



上海交通大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽 (25)



上海交通大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题（应用统计）
来源：小红书作者 Relax

1. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sqrt{\sin x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所得旋转体体积.

2. 设积分

$$\oint_L 2[xf(y) + g(y)]dx + [x^2g(y) + 2xy^2 - 2xf(y)]dy = 0,$$

其中 L 为任意一条平面曲线, 求可微函数 $f(y), g(y)$ 满足 $f(0) = -2, g(0) = 1$.

3. 设 $e < a < b < e^2$, 证明: $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $W_1, W_2, \dots, W_s$ 为 V 的 s 个子空间, $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s$. 证明: W 为 V 的子空间的充分必要条件是存在某个 $i (1 \leq i \leq s)$, 使得 $W = W_i$.5. 设 A 是 3 阶方阵, 线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中

$$\beta = (1, 2, 3)^\top, \gamma_0 = (1, 0, 1)^\top, \eta_1 = (2, -1, 0)^\top, \eta_2 = (1, 0, -1)^\top,$$

试求矩阵 A .

6. 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 $r(A) + r(B) \leq n$. 证明: 存在 n 阶可逆阵 M 使得 $AMB = O$.7. 设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 求统计量 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 和 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 的相关系数. 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是样本均值.

8. 叙述随机变量四种收敛性的定义及相互关系.

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, 1)$, 试求第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$ 的密度函数, 并求出 $E(X_{(k)})$ 和 $\text{Var}(X_{(k)})$.10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 试给出参数 $\ln \sigma$ 的估计并讨论其相合性.11. 甲乙两人进行一项竞技游戏, 初始时甲持有 10 元, 乙持有 20 元. 每局游戏规则如下: 若甲获胜, 乙向甲支付 1 元; 若乙获胜, 甲向乙支付 1 元, 且每局甲乙获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$. 游戏持续进行, 直至某一方资金归零之时终止, 此时另一方获胜. 求甲最终获胜的概率.

12. 叙述 UMVUE 的定义并写出几种常见的求解方法.



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题（数学）
来源：小红书作者 Relax

1. 设 $\{a_n\}$ 为一数列, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明: $|l| \leq 1$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 令 $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$.
 - (1) 求 $g'(x)$.
 - (2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.
3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = 0$. 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$.
4. 设函数项级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n + x^2}$.
 - (1) 求函数 $S(x)$ 的定义域.
 - (2) 讨论 $S(x)$ 在定义域内的连续性.
 - (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ 是否存在? 给出证明.
5. 设 $\partial\Omega$ 为区域 Ω 的边界曲面, 分片光滑, u, v 在 $\bar{\Omega}$ 上二阶连续可微, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u 在 $\mathbf{n}$ 方向上的方向导数.
 - (1) 证明:

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$
 - (2) 设 $\Delta u = 0$, p_0 为 Ω 的内点. 证明:

$$u(p_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{\cos(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n})}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2} u + \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$
6. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.
 - (1) 若 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$. 证明: $r(\mathbf{A}) = n$.
 - (2) 进一步设 $\mathbf{A}$ 的主对角元素均大于零, 证明: $|\mathbf{A}| > 0$.
7. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为正定矩阵, 证明: 矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 有唯一解 $\mathbf{X} = \mathbf{C}$, 并且 $\mathbf{C}$ 是正定矩阵.
8. 设 V 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 6 维线性空间, φ 是 V 上的一个线性变换, 其极小多项式 $m(x) = x^3 + x - 3$.
 - (1) 求线性变换 φ 的特征多项式.
 - (2) 求线性变换 φ 的有理标准型.
9. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 为三个实数域上两两互素的非常数多项式, 记 $\text{rad } f(x)$ 为多项式 $f(x)$ 在复数域上不相同的根的个数.
 - (1) 证明: 若 $f(x) + g(x) = h(x)$, 则 $\max\{\deg f(x), \deg g(x), \deg h(x)\} \leq \text{rad}(f(x)g(x)h(x)) - 1$.
 - (2) 证明: 若 $[f(x)]^n + [g(x)]^n = [h(x)]^n$, 则 $n = 1$ 或 2 .
10. 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 且 $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq n - 1$. 证明: 对任意自然数 k , 有

$$\text{rank}(\mathbf{A}^k) + \text{rank}(\mathbf{B}^k) \geq 2\text{rank}(\mathbf{AB}).$$



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题（应用统计）
来源：小红书作者 Relax

1. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 - y^2) e^{(x+y)^2} dx dy,$$

$$\text{其中区域 } D = \left\{ (x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right].$$

3. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.

$$(1) \text{ 若 } |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n. \text{ 证明: } r(A) = n.$$

$$(2) \text{ 进一步设 } A \text{ 的主对角元素均大于零, 证明: } |A| > 0.$$

4. 设 n 阶实方阵 A 的所有 1 阶主子式之和, 2 阶主子式之和均为 0. 证明:

$$(1) A \text{ 的特征值全为 } 0.$$

$$(2) A^n = O.$$

5. 设 $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, 证明: 事件 A 与 B 独立的充要条件是 $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\bar{B})$.

6. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. 定义 $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$, 求 S_n 的特征函数 $\varphi_n(t)$ 并求当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限分布.

7. 设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布 $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, 记

$$U = \begin{cases} 1, & X \geq 0, \\ -1, & X < 0, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1, & Y \geq 0, \\ -1, & Y < 0. \end{cases}$$

求 U 和 V 的相关系数 $\text{Corr}(U, V)$.

8. $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, \theta)$, $Y_1, \dots, Y_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, 2\theta)$, 试求 θ 的无偏估计中方差最小的统计量, 给出构造思路, 并证明其方差最小.

9. 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是从两点分布族 $\{b(1, p) : 0 < p < 1\}$ 中抽取的简单样本, 且 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ 为充分完备统计量, 求 $g(p) = p(1-p)$ 的 UMVUE.

10. 设 $x_1, \dots, x_n$ 为来自 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 试求假设 $H_0: \sigma^2 = 1$ vs $H_1: \sigma^2 \neq 1$ 的似然比检验.