



# 中国科学技术大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊 (25)



中国科学技术大学数学科学学院  
2018 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 计算下列各题:

(a) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3(1+x)^5}$ .

(b) 设  $z = f(\ln \frac{y}{x}, xy)$ , 其中  $f(u, v)$  具有一阶连续的偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

(c) 求  $\iint_{\Omega} (y+x^2) d\sigma$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ ,  $R > 0$ .

(d) 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  是 Gauss 公式中的闭区域, 向量场  $f \in C^2(\bar{\Omega})$  在  $\Omega$  中处处不为零, 且满足

$$\nabla f \cdot \nabla f = 2f, \nabla \cdot (f \nabla f) = f.$$

其中  $\vec{n}$  为  $\Omega$  的单位外法向量, 求  $\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 证明:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

3. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续且取正值. 证明:

(a) 存在唯一  $c \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^c f(t) dt = \int_c^1 \frac{1}{f(t)} dt.$$

(b) 对每一个  $n \in \mathbb{N} (n \geq 2)$ , 存在唯一  $x_n \in (\frac{1}{n}, 1)$ , 使得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)} dx,$$

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

4. 证明: 在有限区间  $I$  上  $f(x)$  一致连续的充要条件是对每一  $I$  上的 Cauchy 列  $\{x_n\}, \{f(x_n)\}$  为 Cauchy 列.

5. 设  $f(t) = \int_1^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$ , 证明:

(a)  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

(c)  $\int_0^\pi f(t) \sin t dt \leq 0$ .

(d)  $f(t)$  在  $(0, \pi)$  上至少有一个零点.

线性代数



1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \{B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AB = BA\}$$

求  $\dim V$ .

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $\det A$  与  $A^{-1}$ .

3. 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 证明:  $\text{rank}(AB - I_n) \leq \text{rank}(A - I_n) + \text{rank}(B - I_n)$ .

4. 设  $\mathcal{A}$  为线性空间  $V$  上的线性变换, 若存在  $k \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\text{Im } \mathcal{A}^k = \text{Im } \mathcal{A}^{k+1} = \dots = \text{Im } \mathcal{A}^{k+l} \quad (\forall l \in \mathbb{N}^+)$$

成立, 设  $k$  为使得  $\text{Im } \mathcal{A}^k = \text{Im } \mathcal{A}^{k+1}$  成立的最小正整数, 问  $k$  与  $\mathcal{A}$  的极小多项式有何关系?

5. 设

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},$$

设  $\mathcal{A}$  为  $\mathbb{R}^3$  到  $V$  上的正交投影变换, 求  $\mathcal{A}$  在自然基下的矩阵与特征值.

6. 设  $A, B$  为实对称正定阵, 证明:  $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\det A \cdot \det B}$ .

### 实变函数

1. 设  $A$  是  $\mathbb{R}^p$  中可测集,  $B$  是  $\mathbb{R}^q$  中可测集, 证明:  $A \times B$  是  $\mathbb{R}^{p+q}$  中可测集, 且有

$$m(A \times B) = mA \cdot mB,$$

其中  $m$  为 Lebesgue 测度.

2. 若  $f(x)$  为  $\mathbb{R}^n$  中上的可测函数, 证明:  $f(x-y)$  为  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  中的可测函数.

3. 设  $f(x)$  是可测集  $E \subset \mathbb{R}$  上的非负可测函数, 证明: 若  $f(x) \in L(E)$ , 则  $f(x)$  在  $E$  上几乎处处有限.

4. 设  $E \subset \mathbb{R}$  是可测集,  $f(x)$  是  $E$  上的可测函数, 证明: 若  $f(x) \in L(E)$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在具有紧支集的连续函数  $g_\varepsilon(x)$  使得

$$\int_E |f(x) - g_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon.$$

$f(x)$  为  $[a, b]$  上的绝对连续函数, 且  $f'(x) = 0$  在  $[a, b]$  上几乎处处成立, 证明: 则  $f(x)$  必为常值函数.

### 复变函数



## 1. 计算题:

(a) 计算积分

$$\int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$$

(b) 利用留数定理计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

2. 叙述 Schwarz 引理, 并用之证明: 若  $f(z)$  是  $D = \{z : |z| < 1\}$  上的全纯函数满足  $f(0) = 0$ , 且  $\operatorname{Re} f(z) \leq 1, \forall z \in D$ , 则

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}.$$

3. 叙述 Rouché 定理, 并证明方程

$$(z+1)e^{-z} = z+2$$

在右半平面没有根.

4. 叙述亚纯函数的定义, 并证明: 若  $f(z)$  为  $\mathbb{C}$  上的亚纯函数, 且满足

$$|f(z)| = 1, \forall |z| = 1,$$

则  $f(z)$  为有理函数.

### 近世代数

- 在  $\mathbb{F}_3[x]$  中将  $x^3 + x + 2$  表示成不可约的首一多项式的乘积, 其中  $\mathbb{F}_3$  是仅有 3 个元素的有限域.
- 设  $A, B, C$  是群  $G$  的子群, 且  $A \subset B \cup C$ . 证明:  $A \subset B$  或  $A \subset C$ .
  - 设  $A, B$  是群  $G$  的子群, 证明:  $A \cup B$  是  $G$  的子群  $\iff A \subset B$  或  $B \subset A$ .
  - 证明: 任何一个群不能表示为两个真子群的并, 并举一个可以表示为 3 个真子群的并群的例子.
- 给出群  $G$  中的正规子群的定义, 并证明群  $G$  中指数为 2 的子群一定正规, 最后举一个指数为 3 但不是正规子群的例子.
- 设  $p$  是一个素数,  $n$  是一个正整数,  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  是有限域  $\mathbb{F}_p$  上  $n$  阶可逆矩阵构成的一般线性群.
  - 求群  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  的阶数.
  - 找出  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)$  的一个 Sylow  $p$ -子群.



## 中国科学技术大学数学科学学院

## 2019 年夏令营招生考试试题

## 数学分析 (满分 80 分)

1. 请写出一个具体的定义在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的函数  $f(x, y)$ , 使得下式左右两边都有意义, 但是却不相等.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) dy.$$

能否找到一个二元连续函数  $f(x, y)$  满足如上要求? 并说明理由.

2. 设某函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n (n > 1)$  有一阶连续偏导数, 而且存在  $C > 0$ , 对于  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ , 满足

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|.$$

证明:  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  在  $x$  点的 Jacobi 矩阵  $Df(x)$  可逆.

3. 设有二阶连续可导的函数  $f(x, y)$  满足

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

而且

$$f(1, 1) = f(1, -1) = f(-2, 0),$$

证明:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2019, \quad \forall x^2 + y^2 \leq 1.$$

4. 设函数列  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上是一致收敛, 且对于任何  $x \in [0, 1]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  收敛. 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  在  $[0, 1]$  上是否一致收敛, 请给出理由.

## 线性代数 (满分 80 分)

1. 二次曲面在直角坐标系下的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 2z - 1 = 0,$$

利用正交变换和平移将其化为标准方程, 并判断这是什么类型的曲面.

2. 设  $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ , 考虑复线性映射  $\varphi: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ ,  $X \mapsto AX - XA$ . 试计算  $\varphi$  的特征多项式以及特征向量, 并判断  $\varphi$  是否可对角化.

3. 考虑  $\mathbb{R}^4$  中的向量组

$$S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 1, 1), \alpha_3 = (2, 1, 1, 0), \alpha_4 = (3, 3, 2, 1), \alpha_5 = (1, -1, 1, 1)\}.$$

计算  $S$  中包含向量  $\alpha_2$  的所有极大线性无关组.

4. 设  $n$  阶复方阵  $A, B$  乘法可交换. 证明: 存在可逆复方阵  $P$ , 使得  $PAP^{-1}$  和  $PBP^{-1}$  同时为上三角阵.



## 实变函数（满分 40 分）

1. 设  $\{f_n(x)\}$  是  $[0, 1]$  上的可测函数列,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , a.e. 若  $1 \leq q < p < \infty$ , 并且  $\|f_n(x)\|_{L^p}$  是有界的. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^q dx = 0$$

2. 设  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $m^*E > 0$ , 其中  $m^*$  是 Lebesgue 外测度. 证明:  $\forall \alpha \in (0, 1)$ , 存在开区间  $I \subset \mathbb{R}$ , 使得

$$m^*(I \cap E) \geq \alpha m^*I.$$

## 复变函数（满分 40 分）

1. 判断方程  $z^4 - 8z - 10 = 0$  在圆环  $1 < |z| < 3$  内根的个数并说明理由.

2. 设  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ,

$$f \in H(D) \cap C(\overline{D}), |f(z)| = 1, \forall z \in \partial D.$$

证明:  $f(z)$  可解析延拓为有理函数.

## 微分几何（满分 40 分）

1. 设区域  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^\infty(D)$ , 考虑三维欧式空间  $\mathbb{R}^3$  中的曲面

$$S : (x_1, x_2, f(x_1, x_2)), (x_1, x_2) \in D.$$

(a) 求曲面  $S$  的第一基本形式和第二基本形式.

(b) 称平均曲率为零的曲面为极小曲面. 证明: 若  $f$  满足方程

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f'_i}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0,$$

则曲面  $S$  为极小曲面.

2. (a) 二维平面与三维单位闭球是否等距同构? 并说明理由.

(b) 测地线是否为最短线? 并说明理由.

## 近世代数（满分 40 分）

1. 设  $S_4$  中  $(1, 2)(3, 4)$  所在的共轭类为  $C$ , 求  $C$  中所有元素在共轭作用下的稳定子群.

2. 设  $\mathbb{F}^2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ . 问:  $\mathbb{F}^2/(t^2)$ ,  $\mathbb{F}^2/(t^2 + t + \overline{1})$ ,  $\mathbb{F}^2/(t^2 + \overline{1})$  三者之间是否存在环同构? 请说明理由.



## 中国科学技术大学数学科学学院

## 2021 年夏令营招生考试试题

## 数学分析 (满分 80 分)

1. 判断开区间  $(0, 1)$  上的有界凸函数是否在  $(0, 1)$  上一致连续. (若问题正确, 请给予严格证明; 否则, 请给出反例.)

2. 设

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n! \pi x) \text{ 收敛} \right\}.$$

证明:  $\Omega$  在  $\mathbb{R}$  中稠密, 而且  $\Omega \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ .

3. 设函数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  可微, 并且  $f'$  在  $[0, 1]$  上恒不为 1, 若  $f(0) = f(1) > 1$  且

$$f(1) + \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} - nf(1).$$

4. 设  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

$$F(t) = \int_0^t \left[ \int_0^t f(xy) dx \right] dy.$$

证明:  $tF''(t) + F'(t) - 4tf(t^2)$  恒为常数.

## 线性代数 (满分 80 分)

1. 设给定二次曲面在直角坐标系下的方程为  $xy + xz - yz + 2x - z + 1 = 0$ . 请利用正交变换以及平移将其化为标准方程, 并判断这是什么类型的曲面.

2. 设  $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . 试证明极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})}$  存在, 并且计算该极限值. 这里  $\text{tr}$  表示矩阵的迹.

3. 设  $M_2(\mathbb{R})$  为全体  $2 \times 2$  实方阵的实线性空间. 对于任意  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , 定义线性函数

$$\varphi_A: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto \text{tr}(AX).$$

设  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ , 若  $\varphi_A = \varphi_B$ , 证明:  $A = B$ .

4. 设  $X, Y$  为两个  $n$  阶正定对称实方阵, 证明:  $\det(X + Y) > \det(X)$ .

## 实变函数 (满分 40 分)

1. 设  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + |x|} f(x - n) dx$ .

2. 设  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . 证明:

(a) 积分  $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t) dt$  对几乎所有的  $x \in \mathbb{R}$  存在, 且  $h \in L^1(\mathbb{R})$ .



(b)  $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

### 复变函数 (满分 40 分)

1. 用留数法计算积分

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta.$$

2. 设  $f(z)$  是整函数, 满足: 只要  $|z_n| \rightarrow \infty$  就有  $|f(z_n)| \rightarrow \infty$ . 证明:  $f(z)$  是多项式.

### 微分几何 (满分 40 分)

1. 将欧氏空间  $\mathbb{E}^3$  中  $xz$ -平面上的圆圈

$$S_r(a) = \{(x, y, z) \mid (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$$

绕  $z$  轴旋转一周生成环面, 记为  $\mathbb{T}_{a,r}$ , 其中  $a > r > 0$ .

- (a) 请写出  $\mathbb{T}_{a,r}$  的参数表示, 并计算  $\mathbb{T}_{a,r}$  的第一、第二基本形式.  
 (b) 计算  $\mathbb{T}_{a,r}$  的面积和高斯曲率, 并找出  $\mathbb{T}_{a,r}$  的椭圆点和双曲点的区域.  
 (c) 计算点  $(a, 0, r)$  绕  $z$  轴生成的圆在  $\mathbb{T}_{a,r}$  上的测地曲率, 并判断其是否为测地线.
2. 请判断如下结论是否正确, 并说明理由.

- (a) 设  $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  是  $\mathbb{E}^3$  中曲面  $\Sigma_1, \Sigma_2$  间的光滑映射, 且在对应点处具有相同的高斯曲率, 即

$$K_{\sigma_1}(p) = K_{\sigma_2}(f(p)), \quad \forall p \in \Sigma_1,$$

则  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  局部等距.

- (b) 设  $\Sigma$  是  $\mathbb{E}^3$  中具有正高斯曲率的紧致连通曲面,  $\gamma_1, \gamma_2$  为  $\Sigma$  上两条简单闭测地线, 则  $\gamma_1, \gamma_2$  会相交.

### 近世代数 (满分 40 分)

1. 考虑交错群  $A_4$ , 以及元素  $(123)$  所在的共轭类  $C$ . 考虑  $A_4$  在  $C$  上的共轭作用

$$A_4 \times C \rightarrow C, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}.$$

$x \in C$  的稳定化子定义为

$$\text{Stab}(x) = \{g \in A_4 \mid g \cdot x = x\}.$$

试具体计算  $(123)$  的稳定化子, 并列出  $C$  中的所有元素.

2. 考虑三元域  $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ , 以及一元多项式环  $\mathbb{F}_3[t]$ , 其中  $t$  为变元, 考虑商环  $K = \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1)$ . 问:  $K$  是否为整环? 请具体列出  $K$  的所有含单位元的子环.



## 中国科学技术大学数学科学学院

## 2022 年夏令营招生考试试题

## 数学分析 (满分 80 分)

- (20 分) 设  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  是闭区间  $[0, 1]$  上的可微函数, 满足对任意  $x \in [0, 1]$ , 有  $0 < f(x) < 1$  且  $f'(x) \neq 1$ . 证明: 存在唯一的  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .
- (20 分) 计算定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$ .
- (20 分) 记圆锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  被平面  $z = a$  和  $z = b$  ( $0 < a < b$ ) 所夹的部分为  $\Sigma$ , 假设  $\Sigma$  具有均匀密度 1. 求  $\Sigma$  对原点处单位质点的引力沿  $z$  轴方向的分量.
- (20 分) 若  $\mathbb{R}^2$  上定义的二元函数  $f(x, y)$  分别是单变量  $x$  及  $y$  的连续函数.
  - 判断  $f(x, y)$  是否为二元连续函数, 证明或举出反例说明结论.
  - 若进一步假设对任意固定的  $x$ ,  $f(x, y)$  是  $y$  的单调函数, 证明:  $f(x, y)$  是二元连续函数.

## 线性代数 (满分 80 分)

- (20 分) 设二次曲面  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xz = 0\}$ . 求  $S$  中包含的线性子空间的最大维数, 并给出一个达到该维数的子空间.
- (20 分) 设  $\mathfrak{sl}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$  为迹零矩阵构成的线性空间, 定义对称双线性型

$$Q: \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(AB).$$

求  $Q$  的正惯性指数与负惯性指数.

- (20 分) 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$  满足对任意多项式  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ , 矩阵  $I_n - f(A)A$  均可逆. 证明:  $A$  是幂零矩阵.
- (20 分) 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , 若对任意复数  $\lambda \in \mathbb{C}$  及正整数  $m$ , 矩阵  $(\lambda I_n - A)^m$  与  $(\lambda I_n - B)^m$  的秩相等. 证明:  $A$  与  $B$  在  $\mathbb{R}$  上相似.

## 实变函数 (满分 40 分)

- (10 分) 设函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  在任意区间上绝对连续, 证明:  $f$  将任意 Lebesgue 零测集映射为 Lebesgue 零测集.
- (10 分) 证明: 若点集  $A \subset [0, 1]$  满足  $m^*(A) + m^*([0, 1] \setminus A) = 1$ , 则  $A$  可测. 其中  $m^*$  表示 Lebesgue 外测度.
- (20 分) 设函数列  $\{f_n(x)\}$  在区间  $[a, b]$  上几乎处处收敛于  $f(x)$ , 且存在  $r > 0$  及常数  $M$  使得对任意  $k$ , 有  $\int_a^b |f_n(x)|^r dx \leq M$ .
  - 证明: 对任意  $0 < p < r$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0$ .
  - 若将区间  $[a, b]$  改为  $\mathbb{R}$ , 判断上述结论是否仍成立.



## 复变函数 (满分 40 分)

- (15 分) 证明: 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$  的收敛域为右半平面  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ , 且对任意  $\varepsilon > 0$ , 该级数在区域  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}$  上一致收敛.
- (15 分) 利用留数定理计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$ .
- (10 分) 证明或否定: 对每个正整数  $n$ , 存在整函数  $f_n(z)$ , 使得

$$\max_{1 \leq |z| \leq 2} |\operatorname{Re} f_n(z) - \ln |z|| < \frac{1}{n}.$$

## 微分几何 (满分 40 分)

- (10 分) 设  $S$  为正则光滑曲面,  $P$  为其上一点. 记  $k_n(\theta)$  为点  $P$  处沿方向  $\theta$  (这里  $\theta \in [0, 2\pi)$  为与主方向的夹角) 的法曲率, 并记  $H$  为曲面  $S$  在点  $P$  处的平均曲率. 假定  $H \neq 0$ . 试计算

$$\frac{1}{H} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta.$$

- (15 分) 设  $S$  为正则光滑曲面, 在测地平行坐标系  $(u, v)$  下曲面  $S$  的第一基本形式为  $I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2$ .
  - 计算 Christoffel 符号  $\Gamma_{jk}^i$ , 并写出测地线方程.
  - 计算高斯曲率  $K(u, v)$ .
- (15 分) 记  $S^2$  为三维欧氏空间  $\mathbb{R}^3$  中球心在原点的单位球面.
  - 判断  $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  上是否存在光滑单位切向量场.
  - 判断  $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  上是否存在沿所有光滑曲线均平行的非零光滑切向量场.

## 近世代数 (满分 40 分)

- (15 分) 设  $A = \langle a \rangle$  为  $m$  阶循环群,  $B = \langle b \rangle$  为  $n$  阶循环群.
  - 证明: 所有群同态  $f: A \rightarrow B$  均可由自然数  $k$  唯一确定, 满足  $f(a) = b^k$ . 进一步, 请描述由固定  $k$  所决定的同态性质.
  - 证明: 自然数  $k$  可定义上述同态当且仅当  $n \mid km$ .
- (10 分) 设  $R$  为主理想整环,  $p$  为  $R$  的素元. 证明: 商环  $R/(p)$  是一个域.
- (15 分) 设  $R$  是一个么环, 满足对任意  $a \in R$  有  $a^2 = a$  (这样的环称作布尔环).
  - 证明:  $R$  的特征为 2.
  - 证明:  $R$  是交换环.
  - 对任意  $a \in R$ , 证明环同构  $R \cong (a) \times (1 - a)$ .
  - 举例说明存在非整环的布尔环.
  - 证明:  $R$  的每个有限生成理想均为主理想.



## 中国科学技术大学数学科学学院

## 2024 年夏令营招生考试试题

## 数学分析 (满分 80 分)

1. 已知函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

求偏导数  $f_x, f_y$ .

2. 讨论函数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$  在  $(0, 1)$  上的收敛性和一致收敛性.

3. 利用二重积分计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i^2 + j^2}$ .

4. (a) 设函数  $f \in C^1[a, b]$ , 且  $f(a) = 0$ , 证明:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

(b) 若函数  $f \in C^1(D)$ , 其中  $D = [a, b] \times [c, d]$ , 且  $f(x, c) = 0$ , 证明:

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq \frac{(c-d)^2}{2} \iint_D (f_y(x, y))^2 dx dy.$$

5. (a) 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是单位圆盘, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上有连续的偏导数, 且在  $D$  的边界上  $f(x, y) = 0$ . 证明:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x f_x + y f_y}{x^2 + y^2} dx dy = f(0, 0),$$

其中  $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0))$ .

(b) 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是单连通区域, 且原点  $(0, 0) \in D$ . 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上有连续的偏导数, 且在  $D$  的边界上  $f(x, y) = 0$ . 计算

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{x f_x + y f_y}{x^2 + y^2} dx dy,$$

其中  $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0))$ .

## 线性代数 (满分 80 分)

1. 设实对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求正交矩阵  $P$ , 使得  $P^T A P$  为对角矩阵.

2. 证明:  $n$  阶矩阵  $A$  是幂零矩阵的充要条件是  $\text{tr}(A^k) = 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

3. 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$  是一个幂零矩阵, 定义矩阵  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ . 证明:  $\exp(A)$  是可逆矩阵, 且  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .



4. 设  $V$  为有限维线性空间,  $\Phi: V \rightarrow V$  是幂零线性变换. 证明: 存在唯一的线性子空间链

$$\{0\} = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k = V,$$

满足以下条件:

- (a)  $\Phi(W_i) \subset W_{i+2}$  对所有  $-1 \leq i \leq k-2$  成立.  
 (b)  $W_{i+1}/W_i \cong W_{k-i}/W_{k-i-1}$  对所有  $0 \leq i \leq k-1$  成立.

### 实变函数 (满分 40 分)

1. 设  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  是 Borel/Lebesgue 可测函数, 讨论复合函数  $g \circ f$  的可测性.  
 2. 设  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是有界函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} nt^{-(n+1)} f(t) dt = f(1).$$

3. 设  $\{f_n(x)\}$  在  $L^p$  中收敛, 证明其存在几乎处处收敛的子列.

### 复变函数 (满分 40 分)

1. 设整函数  $f(z)$  满足  $\int_{\mathbb{C}} |f(z)| dA(z) < +\infty$  ( $dA(z)$  为复平面面积测度), 证明:  $f(z) \equiv 0$ .  
 2. 设  $f(z)$  为单位圆盘  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  上的全纯函数, 且满足当  $|z| \rightarrow 1^-$  时,  $|f(z)| \rightarrow 1$ . 证明: 存在有限个复数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{D}$  和实数  $t \in \mathbb{R}$ , 使得

$$f(z) = e^{it} \prod_{i=1}^n \left( \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z} \right)^{n_i},$$

其中  $n_i \in \mathbb{N}^+$ .

3. 设  $D \subset \mathbb{C}$  为有界闭区域, 全纯映射  $f: D \rightarrow D$  存在不动点  $z_0 \in D$ . 证明:  $|f'(z_0)| \leq 1$ .

### 微分几何 (满分 40 分)

1. 设球面方程为  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ , 上任取一条大圆 (即球面的测地线).  
 (a) 求此大圆作为空间曲线的曲率和挠率.  
 (b) 求球面  $S^2$  的 Gauss 曲率.  
 (c) 求此大圆在球面上的测地曲率.  
 2. 设曲面  $S$  的方程为  $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , 其中  $f(u, v)$  为光滑函数.  
 (a) 计算曲面的第一基本形式 I 和第二基本形式 II.  
 (b) 当  $f(u, v) = \ln \cos u - \ln \sin v$  时, 求曲面的平均曲率  $H$ .  
 3. 设  $S \subset \mathbb{R}^3$  是紧致, 无边界, 可定向的曲面.  
 (a) 若  $S$  上存在处处非零的光滑切向量场, 构造  $S$  上的整体正交活动标架.



(b) 说明球面  $S^2$  是否存在处处非零的光滑切向量场, 并给出理由.

近世代数 (满分 40 分)

1. 求 Abel 群  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24}$  的不变因子和初等因子.

2. 设  $H$  和  $K$  是群  $G$  的正规子群, 且  $HK = G$ . 证明:

$$G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

3. 证明: 有限含么交换环的素理想必是极大理想.

4. 设  $f(x, y) \in K[x, y]$  是不可约多项式.

(a) 证明:  $f(x, y)$  在  $K(y)[x]$  中要么是不可约元, 要么是单位.

(b) 已知  $g(x, y) \in K[x, y]$  且  $f(x, y) \nmid g(x, y)$ , 证明: 方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

在  $K$  上只有有限个解.



中国科学技术大学数学科学学院  
2026 年夏令营招生考试试题（回忆版）

上午 (8:30—11:30)

数学分析 (80 分)

1. (20 分) 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 > a_0 > 0$ , 且

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}}.$$

求证:  $\{a_n\}$  收敛, 且极限为正。

2. (20 分) 定义在  $(-\infty, +\infty)$  的函数  $f(x)$  有非负的三阶导数, 满足方程

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) - 1.$$

求所有满足条件的  $f(x)$ 。

3. (20 分) 计算积分

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy.$$

4. (10 分) 定义在  $[0, 1] \times [0, 1]$  的函数  $f(x, y)$  连续可微, 且在边界上恒为 0, 求证:

$$\left| \iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \frac{1}{6} \max_{[0,1] \times [0,1]} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

5. (10 分) 定义在  $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  的函数  $f$  二阶连续可微, 满足  $f(0, 0) = 0$ ,  $\Delta f = x + x^2 + y^2$ , 计算积分

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

线性代数与解析几何 (80 分)

1. (20 分) 曲线

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 0, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

在变换  $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + 2z, z + 3x)$  下变换为椭圆, 求该椭圆的中心、法向量与面积。

2. (20 分) 分块方阵  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  满足  $B^T D$  为对称矩阵, 求证:

$$\det M = \det(A^T D - C^T B).$$

3. (20 分) 记  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求方阵

$$M = \begin{pmatrix} B & B & O \\ O & B & B \\ O & O & B \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形。



4. (20 分) 设  $V = \mathfrak{sl}_3 := \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} A = 0\}$ ,  $V$  上的线性变换  $\mathcal{P}(X) = P^{-1}XP$ , 求  $\mathcal{P}$  的特征多项式, 这里

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

下午 (14:30—17:30)

### 实分析 (40 分)

1. (10 分) 设  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $g$  是  $\mathbb{R}$  上有界可测函数, 定义

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy,$$

求证:  $f * g$  有界且一致连续。

2. (15 分) 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上绝对连续函数。求证:

- $f$  把零测集映为零测集;
- $f$  把可测集映为可测集。

3. (15 分) 设  $E_1, E_2$  为  $\mathbb{R}^2$  上正测度集。求证: 存在  $h \in \mathbb{R}^2$  使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

### 复分析 (40 分)

1. (10 分) 设  $D$  为  $\mathbb{C}$  上边界光滑的区域,  $f$  为  $D$  上全纯函数, 连续延拓到  $\partial D$ 。证明:

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z) - \bar{z}| \geq \frac{2 \operatorname{Area}(D)}{\operatorname{Length}(\partial D)}.$$

2. (15 分) 设  $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ ,  $\Delta$  为  $\mathbb{C}$  上单位圆盘。证明  $f(z)$  为单射, 并求值域。

3. (15 分) 设整函数  $f(z)$  满足条件

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^{2029}} \, dA(z) < \infty.$$

这里  $dA(z)$  为面积元。证明:  $f(z)$  是次数不超过 2026 的多项式。

### 近世代数 (40 分)

1. (10 分) 分类所有 360 阶有限 Abel 群。

2. (10 分) 设  $u$  是方程  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$  的一根。

- 证明:  $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$ ;
- 将  $(1+u)^{-1}$  表示为  $\{1, u, u^2\}$  的  $\mathbb{Q}$ -线性组合。



3. (10 分) 设  $R$  为含么交换环,  $P$  为其素理想。理想  $I_1, I_2, \dots, I_n$  满足

$$\bigcap_{i=1}^n I_i = P.$$

证明: 存在  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  使得  $I_i = P$ 。

4. (10 分) 设  $C(G)$  为  $G$  的中心, 即与  $G$  中任意元素均交换元素构成的子群。证明: 若  $G/C(G)$  为循环群, 则  $G = C(G)$ 。

### 微分几何 (40 分)

1. (15 分) 设  $\mathbf{r}(s)$  为  $\mathbb{R}^3$  中以  $s$  为弧长参数的光滑曲线,  $s \in I$ , 其曲率满足  $0 \leq \kappa(s) \leq \kappa_0$ , 这里  $\kappa_0$  是一个常数。设其 Frenet 标架为  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 。取足够小的  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1/\kappa_0$ ), 考虑管形曲面

$$\mathbf{r}(s, v) = \mathbf{r}(s) + \rho(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}), \quad s \in I, v \in [0, 2\pi].$$

- 若  $\mathbf{r}(s)$  的长度为  $\ell$ , 求管形曲面的面积;
- 证明  $\mathbf{r}_s$  是一个主方向, 求其主曲率。进一步, 证明  $\mathbf{r}(s, v)$  是一个 Weingarten 型曲面, 即存在不全为零的实数  $a, b, c$  使得  $aH + bK = c$ 。

2. (10 分) 设单位球面  $\mathbb{S}^2$  的一个标准参数表示为

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

- 选取参数  $u = \ln \tan \frac{\theta}{2}$ ,  $v = \varphi$ , 用新参数给出曲面的参数表示  $\mathbf{r}(u, v)$ , 并证明其与平面  $\mathbb{R}^2$  局部共形;
- 称  $\mathbb{S}^2$  上的曲线  $\Gamma: \mathbf{r}(s)$  为斜航线, 若其与经度  $\varphi$  固定的参数曲线所成角始终相同。设  $C_1, C_2, C_3$  是不过南北极点的三条斜航线, 两两相交成一个三角形, 求该三角形的内角和。

3. (15 分) 设  $\mathbf{r}(s)$  是  $\mathbb{R}^3$  中的一个简单光滑闭曲线, 称其主法向量  $\mathbf{n}(s)$  在单位球面  $\mathbb{S}^2$  上绘成的曲线为曲线的主法标线。

- 求主法标线在单位球面上的测地曲率  $\bar{k}_g$ ;
- 用 Gauss-Bonnet 定理证明: 该主法标线把单位球面分为面积相同的两半。