为相应于 C 的 **Minkowski 泛函**.

Proposition

若 C 是一个凸集, 则有 $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

证明. 若 $p(x)$ 或 $p(y)$ 为 ∞ 显然成立.

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $p(x) + \varepsilon = \lambda_1, p(y) + \varepsilon = \lambda_2$, 则由定义可得 $x/\lambda_1, y/\lambda_2 \in C$, 于是有

$$\frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{y}{\lambda_2} \in C,$$

再由定义得到

$$p(x+y) \leq \lambda_1 + \lambda_2 = p(x) + p(y) + 2\varepsilon,$$

最后由 ε 的任意性即得证.

Definition ▶ 吸收集

设 $C \subset X$ 是凸集, $\theta \in C$. 若 $\forall x \in X$, 存在 $\lambda > 0$ 使得 $x/\lambda \in C$, 则称 C 是吸收集.

Proposition

设 $C \subset X$ 是凸集, $\theta \in C$, 则 C 是吸收的 $\iff p(\cdot) \in [0, \infty)$.

证明. 必要性由定义即得, 下证充分性. 任取 $x \in X, x \neq \theta$, 有 $x/p(x) \in \overline{C}$. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $x/(p(x) + \varepsilon_0) \in C$, 因此 C 是吸收集.

Definition ▶ 对称集

设 $C \subset X$, 若 $x \in C \implies -x \in C$, 则称 C 是对称集.

Proposition

若 C 对称, 则 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$.

证明. 由定义可得

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{\alpha x}{\lambda} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda/\alpha} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda/|\alpha|} \in C \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 : \frac{x}{\lambda/|\alpha|} \in C \right\} = |\alpha|p(x). \end{aligned}$$

Definition ▶ 均衡集

设 $C \subset X$, 若 $x \in C \implies \alpha x \in C (|\alpha| = 1, \alpha \in \mathbb{C})$, 则称 C 是均衡集.

Definition ▶ 半范数

定义在线性空间上的函数如果满足非负性、齐次性、三角不等式, 则称其为半范数.

半范数的定义就是范数的定义去掉 $p(x) = 0 \iff x = \theta$ 这一条件, 即满足非负性而不一定满足正定性.

结合定义与上述命题可得:

Proposition

设 $\theta \in C \subset X$, $\theta \in C$ 是均衡、吸收的凸集, 则 $p(x)$ 是 X 上的一个半范数.

Definition ▶ 下半连续

设 X 是 B^* 空间, $x_0 \in X, f: B(x_0, \varepsilon) \rightarrow (-\infty, \infty]$. 若 $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B(x_0, \varepsilon)$ 满足 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 并且 $f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, 则称 f 在 x_0 处下半连续. 若 f 在 X 中的每个点处都下半连续, 则称 f 是 X 上的下半连续函数.

这里引入一个记号:

$$f: X \rightarrow (-\infty, \infty], \text{ epi}(f) := \{(x, \xi) : f(x) \leq \xi, x \in X, \xi \in \mathbb{R}\}.$$

直观来看, $\text{epi}(f)$ 就是函数 f 的图像及其上方的空间.

Proposition

f 下半连续 $\iff \text{epi}(f)$ 在 $X \times \overline{\mathbb{R}}$ 中是闭集.

证明. **充分性:** $\forall x_0 \in X$, 任取 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ 满足 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\{(x_n, f(x_n))\}_{n=1}^\infty \subset \text{epi}(f)$. 考虑 $f(x_n)$ 的收敛子列 $f(x_{n_k})$, 并设 $f(x_{n_k}) \rightarrow \xi (k \rightarrow \infty)$, 从而也有 $\{(x_{n_k}, f(x_{n_k}))\} \subset \text{epi}(f)$, 由 $\text{epi}(f)$ 的闭性得 $(x_0, \xi) \in \text{epi}(f)$, 从而 $f(x_0) \leq f(\xi)$, 也即

$$f(x_0) \leq \inf f(\xi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

必要性: 任取 $\{(x_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty \subset \text{epi}(f)$ 满足 $(x_n, \xi_n) \rightarrow (x, \xi) \in X \times \overline{\mathbb{R}} (n \rightarrow \infty)$. 由于 $f(x_n) \leq \xi_n$, 由下半连续性可得

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi,$$

从而 $(x, \xi) \in \text{epi}(f)$, 也即 $\text{epi}(f)$ 是闭集.

Proposition

X 是 B^* 空间, $\theta \in C \subset X, C$ 是闭凸集, 则其 Minkowski 泛函 $p(x)$ 在 X 上是下半连续函数.

证明. $\forall \alpha > 0$, 考虑 $\alpha C = \{\alpha x : x \in C\}$, 显然其也是闭集, 且 $\forall x \in \alpha C, x/\alpha \in C$, 故 $p(x) \leq \alpha$, 因此 $\alpha C \subset \{x \in X : p(x) \leq \alpha\}$. 设 $x \in X$ 且 $p(x) \leq \alpha$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, x/(\alpha + n^{-1}) \in C$, 且 $x/(\alpha + n^{-1}) \rightarrow x/\alpha (n \rightarrow \infty)$, 根据 C 是闭集, $x/\alpha \in C, x \in \alpha C$. 因此 $\forall \alpha \geq 0, \alpha C = \{x \in X : p(x) \leq \alpha\}$.

已知 $\text{epi}(p) = \{(x, \xi) : p(x) \leq \xi, x \in X, \xi \geq 0\}$. 任取 $\{(x_n, \xi_n)\}_{n=1}^\infty \subset \text{epi}(p)$ 满足 $(x_n, \xi_n) \rightarrow (x, \xi) \in X \times \overline{\mathbb{R}} (n \rightarrow \infty)$. 若 $\xi = \infty$, 显然 $(x, \xi) \in \text{epi}(p)$. 若 $\xi < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时有 $p(x_n) \leq \xi_n < \xi + \varepsilon$, 即 $x_n \in (\xi + \varepsilon)C$, 由闭集性质可得 $x \in (\xi + \varepsilon)C, p(x) \leq \xi + \varepsilon$, 再由 ε 的任意性可得 $p(x) \leq \xi, (x, \xi) \in \text{epi}(p)$, 因此 $\text{epi}(p)$ 是闭集, 从而由上个命题可得 $p(x)$ 下半连续.

Proposition

X 是 B^* 空间, $\theta \in C \subset X, C$ 是有界的闭凸集, 则 $p(x) = 0 \iff x = \theta$.

证明. 充分性由定义即得, 下证必要性.

由于 C 有界, 故 $\exists r > 0$ 使得 $C \subset B(\theta, r). \forall x \neq \theta, rx/\|x\| = x/(\|x\|/r) \notin C$. 若要 $x/R \in C$, 则应有 $R > \|x\|/r$, 从而 $p(x) \geq \|x\|/r$, 因此若 $p(x) = 0$, 则 $x = \theta$.

Proposition

X 是 B^* 空间, $\theta \in C \subset X, C$ 是闭凸集, θ 是 C 的内点, 则 $p(x)$ 是一致连续的实值函数.

证明. 由题意得, $\exists r > 0$ 使得 $B(\theta, r) \subset C$, 因此 $\forall x \neq \theta, rx/\|x\| \in C$, 从而有

$$p\left(\frac{rx}{\|x\|}\right) = p\left(\frac{x}{\|x\|/r}\right) \leq 1 \implies p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}.$$

由于 C 是凸集, 根据命题可得 $\forall x, y \in X, p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, 即 $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$, 同理可得 $p(y) - p(x) \leq p(y - x)$, 因此有

$$|p(x) - p(y)| \leq \max\{p(x - y), p(y - x)\} \leq \frac{\|x - y\|}{r},$$

于是 $p(x)$ 一致连续.

Proposition

$C \subset \mathbb{R}^n$ 是一个紧凸集, 则 $\exists m \leq n$ 使得 C 同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的单位闭球.

证明. 令 E 是包含 C 的维数最小的闭线性子流形, 设 $\dim E = m \leq n$, 则 C 中存在 $m+1$ 个向量 $\{e_1, \dots, e_{m+1}\}$ 使得 $\{e_i - e_{m+1}\}_{i=1}^m$ 线性无关. 令

$$e_0 = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} e_i \in C,$$

则 $E - e_0$ 是线性子空间, 且 $\{e_i - e_{m+1}\}_{i=1}^m$ 是 $E - e_0$ 的基底.
 $\forall y \in E, y - e_0 \in E - e_0, \exists \{\mu_i\}_{i=1}^m$ 使得

$$y - e_0 = \sum_{i=1}^m \mu_i (e_i - e_{m+1}),$$

于是在 $E - e_0$ 中引入等价范数: $\forall z = y - e_0 \in E - e_0$ 有

$$\|z\| := \left(\sum_{i=1}^m |\mu_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于

$$y = e_0 + \sum_{i=1}^m \mu_i (e_i - e_{m+1}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{m+1} + \mu_i \right) e_i + \left(\frac{1}{m+1} - \sum_{i=1}^m \mu_i \right) e_{m+1},$$

令 $|\mu_i| (i = 1, \dots, m)$ 充分小, 使得

$$\frac{1}{m+1} + \mu_i \geq 0, \quad \frac{1}{m+1} - \sum_{i=1}^m \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

也即 $\exists r > 0$ 充分小, 使得当 $(\mu_1, \dots, \mu_m)^T \in \overline{B_{\mathbb{R}^m}(\theta, r)}$ 时, y 是一个凸组合, $y \in C$, 并且 θ 是 $C - e_0$ 的内点.

令 $p(\cdot)$ 是 $C - e_0$ 上的 Minkowski 泛函, 设 $\overline{B^m(\theta, 1)}$ 是 $E - e_0$ 中的单位闭球, 由上述范数的定义可知其与 $\mathbb{R}^m$ 中的单位闭球同胚. 定义 $\varphi: \overline{B^m(\theta, 1)} \rightarrow C$ 为

$$\varphi(z) = \begin{cases} e_0 & z = \theta, \\ e_0 + \frac{z}{p(z)} \|z\| & z \neq \theta, \end{cases}$$

其存在逆映射

$$\varphi^{-1}(w) = \begin{cases} \theta & w = e_0, \\ \frac{w - e_0}{\|w - e_0\|} p(w - e_0) & w \neq e_0, \end{cases}$$

显然 φ 是双射. 由上一命题及范数的连续性可知 φ 在 $\overline{B^m(\theta, 1)} \setminus \theta$ 内是连续的. 令 $z \rightarrow \theta$, 一方面由 Minkowski 泛函的定义可得 $z/p(z) \in \overline{C}$, 结合 C 的紧性可得 $\|z/p(z)\|$ 有界, 因此有 $\varphi(z) \rightarrow e_0 = \varphi(\theta)$, 从而 φ 在 θ 处也连续, 即 φ 是 $\overline{B^m(\theta, 1)}$ 上的连续函数. 同理可得 φ^{-1} 连续,

因此 φ 是同胚映射.

在此, 我们回顾拓扑学中所提到的 Brouwer 不动点定理:

Theorem ▶ Brouwer 不动点定理

设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位闭球, $T : B \rightarrow B$ 是一个连续映射, 则 T 有不动点, 即 $\exists x \in B$ 使得 $Tx = x$.

Corollary

$C \subset \mathbb{R}^n$ 是紧凸子集, $T : C \rightarrow C$ 连续, 则 T 在 C 中有不动点.

证明. 由上一定理可得 $\exists \varphi : \overline{B^m(\theta, 1)} \rightarrow C$ 是同胚映射, 于是令 $\tilde{T} = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi : \overline{B^m(\theta, 1)} \rightarrow \overline{B^m(\theta, 1)}$, 则根据 Brouwer 不动点定理, $\exists x \in B^m(0, 1)$ 使得 $\tilde{T}(x) = x$, 即 $T(\varphi(x)) = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) \in C$.

Theorem ▶ Schauder 不动点定理

X 是 B^* 空间, C 为闭凸子集, $T : C \rightarrow C$ 连续且 $T(C)$ 列紧, 则 T 在 C 中有不动点.

证明. 由列紧可得 $T(C)$ 完全有界, 于是对任意给定的 $n \in \mathbb{N}$, $T(C)$ 存在有穷 $1/n$ 网, 记为 $N_n = \{y_1, \dots, y_{r_n}\} \neq \{\theta\}$, 否则要么可以添加不为 θ 的点, 要么 $C = \{\theta\}$, 这一情况下 T 显然有不动点.

任取 $y \in T(C)$, $\forall i \in \{1, \dots, r_n\}$, 令

$$m_i(y) = \begin{cases} 1 - n \|y - y_i\| & y \in B(y_i, \frac{1}{n}), \\ 0 & y \notin B(y_i, \frac{1}{n}), \end{cases}$$

则 $m_i(y) (i = 1, \dots, r_n)$ 均是连续函数, 值域为 $[0, 1]$ 且不同时取 0, 否则与有穷 $1/n$ 网相矛盾. 由此令

$$\lambda_i(y) = \frac{m_i(y)}{\sum_{j=1}^{r_n} m_j(y)}, \quad i = 1, \dots, r_n,$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i(y) = 1.$$

定义 $I_n : T(C) \rightarrow Co(N_n)$ 使得 $\forall y \in T(C)$ 有

$$I_n(y) = \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i(y) y_i,$$

则有

$$\|I_n(y) - y\| = \left\| \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i(y) y_i - \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i(y) y \right\| \leq \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i(y) \|y - y_i\| \leq \sum_{y \in B(y_i, 1/n)} \lambda_i(y) \cdot \frac{1}{n} + 0 \leq \frac{1}{n}.$$

由于 $N_n \subset T(C) \subset C$, 因此 $Co(N_n) \subset C$, 并且根据命题, $Co(N_n)$ 是有限维的有界闭凸子集. 令 $T_n = I_n \circ T|_{Co(N_n)} : Co(N_n) \rightarrow Co(N_n)$, 则其是连续映射, 于是由 Corollary 可得 $\exists x_n \in Co(N_n)$ 使得 $\tilde{T}_n(x_n) = x_n$, 其中 $\{T(x_n)\}_{n=1}^\infty \subset T(C)$, 再由列紧得 $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 使得 $Tx_{n_k} = x_{n_k} \rightarrow x \in C(k \rightarrow \infty)$.

由于

$$\|x_n - x\| = \|T_n(x_n) - x\| = \|I_n(Tx_n) - x\| \leq \|I_n(Tx_n) - Tx_n\| + \|Tx_n - x\|,$$

因此当 $k \rightarrow \infty$ 时有

$$\|x_{n_k} - x\| \leq \frac{1}{n_k} + \|Tx_{n_k} - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow Tx_{n_k} = x_{n_k} \rightarrow Tx \Rightarrow Tx = x,$$

故 T 存在不动点 x .

Definition ▶ 紧映射

X 是 B^* 空间, $E \subset X, T: E \rightarrow X$, 称 T 是紧映射, 如果 T 连续且将 E 中任意的有界集映为 X 中的列紧集.

我们再回到该章开头提到的常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \in (-\delta, \delta), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

将其化为积分形式

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [-h, h], \quad (1.4.2)$$

其中 h 是待定参数. 显然 f 应是有界的, 即存在 $M > 0$ 使得 $\forall (t, x) \in [-h, h] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 有 $|f(t, x)| \leq M$. 令 $\overline{B(x_0, \delta)} \subset C[-h, h]$, 构造映射 $T: \overline{B(x_0, \delta)} \rightarrow \overline{B(x_0, \delta)}$ 满足

$$T(x(t)) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (1.4.3)$$

Proposition

当 $h > 0$ 充分小时, T 是 $\overline{B(x_0, \delta)}$ 到自身的紧映射.

证明. 首先证明 T 是连续映射.

由 f 的连续性可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得

$$|t_1 - t_2| + |\delta_1 - \delta_2| < \delta \implies |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| < \varepsilon,$$

$\forall x(t) \in \overline{B(x_0, \delta)}$, 令

$$\|T(x(t)) - x_0\|_C = \max_{t \in [-h, h]} \left| \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq Mh,$$

则令 $Mh \leq \delta, h \leq \delta/M$, 此时便有 $Tx \in \overline{B(x_0, \delta)}$.

$\forall x \in \overline{B(x_0, \delta)}, \forall t, t' \in [-h, h]$ 有

$$|T(x(t)) - T(x(t'))| = \left| \int_{t'}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq M|t - t'|,$$

于是 $T(\overline{B(x_0, \delta)})$ 是等度连续的, 并且显然是完全有界的, 从而由 Arzelà-Ascoli 定理可得列紧.

Proposition ▶ T 连续

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| < \varepsilon$. $\exists N$ s.t. $\forall n > N, \max_{t \in [-h, h]} |x_n(t) - x(t)| < \delta$. $\|Tx_n - Tx\|_C = \max_t |T(x_n(t)) - T(x(t))| = \max_t \left| \int_0^t f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq \max_t \int_0^t |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau \leq \varepsilon h$.

Schauder 不需要 f 满足 Lipschitz 条件.

$\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$. $\text{epi}(\varphi) = \{(x, \lambda) : x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$. 设 X 是拓扑空间, 若 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ 是闭的, 则 φ 下半连续 (lower semicontinuous, l.s.c). φ 是 l.s.c $\iff \text{epi}(\varphi)$ 闭 $\iff \varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n)$.

$X, B^*, C \subset X$ 闭凸集, $p(\cdot) \in [0, \infty]$.

1.5 内积空间

Definition ▶ 共轭双线性函数与二次型

X 是线性空间, 函数 $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ 若满足 $\forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ 有

- $a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 a(x_1, y) + \alpha_2 a(x_2, y),$
- $a(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} a(x, y_1) + \overline{\alpha_2} a(x, y_2),$

则称其为 X 上的共轭双线性函数.

令 $q(x) := a(x, x) : X \rightarrow \mathbb{K}$, 称 q 是 a 诱导的二次型.

Proposition

$$q(\cdot) \in \mathbb{R} \iff a(x, y) = \overline{a(y, x)}.$$

证明. 充分性: $q(x) = a(x, x) = \overline{a(x, x)} \Rightarrow q(x) \in \mathbb{R}$.

必要性: 由定义可得

$$\begin{aligned} q(x+y) &= a(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + a(x, y) + a(y, x), \\ \overline{q(x+y)} &= q(x+y) = q(x) + q(y) + \overline{a(x, y)} + \overline{a(y, x)}, \end{aligned}$$

故可得

$$a(x, y) + a(y, x) = \overline{a(x, y)} + \overline{a(y, x)}$$

用 iy 替代 y , 则有

$$-ia(x, y) + ia(y, x) = \overline{ia(x, y)} - \overline{ia(y, x)},$$

等式两边同乘以 i , 再与上式相加即得 $a(x, y) = \overline{a(y, x)}$.

Proposition ▶ Cauchy-Schwarz 不等式

若 $\forall x \in X, q(x) \geq 0$, 且 $q(x) = 0 \iff x = \theta$, 则

$$|a(x, y)| \leq (q(x)q(y))^{\frac{1}{2}},$$

等号成立当且仅当 x, y 线性相关.

证明. 如果 $y = \theta$, 不等式显然成立. 不妨令 $y \neq \theta$, 则 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ 有

$$q(x + \lambda y) = a(x + \lambda y, x + \lambda y) = q(x) + \overline{\lambda}a(x, y) + \lambda\overline{a(x, y)} + |\lambda|^2q(y) \geq 0,$$

取 $\lambda = -a(x, y)/q(y)$, 则

$$q(x + \lambda y) = q(x) - 2\frac{|a(x, y)|^2}{q(y)} + \frac{|a(x, y)|^2}{q(y)} = q(x) - \frac{|a(x, y)|^2}{q(y)} \geq 0,$$

也即

$$|a(x, y)| \leq (q(x)q(y))^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $|a(x, y)| = (q(x)q(y))^{1/2}$, 则 $x + \lambda y = \theta$, 从而 x, y 线性相关; 若 x, y 线性相关, 则存在 μ 使得 $x + \mu y = \theta$, 代入即得

$$|a(x, y)| = |a(-\mu y, y)| = |\mu| \cdot |a(y, y)| = (|\mu|^2 q(y)^2)^{\frac{1}{2}} = (q(-\mu y)q(y))^{\frac{1}{2}} = (q(x)q(y))^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition ▶ 极化恒等式

$\forall x, y \in X$, 在实数域中,

$$a(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)),$$

在复数域中,

$$a(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)).$$

证明. $\forall x, y \in X$ 有

$$q(x+y) = q(x) + a(x, y) + a(y, x) + q(y),$$

$$q(x-y) = q(x) - a(x, y) - a(y, x) + q(y),$$

相减得

$$q(x+y) - q(x-y) = 2(a(x, y) + a(y, x))$$

若在实数域中, 等式成立.

若在复数域中, 则有

$$q(x+iy) = q(x) - ia(x, y) + ia(y, x) + q(y),$$

$$q(x-iy) = q(x) + ia(x, y) - ia(y, x) + q(y),$$

相减并令两端同乘以 i 得

$$iq(x+iy) - iq(x-iy) = 2(a(x, y) - a(y, x)),$$

与实数域等式相交即得等式.

Definition ▶ 内积与内积空间

线性空间 X 上定义了共轭双线性函数 $a(\cdot, \cdot)$ 及其诱导的二次型 $q(\cdot)$. 如果

$$(a) \ a(x, y) = \overline{a(y, x)}$$

$$(b) \ q(x) \geq 0, \text{ 等号成立当且仅当 } x = \theta,$$

则称 a 是 X 上的一个内积, 记为 $(\cdot, \cdot)$, 对应 $(X, (\cdot, \cdot))$ 称为内积空间.

Proposition

$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ 是 X 上的一个范数.

证明. 正定性显然.

$\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ 有

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{|\alpha|^2 (x, x)} = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

从而满足齐次性.

$\forall x, y \in X$, 上一命题的不等式可变为

$$|(x, y)| \leq \sqrt{|(x, x)| \cdot |(y, y)|} = \|x\| \cdot \|y\|,$$

由此可得

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2} \\ &\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2} \leq \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2} = \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

因此满足三角不等式. 综上可得 $\|\cdot\|$ 是范数.

因此, 内积空间配备如上定义的范数即为 B^* 空间.

Definition ▶ Hilbert 空间

完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**.

Example

$$\mathbb{R}^n, \vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = \sum x_i y_i, \|\vec{x}\| = (\sum x_i^2)^{1/2} = (\vec{x}, \vec{x})^{1/2}.$$

$$\mathbb{C}^n, (x, y) = \sum x_i \bar{y}_i, \|x\|^2 = \sum |x_i|^2.$$

$$l^2, x = \{x_n\}, \sum |x_i|^2 < \infty.$$

$$(x, y)_{l^2} = \sum x_i \bar{y}_i \leq (\sum |x_i|^2)^{1/2} (\sum |y_i|^2)^{1/2} < \infty.$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{M}), \int_{\Omega} |u|^2 d\mu < \infty, (u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u \bar{v} d\mu.$$

Proposition ▶ 内积的连续性

$(\cdot, \cdot)$ 连续.

即证 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \implies (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. $\|x_n - x\| \rightarrow 0, \|y_n - y\| \rightarrow 0 \implies |(x_n, y_n) - (x, y)| \rightarrow 0$. $\exists M > 0$ s.t. $\|x_n\| \leq M, \|y_n\| \leq M$. $|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq |(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq M \|x_n - x\| + \|x\| \|y_n - y\| \rightarrow 0$.

X, B^* 严格凸, 如果 $x, y \in X, x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1 \implies \|\alpha x + \beta y\| < 1, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$.

Proposition

内积空间是严格凸的.

$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + (1 - \lambda)^2 \|y\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\operatorname{Re}(x, y) \leq \lambda^2 \|x\|^2 + (1 - \lambda)^2 \|y\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\|x\|\|y\| = (\lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|)^2$. 如果 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则 $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 \leq 1$.

1. x, y 线性无关, $<$.

2. x, y 线性相关, 则 $x = -y$, $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \|(\lambda - (1 - \lambda))x\|^2 = (2\lambda - 1)^2 < 1$.

Index

Definitions

1.1.1 距离与度量空间	3
1.1.3 收敛	3
1.1.4 依测度收敛	4
1.1.6 闭集	5
1.1.7 基本列 (Cauchy 列) 与完备性 . . .	5
1.1.10 连续映射	6
1.1.12 压缩映射	6
1.2.1 等距同构	14
1.2.2 稠密子集	15
1.2.4 完备化空间	15
1.3.2 列紧、自列紧与列紧空间	20
1.3.6 ε 网	21
1.3.7 完全有界	21
1.3.9 可分性	22
1.3.11 紧性	23
1.3.14 一致有界与等度连续	24
1.4.1 复 (实) 线性空间	32
1.4.2 准范数 (准模)	34
1.4.3 F^* 空间与 F 空间	34
1.4.8	36
1.4.9 赋范线性空间 (B^* 空间) 与 Banach 空间 (B 空间)	37
1.4.16 强与等价	40
1.4.17 商空间	41

Examples

1.1.2 空间 $C[a, b]$	3
1.1.8	5
1.1.9	5
1.1.13	7
1.1.17 常微分方程初值问题的解的局部存 在唯一性	10
1.1.19 隐函数定理	10

1.2.3	15
1.2.7	18
1.2.8	18
1.3.1	20
1.3.16	26
1.4.4 空间 $C(M)$	34
1.4.5 空间 $\mathbb{R}^n$	34
1.4.6 空间 S	35
1.4.7 空间 $C(\mathbb{R}^n)$	36
1.4.10 空间 $L^p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$)	37
1.4.12 空间 $L^\infty(\Omega, \mu)$	38
1.4.14 $C^k(\overline{\Omega})$ 空间	39

Lemmas

1.1.15	8
------------------	---

Theorems

1.1.14 Banach 不动点定理——压缩映射 原理	8
1.1.18	10
1.2.6	16
1.3.8 Hausdorff	22
1.3.10	23
1.3.12	23
1.3.15 Arzelà-Ascoli	25
1.4.11 Riesz-Fischer 定理	37
1.4.19	42

Propositions

1.1.5	4
1.1.11	6
1.1.16	9
1.2.5	15

1.3.3	20	1.3.18	29
1.3.4	20	1.4.13	38
1.3.5	21	1.4.15	40
1.3.13	24	1.4.18	41
1.3.17	29		