



上海交通大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽 (25)



上海交通大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题（应用统计）
来源：小红书作者 Relax

1. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sqrt{\sin x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所得旋转体体积。

解答：旋转体体积公式

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{+\infty} f^2(x) dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx. \\ \int e^{-2x} \sin x dx &= -\frac{e^{-2x}(2 \sin x + \cos x)}{5} + C, \\ V &= \pi \left(-\frac{e^{-2x}(2 \sin x + \cos x)}{5} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

2. 设积分

$$\oint_L 2[xf(y) + g(y)]dx + [x^2g(y) + 2xy^2 - 2xf(y)]dy = 0,$$

其中 L 为任意一条平面曲线，求可微函数 $f(y), g(y)$ 满足 $f(0) = -2, g(0) = 1$ 。

解答：由曲线积分与路径无关， $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$2xg(y) + 2y^2 - 2f(y) = 2xf'(y) + 2g'(y).$$

比较 x 的系数与常数项：

$$\begin{cases} g(y) = f'(y) \\ 2y^2 - 2f(y) = 2g'(y) \end{cases} \implies f''(y) + f(y) = y^2.$$

通解 $f(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y + y^2 - 2$ 。初值 $f(0) = -2 \implies C_1 = 0, g(0) = f'(0) = 1 \implies C_2 = 1$ 。

$$f(y) = \sin y + y^2 - 2, \quad g(y) = \cos y + 2y.$$

3. 设 $e < a < b < e^2$ ，证明： $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$ 。

解答：令 $f(x) = \ln^2 x$ ，由拉格朗日中值定理， $\exists \xi \in (a, b)$ ，

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2 \ln \xi}{\xi}(b - a).$$

记 $h(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ ， $h'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} < 0, x > e$ 。 $h(x)$ 在 (e, e^2) 严格递减， $h(\xi) > h(e^2) = \frac{4}{e^2}$ ，代入即证。

4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间， $W_1, W_2, \dots, W_s$ 为 V 的 s 个子空间， $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s$ 。

证明： W 为 V 的子空间的充分必要条件是存在某个 $i (1 \leq i \leq s)$ ，使得 $W = W_i$ 。

证明：必要性：反证。若不存在，任取 $w_i \in W_i \setminus \bigcup_{j \neq i} W_j$ 。利用子空间并集定理，有限个真子空间的并不能构成子空间，可得矛盾。充分性显然。

5. 设 A 是 3 阶方阵，线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为

$$x = \gamma_0 + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2,$$

其中 $\beta = (1, 2, 3)^T, \gamma_0 = (1, 0, 1)^T, \eta_1 = (2, -1, 0)^T, \eta_2 = (1, 0, -1)^T$ ，试求矩阵 A 。



解答: $A\gamma_0 = \beta$, $A\eta_1 = \mathbf{0}$, $A\eta_2 = \mathbf{0}$ 。记 $P = (\gamma_0, \eta_1, \eta_2)$, $AP = (\beta, \mathbf{0}, \mathbf{0})$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A = (\beta, \mathbf{0}, \mathbf{0})P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 $r(A) + r(B) \leq n$ 。证明: 存在 n 阶可逆矩阵 M 使得 $AMB = O$ 。

证明: 设 $r = \text{rank}(A)$, $s = \text{rank}(B)$, $r + s \leq n$ 。由相抵标准形, $\exists$ 可逆阵 P, Q , $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$;

$\exists$ 可逆阵 R, S , $B = R \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_s \end{pmatrix} S$ 。取 $M = Q^{-1} \begin{pmatrix} O & I_{n-r} \\ I_r & O \end{pmatrix} R^{-1}$, 则 $AMB = O$, M 可逆。

7. 设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 求统计量 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 和 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 的相关系数。其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是样本均值。

解答: 记 $U = \sum (X_i - \bar{X})^2$, $V = \sum (X_i - \mu)^2$ 。

$$U/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1), \quad V/\sigma^2 \sim \chi^2(n).$$

$$V = U + n(\bar{X} - \mu)^2, \quad \text{Cov}(U, V) = \text{Var}(U) = 2(n-1)\sigma^4,$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}} = \frac{2(n-1)\sigma^4}{\sqrt{2(n-1)\sigma^4 \cdot 2n\sigma^4}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

8. 叙述随机变量四种收敛的定义及相互关系。

解答:

(a) 依概率收敛: $X_n \xrightarrow{P} X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$;

(b) 几乎必然收敛 (以概率 1 收敛): $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$;

(c) r -阶矩收敛: $\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X|^r = 0$;

(d) 依分布收敛: $X_n \xrightarrow{d} X$, 在分布函数 F 的连续点上 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ 。

关系: 几乎必然收敛 $\implies$ 依概率收敛 $\implies$ 依分布收敛; r -阶收敛 $\implies$ 依概率收敛。

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, 1)$, 试求第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$ 的密度函数, 并求出 $E(X_{(k)})$ 和 $\text{Var}(X_{(k)})$ 。

解答: 次序统计量密度

$$f_{X_{(k)}}(x) = \begin{cases} \binom{n}{k-1, 1, n-k} x^{k-1} (1-x)^{n-k}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 $X_{(k)} \sim \text{Beta}(k, n-k+1)$ 。

$$E(X_{(k)}) = \frac{k}{n+1}, \quad \text{Var}(X_{(k)}) = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 试给出参数 $\ln \sigma$ 的估计并讨论其相合性。

解答: 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$, 由大数定律 $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ 。取估计量 $\widehat{\ln \sigma} = \frac{1}{2} \ln S^2$ 。由连续映射定理, $\widehat{\ln \sigma} \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \ln \sigma^2 = \ln \sigma$, 故该估计是相合估计。



11. 甲乙两人进行一项竞技游戏，初始时甲持有 10 元，乙持有 20 元。每局游戏规则如下：若甲获胜，乙向甲支付 1 元；若乙获胜，甲向乙支付 1 元，且每局甲乙获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$ 。游戏持续进行，直至某一方资金归零之时终止，此时另一方获胜。求甲最终获胜的概率。

解答：对称随机游走赌徒破产问题，本金 $a = 10$, $b = 20$ ，总资金 30。公平游戏下甲获胜概率

$$P = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}.$$

12. 叙述 UMVUE 的定义并写出几种常见的求解方法。

解答：UMVUE（一致最小方差无偏估计）：设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，对任意 θ 的无偏估计 $\tilde{\theta}$ ，恒有 $\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\tilde{\theta})$ ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 UMVUE。

常用求解方法：

- (a) 充分完备统计量 + 无偏估计（Lehmann-Scheffé 定理）；
- (b) 零无偏估计法；
- (c) C-R 下界法（达到克拉美 - 罗下界的无偏估计必为 UMVUE）。



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题（数学）

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $\{a_n\}$ 为一数列，满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。证明： $|l| \leq 1$ 。

证明：反证法。若 $|l| > 1$ ，取 $\varepsilon = \frac{|l| - 1}{2} > 0$ ，则存在 N ，当 $n > N$ 时

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > |l| - \varepsilon = \frac{|l| + 1}{2} > 1.$$

于是 $|a_{n+1}| > \frac{|l| + 1}{2} |a_n|$ ，递推得 $|a_n| \rightarrow +\infty$ ，与 $\{a_n\}$ 收敛矛盾。故 $|l| \leq 1$ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，令 $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 。

(1) 求 $g'(x)$ 。

(2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

解答：先换元，令 $u = xt$ 。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(1) 当 $x \neq 0$ ，

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}.$$

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ ，则 $f(0) = 0$ 。由导数定义：

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}.$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = g'(0).$$

所以 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 连续。

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = 0$ 。证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}.$$

证明：构造辅助函数

$$F(x) = e^{-\frac{x}{b-a}} (f(x) - f(a)).$$

$$F'(x) = e^{-\frac{x}{b-a}} \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b-a} \right).$$

只需证 $\exists \xi$ 使 $F'(\xi) = 0$ 。- 若 $f(c) = f(a)$ ，则 $F(c) = 0 = F(a)$ ，由罗尔定理即得。- 若 $f(c) \neq f(a)$ ，不妨 $f(c) > f(a)$ ，则 $F(c) > 0$ 。 $F'(c) = e^{-\frac{c}{b-a}} \left(-\frac{f(c) - f(a)}{b-a} \right) < 0$ 。于是 F 在 c 附近递减，故 $\exists x_1 > c$ 使 $F(x_1) < F(c)$ 。 $F(a) = 0$ ，由介值 $\exists x_2 \in (a, c)$ 使得 $F(x_2) = F(x_1)$ ，罗尔定理给出 $\xi \in (x_2, x_1)$ ， $F'(\xi) = 0$ 。命题得证。

4. 设函数项级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2}$ 。

(1) 求函数 $S(x)$ 的定义域。



(2) 讨论 $S(x)$ 在定义域内的连续性.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ 是否存在? 给出证明.

解答: (1) 定义域: $x \in \mathbb{R}$. 通项 $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2}$, e^{-nx} 收敛, 交错级数. (2) 对任意 $x_0 > 0$, 取闭区间 $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$; 由狄利克雷判别法级数内闭一致收敛, 每一项连续, 故 $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续; $x = 0$ 处级数收敛, 由阿贝尔定理, $S(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续. (3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2} = 0.$$

极限存在, 值为 0.

5. 设 $\partial\Omega$ 为区域 Ω 的边界曲面, 分片光滑, u, v 在 $\bar{\Omega}$ 上二阶连续可微, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u 在 $\mathbf{n}$ 方向上的方向导数.

(1) 证明:

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

(2) 设 $\Delta u = 0$, p_0 为 Ω 的内点. 证明:

$$u(p_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{\cos(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n})}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2} u + \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

证明: (1) 由散度定理, $\nabla \cdot (v \nabla u) = v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v$, 两边在 Ω 积分

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) \, dV = \iint_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

左边展开即得恒等式.

(2) 取格林函数基本解 $v = \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|}$, 它在 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ 奇异. 挖去以 $\mathbf{p}_0$ 为心半径 ε 的小球 B_ε , 在 $\Omega \setminus B_\varepsilon$ 上 $\Delta v = 0, \Delta u = 0$. 代入第一问恒等式, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 取极限即得该调和函数的泊松积分表达式.

6. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.

(1) 若 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: $r(A) = n$.

(2) 进一步设 A 的主对角元素均大于零, 证明: $|A| > 0$.

证明: (1) A 严格对角占优矩阵. 若 $\det(A) = 0$, 则齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 存在非零解 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. 设 $|x_k| = \max_i |x_i| > 0$, 考察第 k 个方程

$$a_{kk}x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j, \quad |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}|.$$

约去 $|x_k|$ 得到 $|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, 矛盾. $\det(A) \neq 0$, 故秩为 n .

(2) 严格对角占优, 对角线元素全正. 考察 $A(t) = (a_{ij}(t))$, $a_{ii}(t) = a_{ii}$, $a_{ij}(t) = ta_{ij}, i \neq j, t \in [0, 1]$. $A(t)$ 始终严格对角占优, $\det(A(t)) \neq 0$. $\det(A(0)) = \prod a_{ii} > 0$. 行列式关于 t 连续, 不能变号, 故 $\det(A) = \det(A(1)) > 0$.

7. 设 A, B 均为正定矩阵, 证明: 矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解 $X = C$, 并且 C 是正定矩阵.

证明: 在复空间上, A 可正交对角化. 算子 $T(X) = AX + XA$, 它的特征值为 $\lambda_i + \lambda_j > 0$ (λ_i 是 A 的特征根), 所以 T 可逆, 方程解唯一. 对 $AX + XA = B$ 两边取共轭转置: $X^*A + AX^* = B$, 由唯一性 $X = X^*$, X 是 Hermite 矩阵. 设 μ 是 X 的特征值, $\mathbf{y}$ 为对应特征向量, 则

$$\mathbf{y}^* A X \mathbf{y} + \mathbf{y}^* X A \mathbf{y} = \mu \mathbf{y}^* A \mathbf{y} + \mu \mathbf{y}^* A \mathbf{y} = 2\mu \mathbf{y}^* A \mathbf{y} = \mathbf{y}^* B \mathbf{y} > 0.$$

$\mathbf{y}^* A \mathbf{y} > 0$, 于是 $\mu > 0$, X 正定.



8. 设 V 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 6 维线性空间, φ 是 V 上的一个线性变换, 其极小多项式 $m(x) = x^3 + x - 3$.
- (1) 求线性变换 φ 的特征多项式.
- (2) 求线性变换 φ 的有理标准型.

解答: $m(x) = x^3 + x - 3$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约 (有理根检验无有理根, 三次不可约)。极小多项式次数为 3, $\dim V = 6$, 不变因子为 $\{x^3 + x - 3, x^3 + x - 3\}$ 。(1) 特征多项式: $f(x) = (x^3 + x - 3)^2$. (2) 有理标准形为两个友块对角:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 为三个实数域上两两互素的非常数多项式, 记 $\text{rad } f(x)$ 为多项式 $f(x)$ 在复数域上不相同的根的个数。

- (1) 证明: 若 $f(x) + g(x) = h(x)$, 则 $\max\{\deg f(x), \deg g(x), \deg h(x)\} \leq \text{rad}(f(x)g(x)h(x)) - 1$.
- (2) 证明: 若 $[f(x)]^n + [g(x)]^n = [h(x)]^n$, 则 $n = 1$ 或 2 .

证明: (1) 多项式版本的 Mason-Stothers 定理, 即 ABC 定理, 直接给出结论。(2) 若 $f^n + g^n = h^n$, 两两互素, 由 ABC 定理

$$\max(\deg f^n, \deg g^n, \deg h^n) \leq \text{rad}(f^n g^n h^n) - 1 = \text{rad}(fgh) - 1.$$

$\text{rad}(fgh) \leq \deg f + \deg g + \deg h$ 。设 $\deg f \geq \deg g, \deg h$, 则

$$n \deg f \leq \deg f + \deg g + \deg h - 1 \leq 3 \deg f - 1.$$

$n \geq 3$ 导出矛盾, 故 $n = 1, 2$ 。

10. 设 n 阶方阵 A, B 满足 $A + B + AB = O$, 且 $\text{rank}(A) \geq n - 1$ 。证明: 对任意自然数 k , 有

$$\text{rank}(A^k) + \text{rank}(B^k) \geq 2\text{rank}(AB).$$

证明: 条件变形: $(A + I)(B + I) = I$ 。于是 $A + I$ 与 $B + I$ 互为逆矩阵, 因此 $A + I, B + I$ 均可逆。

$$AB = -A - B.$$

利用秩不等式 $\text{rank}(X) + \text{rank}(Y) \geq \text{rank}(X + Y)$ 。又 $(A + I)$ 可逆, $A^k + I = (A + I)(A^{k-1} - A^{k-2} + \cdots + I)$, $A^k + I$ 可逆。同理 $B^k + I$ 可逆。再结合 $\text{rank}(A^k) + \text{rank}(B^k) \geq 2\text{rank}(AB)$, 利用已知 $\text{rank}(A) \geq n - 1$, 分 $\text{rank}(A) = n$ 与 $\text{rank}(A) = n - 1$ 两种情形讨论可证得不等式。



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题（应用统计）
来源：小红书作者 Relax

1. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 - y^2) e^{(x+y)^2} dx dy,$$

$$\text{其中区域 } D = \left\{ (x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

解答：极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。由区域条件： $y \leq x \implies \tan \theta \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1$ 。

$$x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\theta, \quad (x + y)^2 = r^2(1 + \sin 2\theta), \quad dx dy = r dr d\theta.$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \cos 2\theta \cdot e^{r^2(1+\sin 2\theta)} \cdot r dr d\theta.$$

对内层先对 θ 换元，令 $u = 1 + \sin 2\theta, du = 2 \cos 2\theta d\theta$ ，最后算出结果

$$I = \frac{e - 1}{4}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数，求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right].$$

解答：欧拉 - 麦克劳林求和公式，或者拆分积分

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx.$$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(- \int_x^{\frac{k}{n}} f'(t) dt \right) dx.$$

交换积分次序，取极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = - \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

3. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.

(1) 若 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: $r(A) = n$.

(2) 进一步设 A 的主对角元素均大于零，证明: $|A| > 0$.

证明: (1) A 为严格对角占优矩阵。反证，若 $\det(A) = 0$ ，则 $Ax = 0$ 有非零解。设 $|x_k| = \max |x_i| > 0$ ，考察第 k 行：

$$a_{kk}x_k = - \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j, \quad |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

约去 $|x_k|$ ，得到 $|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ ，矛盾。 $\det(A) \neq 0, r(A) = n$.

(2) 构造连续矩阵族 $A(t)$ ，对角线不变，非对角元乘 $t, t \in [0, 1]$ 。 $A(t)$ 恒严格对角占优， $\det A(t) \neq 0$ 。 $\det A(0) = \prod a_{ii} > 0$ 。行列式连续不能变号， $\det(A) = \det A(1) > 0$ 。

4. 设 n 阶方阵 A 的所有 1 阶主子式之和，2 阶主子式之和均为 0。证明：

(1) A 的特征值全为 0。



(2) $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$.

证明: (1) 特征多项式

$$|\lambda I - \mathbf{A}| = \lambda^n - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n \det \mathbf{A}.$$

$\text{tr}(\mathbf{A})$ 即全部 1 阶主子式之和, s_2 即全部 2 阶主子式之和。题设 $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0, s_2 = 0$ 。设特征根为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则

$$\sum \lambda_i = 0, \quad \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = 0 \implies \sum \lambda_i^2 = \left(\sum \lambda_i\right)^2 - 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = 0.$$

若 $\mathbf{A}$ 是实矩阵, 并且可对角化, 则特征根全为 0; 在复数域, 结合牛顿幂和, $p_1 = p_2 = 0$, 再由对称多项式, 极小多项式根只能为 0, 故所有特征根都是 0。

(2) 所有特征根为 0, 则 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形对角线元素全为 0, 幂零矩阵。幂零指数不超过阶数 n , 于是 $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$.

5. 设 $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, 证明: 事件 A 与 B 独立的充要条件是 $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\bar{B})$.

证明:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\bar{B}) \iff \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})}.$$

利用 $\mathbb{P}(A\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$, 交叉相乘:

$$\mathbb{P}(AB)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(B)(\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)).$$

展开化简: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, 即独立。每一步可逆, 充要条件成立。

6. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ 。定义 $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$, 求 S_n 的特征函数 $\varphi_n(t)$ 并求当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限分布。

解答: 单个 X_i 的特征函数:

$$\varphi_{X_i}(t) = \mathbb{E}e^{itX_i} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \cos t.$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \varphi_n(t) = \mathbb{E} \exp \left(it \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \ln \cos \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

极限特征函数是标准正态分布 $N(0, 1)$ 的特征函数。故极限分布为 $N(0, 1)$.

7. 设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布 $\mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$, 记

$$U = \begin{cases} 1 & X \geq 0, \\ -1 & X < 0, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1 & Y \geq 0, \\ -1 & Y < 0. \end{cases}$$

求 U 和 V 的相关系数 $\text{Corr}(U, V)$.

解答: U, V 都是对称取值 ± 1 , $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = 0$, $\text{Var}(U) = \text{Var}(V) = 1$.

$$\text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{P}(UV = 1) - \mathbb{P}(UV = -1).$$

$$\mathbb{P}(UV = 1) = \mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0) + \mathbb{P}(X < 0, Y < 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho.$$

$$\mathbb{P}(UV = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \rho.$$

$$\text{Corr}(U, V) = \mathbb{E}(UV) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho.$$



8. $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, \theta)$, $Y_1, \dots, Y_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, 2\theta)$, 试求 θ 的无偏估计中方差最小的统计量, 给出构造思路, 并证明其方差最小.

解答: 由因子分解定理, $X_{(n)} = \max\{X_i\}$, $Y_{(m)} = \max\{Y_j\}$ 为联合充分统计量. $X_{(n)} \sim \text{Beta}(n, 1) \cdot \theta$, $\mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta$, $\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 无偏. $Y_{(m)}$ 支撑上限 2θ , $\mathbb{E}(Y_{(m)}) = \frac{m}{m+1} \cdot 2\theta$, $\hat{\theta}_2 = \frac{m+1}{2m}Y_{(m)}$ 无偏. 由 Lehmann-Scheffé, 充分完备统计量的无偏估计是 UMVUE. 最优估计为两个无偏估计的加权组合, 权重反比于各自方差, 得到方差最小无偏估计.

9. 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是从两点分布族 $\{b(1, p) : 0 < p < 1\}$ 中抽取的简单样本, 且 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ 为充分完备统计量, 求 $g(p) = p(1-p)$ 的 UMVUE.

解答: $T \sim B(n, p)$. 先找无偏估计:

$$\mathbb{E}\left(\frac{T(n-T)}{n(n-1)}\right) = p(1-p).$$

由 Lehmann-Scheffé 定理, UMVUE 为

$$\widehat{g(p)} = \frac{T(n-T)}{n(n-1)}.$$

10. 设 $x_1, \dots, x_n$ 为来自 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的样本, 试求假设 $H_0: \sigma^2 = 1$ vs $H_1: \sigma^2 \neq 1$ 的似然比检验.

解答: 似然函数

$$L(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2\right).$$

$\Omega = \{\sigma^2 > 0\}$, $\omega = \{\sigma^2 = 1\}$. Ω 上 MLE: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2$. 似然比

$$\lambda = \frac{L(1)}{L(\hat{\sigma}^2)} = \left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum x_i^2 + \frac{n}{2}\right).$$

拒绝域: $\lambda \leq c$, 等价于 $\sum x_i^2$ 太大或太小. 令 $W = \sum x_i^2$, H_0 下 $W \sim \chi^2(n)$, 显著性水平 α 拒绝域:

$$W \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n) \quad \text{或} \quad W \geq \chi_{\alpha/2}^2(n).$$