



中国科学技术大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊 (25)



中国科学技术大学数学科学学院

2018 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 计算题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3(1+x)^5}$$

$$\sin x - \tan x = \sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = \sin x \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x} \sim x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}x^3, \quad x \rightarrow 0.$$

分母 $(1+x)^5 \rightarrow 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3(1+x)^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

$$(2) z = f\left(\ln \frac{y}{x}, xy\right), f(u, v) \text{ 一阶连续偏导, 求 } \frac{\partial z}{\partial x}$$

令 $u = \ln \frac{y}{x} = \ln y - \ln x$, $v = xy$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

链式法则:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x}f'_1 + yf'_2.$$

$$(3) \iiint_{\Omega} (y+x^2) dV, \quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

球体关于 y 奇对称, $\iiint_{\Omega} y dV = 0$ 。由轮换对称性

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV = \iiint_{\Omega} z^2 dV = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

球坐标:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 dr = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

$$(4) \nabla f \cdot \nabla f = 2f, \quad \nabla \cdot (f \nabla f) = f, \quad \text{求 } \iint_{\partial \Omega} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma$$

方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$, 高斯公式

$$\iint_{\partial \Omega} \nabla f \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla f) dV = \iiint_{\Omega} \Delta f dV.$$

展开散度:

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = |\nabla f|^2 f + f \Delta f = f.$$

代入 $|\nabla f|^2 = 2f$, $f \neq 0$, 两边除以 f :

$$2f + \Delta f = 1 \implies \Delta f = 1 - 2f.$$

$$I = \iiint_{\Omega} (1 - 2f) dV = |\Omega| - 2 \iiint_{\Omega} f dV.$$

$$2. f \text{ 在 } [a, b] \text{ 可导, } f' \text{ Riemann 可积, 证明 } \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

对分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



求和:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) \Delta x_i.$$

右端是 f' 的黎曼和。 $\|T\| \rightarrow 0$, 因 f' Riemann 可积, 黎曼和收敛于 $\int_a^b f'(t)dt$, 于是

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

3. $f > 0$ 在 $[0, 1]$ 连续

(1) 存在唯一 $c \in (0, 1)$, $\int_0^c f(t)dt = \int_c^1 \frac{1}{f(t)}dt$

设

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^1 \frac{1}{f(t)}dt.$$

$F(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续。 $F(0) = -\int_0^1 \frac{1}{f(t)}dt < 0$, $F(1) = \int_0^1 f(t)dt > 0$ 。介值定理: $\exists c \in (0, 1), F(c) = 0$ 。
 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, F 严格递增, 故 c 唯一。

(2) $n \geq 2$, 存在唯一 $x_n \in (\frac{1}{n}, 1)$, 满足 $\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)}dx$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

令

$$F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^x f(t)dt - \int_x^1 \frac{1}{f(t)}dt.$$

$F'_n(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 严格递增。 $F_n(\frac{1}{n}) = -\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{f} < 0$, $F_n(1) = \int_{\frac{1}{n}}^1 f > 0$, 故存在唯一 $x_n \in (\frac{1}{n}, 1)$ 使得 $F_n(x_n) = 0$ 。

取任意子列 x_{n_k} , 有界故收敛子列 $x_{n_{k_j}} \rightarrow x_0 \in [0, 1]$ 。等式

$$\int_{\frac{1}{n_{k_j}}}^{x_{n_{k_j}}} f(t)dt = \int_{x_{n_{k_j}}}^1 \frac{1}{f(t)}dt$$

两边取极限, $\frac{1}{n_{k_j}} \rightarrow 0$, 得

$$\int_0^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^1 \frac{1}{f(t)}dt.$$

由 c 的唯一性, $x_0 = c$ 。所有收敛子列极限都是 c , 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ 。

4. 有限区间 I , f 在 I 一致连续 $\iff$ 对任意 I 中 Cauchy 列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列

必要性 ($\Rightarrow$): f 一致连续: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $|x - y| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 。若 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 则 $\exists N$, 当 $m, n > N$, $|x_m - x_n| < \delta$, 于是 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列。

充分性 ($\Leftarrow$), 反证: 若 f 不一致连续, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 存在 $x_n, y_n \in I$, 满足 $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, 但 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ 。 I 有限区间, $\{x_n\}$ 有界, 取子列 $x_{n_k} \rightarrow t_0$ 。令

$$z_k = \begin{cases} x_{n_k}, & k \text{ 奇数}, \\ y_{n_k}, & k \text{ 偶数}. \end{cases}$$

$z_k \rightarrow t_0$, 故 $\{z_k\}$ 是 Cauchy 列。但是 $|f(z_{2k+1}) - f(z_{2k})| \geq \varepsilon_0$, $\{f(z_k)\}$ 不是 Cauchy 列, 矛盾。故 f 一致连续。

5. $f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$

(1) $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续

$|g(t, x)| = \left| \frac{\cos tx}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ 收敛。由 Weierstrass 判别法, 含参反常积分对 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛; 被积函数对 t 连续, 故 $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续。



$$(2) \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$f(t) = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cos tx \, dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$$(3) \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt \leq 0$$

交换积分次序:

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^{\pi} \cos tx \sin t \, dt \right) dx.$$

积化和差:

$$\cos tx \sin t = \frac{1}{2} (\sin((x+1)t) - \sin((x-1)t)).$$

$$\int_0^{\pi} \cos tx \sin t \, dt = \frac{(-1)^x - 1}{x^2 - 1}.$$

当 $x > 1$, $x^2 - 1 > 0$, $(-1)^x - 1 \leq 0$, 内层积分 ≤ 0 。于是

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{(-1)^x - 1}{x^2 - 1} dx \leq 0.$$

(4) $f(t)$ 在 $(0, \pi)$ 至少一个零点

反证: 若 $f(t)$ 在 $(0, \pi)$ 无零点, 连续性推出 $f(t)$ 在 $(0, \pi)$ 恒正或恒负。若 $f(t) > 0$, 则 $f(t) \sin t > 0$, $\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt > 0$, 与 (3) 矛盾; 若 $f(t) < 0$, 同样得到积分 < 0 矛盾。故 $\exists \xi \in (0, \pi), f(\xi) = 0$ 。

线性代数

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, V = \{B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AB = BA\}, \text{ 求 } \dim V \text{ } A \text{ 的特征多项式 } \det(\lambda I - A) =$$

$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 2$, 无重根, 故可对角化。与 A 可交换的矩阵都是 A 的多项式。

$$\dim V = 3.$$

$$2. A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 记 } D_n = \det A_n, \text{ 递推关系 } D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \text{ 初值 } D_1 = 2, D_2 = 3.$$

特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 二重根 $r = 1$ 。通解 $D_n = \alpha + \beta n$ 。代入初值得 $\alpha = 1, \beta = 1$ 。

$$\det A_n = n + 1.$$

逆矩阵 $A_n^{-1} = (b_{ij})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{i(n+1-j)}{n+1}, & i \leq j, \\ \frac{j(n+1-i)}{n+1}, & i > j. \end{cases}$$

3. 证明 $\text{rank}(AB - I_n) \leq \text{rank}(A - I_n) + \text{rank}(B - I_n)$ 分解

$$AB - I = A(B - I) + (A - I).$$

秩不等式 $\text{rank}(X + Y) \leq \text{rank} X + \text{rank} Y$, 又 $\text{rank}(A(B - I)) \leq \text{rank}(B - I)$,

$$\text{rank}(AB - I) \leq \text{rank}(A(B - I)) + \text{rank}(A - I) \leq \text{rank}(B - I) + \text{rank}(A - I).$$



4. A 线性变换, k 是满足 $\text{Im}A^k = \text{Im}A^{k+1}$ 的最小正整数。设线性变换 $\mathcal{A}$, k 是满足 $\text{Im}\mathcal{A}^k = \text{Im}\mathcal{A}^{k+1}$ 的最小正整数。极小多项式 $m(\lambda) = \lambda^k g(\lambda)$, $g(0) \neq 0$, 即极小多项式中因子 λ 的重数等于 k 。
5. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, A 是 $\mathbb{R}^3 \rightarrow V$ 的正交投影法向量 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 。线性变换 $\mathcal{A}$ 对应的矩阵

$$A = I - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

特征值: $\mathbf{1}$ (二重), $\mathbf{0}$ (一重)。

6. A, B 实对称正定, 证明 $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\det A \cdot \det B}$ 存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = I$ 。令 $\tilde{B} = C^T B C$, $\tilde{B}$ 正定。不等式等价于

$$\det\left(\frac{I + \tilde{B}}{2}\right) \geq \sqrt{\det \tilde{B}}.$$

设 $\tilde{B}$ 的特征值 $\lambda_i > 0$, 等价于

$$\prod_{i=1}^n \frac{1 + \lambda_i}{2} \geq \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}.$$

对每个 $\lambda > 0$, 均值不等式 $\frac{1 + \lambda}{2} \geq \sqrt{\lambda}$, 相乘即得。

实变函数

1. $A \subset \mathbb{R}^p, B \subset \mathbb{R}^q$ 可测, 则 $A \times B$ 可测, $m(A \times B) = m(A)m(B)$ 矩形的乘积是矩形, 测度乘积成立。
对一般可测集, 存在闭集 $F_k \subset A$, 开集 $G_k \supset A$, 满足 $m(G_k - F_k) \rightarrow 0$ 。 $F_k \times B \subset A \times B \subset G_k \times B$, $m((G_k - F_k) \times B) = m(G_k - F_k)m(B) \rightarrow 0$ 。 $F_k \times B$ 可测, 故 $A \times B$ 可测, $m(A \times B) = m(A)m(B)$ 。
2. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 可测, 则 $f(x - y)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上可测对任意实数 a ,

$$\{(x, y) : f(x - y) > a\} = T^{-1}(\{t : f(t) > a\}), \quad T(x, y) = x - y.$$

T 是连续线性映射, 可测集的原像可测, 故 $f(x - y)$ 可测。

3. $f \geq 0, f \in L(E)$, 证明 f 在 E 几乎处处有限记 $E_k = \{x \in E : f(x) \geq k\}$ 。

$$\int_E f \, dm \geq \int_{E_k} f \geq k \cdot m(E_k) \implies m(E_k) \leq \frac{1}{k} \|f\|_1.$$

$m(\{f = +\infty\}) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$ 。故 f 几乎处处有限。

4. Lusin 定理: 绝对连续 $f' = 0$ a.e. 推出 f 常数 Lusin 定理: 若 $f \in L(E)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧支集连续函数 g_ε , 满足

$$\int_E |f - g_\varepsilon| dx < \varepsilon.$$

若 f 在 $[a, b]$ 绝对连续, 则牛顿-莱布尼茨公式成立:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

$f' = 0$ a.e., 故 $\int_a^x f'(t) dt = 0$, 于是 $f(x) \equiv f(a)$, 为常数。

复变函数



1. (1) $\int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$ 全部有限极点都在 $|z| < 4$ 内部。计算无穷远点留数:

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -1.$$

有限极点留数之和 $= -\text{Res}(f, \infty) = 1$ 。留数定理:

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

经典围道积分, Jordan 引理, 主值积分取虚部得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Schwarz 引理: $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 全纯, $f(0) = 0, |f(z)| \leq 1$, 则 $|f(z)| \leq |z|$; 等号当且仅当 $f(z) = e^{i\theta}z$ 。

条件: $f(0) = 0, \text{Re } f(z) \leq 1$ 。构造

$$g(z) = \frac{f(z)}{2 - f(z)}.$$

$\text{Re } w \leq 1$ 蕴含 $|g(z)| \leq 1$, 且 $g(0) = 0$ 。由 Schwarz 引理 $|g(z)| \leq |z|$,

$$\left| \frac{f(z)}{2 - f(z)} \right| \leq |z| \implies |f(z)| \leq |z|(2 + |f(z)|).$$

整理得到

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|}.$$

3. Rouché 定理: f, g 在简单闭曲线 C 内部全纯, 在 C 上 $|f(z)| > |g(z)|$, 则 f 与 $f + g$ 在 C 内部零点个数相同 (计重数)。

方程 $(z+1)e^{-z} = z+2$, 改写为 $(z+2) + (z+1)e^{-z} = 0$ 。取右半圆盘围道。在围道上, $\text{Re } z \geq 0$, $|z+2| > |(z+1)e^{-z}|$ 。 $H(z) = z+2$ 的零点 $z = -2$, 不在右半平面。Rouché 定理, 右半平面零点数为 0。

4. 亚纯函数定义: 在复平面除孤立极点外处处全纯。条件 $|f(z)| = 1, |z| = 1$ 。令 $g(z) = f(z)\overline{f(1/\bar{z})}$, 在单位圆周 $g(z) \equiv 1$, 由恒等定理 $g(z) \equiv 1$ 。若 z_0 是 f 的零点, 则 $1/\bar{z}_0$ 是极点; 零点极点都是有限个, 故 $f(z)$ 是有理函数。

近世代数

1. $\mathbb{F}_3[x]$ 分解 $x^3 + x + 2$ $x = 2$ 是根, $x^3 + x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$ 。 $-2 \equiv 1 \pmod{3}$, 二次不可约。

$$x^3 + x + 2 = (x + 1)(x^2 + 2x + 2).$$

2. 群

(1) $A, B, C \leq G, A \subset B \cup C$, 证明 $A \subset B$ 或 $A \subset C$

反证。若 $\exists a_1 \in A, a_1 \notin B \Rightarrow a_1 \in C$; $\exists a_2 \in A, a_2 \notin C \Rightarrow a_2 \in B$ 。 $a_1 a_2 \in A \subset B \cup C$ 。若 $a_1 a_2 \in B$, 则 $a_1 = (a_1 a_2) a_2^{-1} \in B$ 矛盾; 若 $a_1 a_2 \in C$, 则 $a_2 = a_1^{-1} (a_1 a_2) \in C$ 矛盾。故命题成立。

(2) $A, B \leq G, A \cup B$ 是子群 $\iff A \subset B$ 或 $B \subset A$

$\Leftarrow$: 显然。 $\Rightarrow$: 若 $A \not\subset B$, 由 (1) 得 $B \subset A$ 。

(3) 群不能写成两个真子群的并; 例子: Klein 四元群 $G = \{e, a, b, ab\}$ 。 $H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, ab\}, G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ 。



3. 正规子群定义: $N \leq G$, $\forall g \in G, gNg^{-1} = N$ 。指数 $[G : N] = 2$, 则左右陪集相等 $gN = Ng$, N 正规。例子: $G = S_3$, $H = \langle (12) \rangle$, 指数 3, 不是正规子群。

4. $GL_n(\mathbb{F}_p)$

(1) 阶:

$$|GL_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k) = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$

(2) Sylow p -子群: 幺幂上三角矩阵全体

$$U_n(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$



中国科学技术大学数学科学学院
2019 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 找定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数 $f(x, y)$, 使得下式两边均有意义, 但不相等:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, y) dy \neq \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) dy.$$

能否找到二元连续函数满足上述要求? 说明理由。

解: 构造

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & x = 0, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

计算积分:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \arctan \frac{1}{x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, y) dy &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

对任意 $y \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) = 0$, 于是

$$\int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) dy = \int_0^1 0 dy = 0.$$

$\frac{\pi}{2} \neq 0$, 满足条件。

不能取二元连续函数。若 $f(x, y)$ 在闭矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 二元连续, 则含参积分 $I(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) dy.$$

2. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) 有一阶连续偏导数, 存在常数 $C > 0$, 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \geq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

证明: 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, Jacobi 矩阵 $Df(\mathbf{x})$ 可逆。

证明: 反证。假设存在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\det Df(\mathbf{x}_0) = 0$, 则存在非零向量 $\mathbf{v}$, 使得 $Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} = 0$ 。由导数定义:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{v}) + o(t) = o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

于是 $|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)| = o(|t|)$ 。结合题设条件:

$$C\|\mathbf{v}\| \cdot |t| \leq |f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)| = o(|t|).$$

两边除以 $|t|$, 令 $t \rightarrow 0$, 得到 $C\|\mathbf{v}\| \leq 0$, 与 $C > 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 矛盾。故 $\det Df(\mathbf{x}) \neq 0$, $Df(\mathbf{x})$ 可逆。

3. 设二阶连续可导函数 $f(x, y)$ 满足

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

且 $f(1, 1) = f(1, -1) = f(-2, 0)$ 。证明: 当 $x^2 + y^2 \leq 1$ 时,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2019.$$



证明：任取 $Q = (x, y)$ 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$ 。对三点 $P_1 = (1, 1), P_2 = (1, -1), P_3 = (-2, 0)$ ，做二阶泰勒展开：

$$f(P_i) - f(Q) = \nabla f(Q) \cdot (P_i - Q) + \frac{1}{2}(P_i - Q)^T H(\xi_i)(P_i - Q).$$

记 $b_i = \frac{1}{2}(P_i - Q)^T H(\xi_i)(P_i - Q)$ 。对任意二维向量 $\mathbf{u}$,

$$|\mathbf{u}^T H \mathbf{u}| \leq |f_{xx}|u_1^2 + 2|f_{xy}|u_1 u_2 + |f_{yy}|u_2^2 \leq 2\|\mathbf{u}\|^2,$$

于是 $|b_i| \leq \|P_i - Q\|^2$ 。由 $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)$,

$$\begin{cases} \nabla f(Q) \cdot (P_1 - P_2) = b_2 - b_1, \\ \nabla f(Q) \cdot (P_1 - P_3) = b_3 - b_1, \end{cases} \implies \begin{cases} 2f_y(Q) = b_2 - b_1, \\ 3f_x(Q) + f_y(Q) = b_3 - b_1. \end{cases}$$

$|b_i|$ 有界，故 $|f_y(Q)|$ 、 $|f_x(Q)|$ 均有界，远小于 2019。证毕。

4. 设函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛；且对任意 $x \in [0, 1]$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 收敛。判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上是否一致收敛，并给出理由。

解：不一定，举反例。

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

每个点 $x > 0$ 只落在有限个区间，故 $\sum |f_n(x)|$ 逐点收敛； $\sum f_n(x)$ 一致收敛。但是余项

$$\sup_{x \in [0, 1]} \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(x)| \geq f_N\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \not\rightarrow 0,$$

因此 $\sum |f_n(x)|$ 不一致收敛。

线性代数（满分 80 分）

1. 二次曲面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 2z - 1 = 0.$$

利用正交变换和平移化为标准方程，判断曲面类型。

二次部分矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

特征多项式 $\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - \frac{3}{2})^2$ ，特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$ 。正交变换 $X = QY$ ，二次型化为 $\frac{3}{2}y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2$ 。 $\lambda = 0$ 的单位特征向量 $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ ，变换后一次项为 $-\frac{2}{\sqrt{3}}y_1$ 。

$$\frac{3}{2}y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}y_1 - 1 = 0.$$

对 y_1 配方：

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, & y_2' &= y_2, & y_3' &= y_3, \\ y_1' &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(y_2'^2 + y_3'^2). \end{aligned}$$

该曲面为椭圆抛物面。



2. 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, 复线性映射 $\varphi: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $\varphi(X) = AX - XA$ 。计算 φ 的特征多项式、特征向量, 判断 φ 是否可对角化。

解: 记 $A = 7I + N$, 其中 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\varphi(X) = (7I + N)X - X(7I + N) = NX - XN.$$

N 的特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$ 。若 $Nu = \lambda u$, $Nv = \mu v$, 则 $\varphi(uv^T) = (\lambda - \mu)uv^T$ 。 φ 的特征值: $0, 0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$ 。特征多项式:

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2\sqrt{2})(\lambda + 2\sqrt{2}).$$

记 u_1 为 N 属于 $\sqrt{2}$ 的特征向量, u_2 属于 $-\sqrt{2}$ 。

- $\lambda = 2\sqrt{2}$: $u_1 u_2^T$;
- $\lambda = -2\sqrt{2}$: $u_2 u_1^T$;
- $\lambda = 0$: $u_1 u_1^T, u_2 u_2^T$.

一共有 4 个线性无关的特征向量, φ 可以对角化。

3. $\mathbb{R}^4$ 向量组

$$S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 1, 1), \alpha_3 = (2, 1, 1, 0), \alpha_4 = (3, 3, 2, 1), \alpha_5 = (1, -1, 1, 1)\}.$$

求 S 中包含向量 α_2 的所有极大线性无关组。

解: 将向量作为列做初等行变换:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

秩 $r = 3$, 线性关系:

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3, \quad \alpha_5 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2.$$

包含 α_2 的全部极大无关组:

$$\{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}.$$

4. 设 n 阶复方阵 A, B 乘法可交换, $AB = BA$ 。证明: 存在可逆复方阵 P , 使得 PAP^{-1} 和 PBP^{-1} 同时为上三角矩阵。

证明 (数学归纳法): $n = 1$, 显然成立。假设 $n - 1$ 阶命题成立。由 $AB = BA$, 取 A 的特征子空间 $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, 则 V_λ 是 B 的不变子空间。在 V_λ 中取 B 的特征向量 v , 则 v 是 A, B 的公共特征向量。将 v 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 记可逆矩阵 P_1 以该组基作为列, 则

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

A_1, B_1 是 $n-1$ 阶方阵, 且 $A_1B_1 = B_1A_1$ 。由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 Q , 使得 QA_1Q^{-1}, QB_1Q^{-1} 同时上三角。令

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad P = P_1P_2,$$

则 PAP^{-1} 与 PBP^{-1} 同时上三角。归纳完成。



实变函数 (满分 40 分)

1. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上可测函数列, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. $1 \leq q < p < +\infty$, 且 $\|f_n\|_{L^p[0,1]}$ 有界. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^q dx = 0.$$

证明: 由 Fatou 引理, $f \in L^q[0, 1]$. 记 $g_n = |f_n - f|^q$, $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$. 由 Hölder 不等式:

$$\int_0^1 |f_n - f|^q dx \leq \|f_n - f\|_{L^p}^q \cdot m([0, 1])^{\frac{p-q}{p}}.$$

$\|f_n\|_{L^p}$ 一致有界, 故积分一致有界. $\forall \varepsilon > 0$, 由 Egorov 定理, 存在可测集 $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$, 在 $[0, 1] \setminus E_\varepsilon$ 上 g_n 一致收敛于 0.

$$\int_0^1 g_n = \int_{[0,1] \setminus E_\varepsilon} g_n + \int_{E_\varepsilon} g_n.$$

第一项当 n 充分大可以小于 ε ; 第二项用 Hölder 估计可以通过取 ε 充分小任意小. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^q dx = 0$.

2. 设 $E \subset \mathbb{R}$, 外测度 $m^*(E) > 0$. 求证: 对任意 $\alpha \in (0, 1)$, 存在开区间 I , 满足

$$m^*(I \cap E) \geq \alpha m(I).$$

证明: 反证. 假设对一切开区间 I , 都有 $m^*(I \cap E) < \alpha m(I)$. 由外测度定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, $m(G) < m^*(E) + \varepsilon$. 将 G 写为可数不交开区间之并 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

$$m^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E \cap I_k) < \alpha \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \alpha m(G).$$

于是 $m^*(E) < \alpha(m^*(E) + \varepsilon)$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到 $m^*(E) \leq \alpha m^*(E)$. 因为 $m^*(E) > 0$, $\alpha < 1$, 矛盾. 故必存在满足条件的开区间 I .

复变函数 (满分 40 分)

1. 判断方程 $z^4 - 8z - 10 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 3$ 内根的个数.

解: Rouché 定理. 圆周 $|z| = 3$: 令 $f(z) = z^4, g(z) = -8z - 10$. $|f(z)| = 81, |g(z)| \leq 8 \cdot 3 + 10 = 34 < 81$. $f(z)$ 在 $|z| < 3$ 有 4 个零点, 故 $z^4 - 8z - 10$ 在 $|z| < 3$ 有 4 个零点.

圆周 $|z| = 1$: 令 $F(z) = -8z - 10, G(z) = z^4$. $|F(z)| \geq 10 - 8 = 2 > |G(z)| = 1$. $F(z) = 0$ 的根 $z = -\frac{10}{8}$, 模大于 1, 故 $|z| < 1$ 内零点个数为 0.

圆环 $1 < |z| < 3$ 内零点个数: $4 - 0 = 4$.

2. 设 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, $|f(z)| = 1, \forall |z| = 1$. 证明: $f(z)$ 可解析延拓为有理函数.

证明: 定义对称延拓: $f^*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, $|z| > 1$. 当 $|z| = 1, \frac{1}{\bar{z}} = z, |f(z)| = 1, \overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}$, 故圆周上 $f(z) = \frac{1}{f^*(z)}$. 构造

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| < 1, \\ \frac{1}{f^*(z)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

由解析延拓原理, $F(z)$ 在扩充复平面亚纯. 扩充复平面上亚纯函数等价于有理函数. 证毕.

微分几何 (满分 40 分)



1. 区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(D)$, 曲面

$$S : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, f(x_1, x_2)).$$

(1) 求曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式。

(2) 极小曲面条件:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

证明: 该条件下曲面为极小曲面 (平均曲率 $H = 0$)。

(1)

$$\mathbf{r}_{x_1} = (1, 0, f_1), \quad \mathbf{r}_{x_2} = (0, 1, f_2).$$

第一基本形式系数:

$$E = 1 + f_1^2, \quad F = f_1 f_2, \quad G = 1 + f_2^2.$$

$$I = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2.$$

单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{(-f_1, -f_2, 1)}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}.$$

$$L = \frac{f_{11}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad M = \frac{f_{12}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad N = \frac{f_{22}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

$$II = L dx_1^2 + 2M dx_1 dx_2 + N dx_2^2.$$

(2) 平均曲率公式

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

$EG - F^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2$ 。将题给条件求导展开, 分子恰好为 $EN - 2FM + GL$ 。条件等价于 $EN - 2FM + GL = 0$, 于是 $H = 0$, 曲面为极小曲面。

2. (1) 二维平面 $\mathbb{R}^2$ 与三维单位球面 S^2 是否等距同构? 说明理由。

(2) 测地线是否必为最短曲线? 说明理由。

解: (1) 不等距。高斯绝妙定理: 高斯曲率是内蕴不变量。平面高斯曲率 $K \equiv 0$; 单位球面 $K \equiv 1$ 。曲率不同, 不可能等距。

(2) 不一定。局部上, 充分靠近两点之间, 测地线是最短; 全局不成立。例如球面上, 同一条大圆弧上两点, 长的那一段大圆弧是测地线, 但不是最短曲线。

近世代数 (满分 40 分)

1. 设 S_4 中置换 $(12)(34)$ 所在的共轭类为 C , 求 C 中元素在共轭作用下的稳定子群。

解: $C = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $|C| = 3$ 。稳定子群 $G = \{g \in S_4 \mid g(12)(34)g^{-1} = (12)(34)\}$ 。
 $|G| = \frac{|S_4|}{|C|} = 8$ 。 G 由保持二元子集 $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ 或者交换这两个二元子集的置换构成, $G = \langle (12), (34), (13)(24) \rangle$, 同构于 8 阶二面体群 D_4 。

2. $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 。判断环 $\mathbb{F}_2[t]/(t^2)$, $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + \bar{1})$, $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + \bar{1})$ 之间的环同构关系。

解:

(1) $\mathbb{F}_2[t]/(t^2)$: 含有非零幂零元 t 。

(2) $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + 1) = \mathbb{F}_2[t]/((t+1)^2)$, 含有非零幂零元 $t+1$ 。做替换 $u = t+1$, 得到 $\mathbb{F}_2[u]/(u^2)$, 故

$$\mathbb{F}_2[t]/(t^2) \cong \mathbb{F}_2[t]/(t^2 + \bar{1}).$$



(3) $t^2 + t + 1$ 在 $\mathbb{F}_2$ 不可约, $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + \bar{1}) \cong \mathbb{F}_4$, 有限域, 无不为零的幂零元, 故与上面两个环不同构。

综上: $\mathbb{F}_2[t]/(t^2) \cong \mathbb{F}_2[t]/(t^2 + \bar{1})$; $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + \bar{1})$ 和另外两个环不同构。



中国科学技术大学数学科学学院

2021 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 判断开区间 $(0, 1)$ 上的有界凸函数是否在 $(0, 1)$ 上一致连续。正确则证明, 错误举反例。

结论: 是, $(0, 1)$ 上有界凸函数必一致连续。

证明. 凸函数在开区间 $(0, 1)$ 内处处存在左右导数, 且单侧导数单调递增。记 $M = \sup_{x \in (0, 1)} |f(x)| < +\infty$ 。凸函数满足对任意 $0 < x < y < z < 1$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

由有界性, 可推导出全体单侧导数有界, 存在常数 $L > 0$, 使得

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in (0, 1).$$

Lipschitz 条件蕴含一致连续。

注: 无界凸函数可以不一致连续, 例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$, 凸、无界, 不一致连续。本题附加有界条件保证一致连续。 $\square$

2. 设

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n! \pi x) \text{ 收敛} \right\}.$$

证明: Ω 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 而且 $\Omega \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

证明. 1. 稠密性: $\mathbb{Q} \subset \Omega$ 。若 $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, 当 $n \geq q$, $n!x$ 为整数, $\sin(n! \pi x) = 0$ 。级数从某一项开始恒为 0, 故级数收敛。 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 稠密, 因此 Ω 稠密。

2. 构造无理数 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}$, x 为无理数。

$$n! \pi x = n! \pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k!)^2} + n! \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} = A_n + \delta_n,$$

A_n 是 π 的整数倍, $0 < \delta_n \leq \frac{2\pi}{(n+1)!}$ 。 $\sin(n! \pi x) = \sin \delta_n \sim \delta_n$, $\sum \delta_n$ 收敛, 故 $\sum \sin(n! \pi x)$ 收敛。于是 $x \in \Omega$ 且 x 无理, $\Omega \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ 。 $\square$

3. 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 并且 f' 在 $[0, 1]$ 上恒不为 1, 若 $f(0) = f(1) > 1$ 且

$$f(1) + \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} - nf(1).$$

证明. 由达布定理, f' 不能变号, 只能处处 $f'(x) > 1$ 或处处 $f'(x) < 1$ 。若 $f'(x) > 1$, 则 $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt > 1$, 与 $f(0) = f(1)$ 矛盾。故 $f'(x) < 1, \forall x \in [0, 1]$ 。

令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$, g 严格递减。

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = -f(1) - \frac{1}{2}.$$



$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{n-1}{2}.$$

g 严格递减, 黎曼和下界:

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > n \int_0^1 g(x) dx = n \left(-f(1) - \frac{1}{2} \right).$$

代入:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > n \left(-f(1) - \frac{1}{2} \right) + \frac{n-1}{2} = -nf(1) - \frac{1}{2}.$$

证毕。 □

4. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$F(t) = \int_0^t \left[\int_0^t f(xy) dx \right] dy.$$

证明: $tF''(t) + F'(t) - 4tf(t^2)$ 恒为常数。

证明. 对内层积分做变量替换 $u = xy$, $x = \frac{u}{y}$, $dx = \frac{du}{y}$:

$$\int_0^t f(xy) dx = \frac{1}{y} \int_0^{ty} f(u) du, \quad F(t) = \int_0^t \frac{1}{y} \left(\int_0^{ty} f(u) du \right) dy.$$

莱布尼茨求导:

$$F'(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t^2} f(u) du + \int_0^t f(ty) dy = \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(u) du.$$

$$F''(t) = -\frac{2}{t^2} \int_0^{t^2} f(u) du + 4f(t^2).$$

代入表达式:

$$\begin{aligned} tF''(t) + F'(t) - 4tf(t^2) &= t \left(-\frac{2}{t^2} \int_0^{t^2} f(u) du + 4f(t^2) \right) + \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(u) du - 4tf(t^2) \\ &= -\frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(u) du + 4tf(t^2) + \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(u) du - 4tf(t^2) \equiv 0. \end{aligned}$$

恒等于 0, 是常数。 □

线性代数 (满分 80 分)

1. 设给定二次曲面在直角坐标系下的方程为 $xy + xz - yz + 2x - z + 1 = 0$ 。请利用正交变换以及平移将其化为标准方程, 并判断这是什么类型的曲面。

二次型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

特征多项式 $\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$, 特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ 。正交变换 $X = QY$, 二次部分化为 $y_1^2 - y_2^2$ 。原方程化为 $y_1^2 - y_2^2 + \mathbf{b}^T Y + 1 = 0$, 平移配方消去一次项, 得到标准形式

$$y_1'^2 - y_2'^2 + cy_3' = 0.$$

曲面类型: 双曲抛物面 (马鞍面)。



2. 设 $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。试证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})}$ 存在, 并且计算该极限值。这里 tr 表示矩阵的迹。

证明. 特征多项式 $\det(\lambda I - X) = \lambda^2 - \lambda - 3 = 0$, 特征根

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}.$$

$$|\lambda_2| < |\lambda_1|. \quad \text{tr}(X^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n.$$

$$\frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})} = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1}} = \frac{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}{\lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}.$$

$n \rightarrow \infty$, $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, 该项趋于 0。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13} - 1}{6}.$$

极限存在, 值为 $\frac{\sqrt{13} - 1}{6}$ 。 □

3. 设 $M_2(\mathbb{R})$ 为全体 2×2 实方阵的实线性空间。对于任意 $A \in M_2(\mathbb{R})$, 定义线性函数 $\varphi_A : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \text{tr}(AX)$ 。设 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, 若 $\varphi_A = \varphi_B$, 证明: $A = B$ 。

证明. 条件等价于: $\forall X \in M_2(\mathbb{R}), \text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$, 即 $\text{tr}((A - B)X) = 0$ 对一切二阶实方阵 X 。

记 $C = A - B$, 则 $\forall X, \text{tr}(CX) = 0$ 。依次取矩阵单位 $X = E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 可得 C 的全部元素为 0, $C = 0$, 故 $A = B$ 。 □

4. 设 X, Y 为两个 n 阶正定对称实方阵, 证明: $\det(X + Y) > \det(X)$ 。

证明. X 正定, 故可逆。

$$\det(X + Y) = \det X \cdot \det(I + X^{-1/2}YX^{-1/2}).$$

记 $Z = X^{-1/2}YX^{-1/2}$, Z 正定, 特征值 $\lambda_i > 0$ 。

$$\det(I + Z) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) > \prod_{i=1}^n 1 = 1.$$

因此

$$\det(X + Y) = \det X \cdot \det(I + Z) > \det(X).$$

□

实变函数 (满分 40 分)

1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + |x|} f(x - n) dx.$$

证明. 变量替换 $t = x - n$, $x = t + n$, $dx = dt$:

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{t + n}{1 + |t + n|} f(t) dt.$$

对固定 t , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t + n}{1 + |t + n|} = 1$, 且

$$\left| \frac{t + n}{1 + |t + n|} f(t) \right| \leq |f(t)| \in L^1(\mathbb{R}).$$



由控制收敛定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt.$$

□

2. 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ 。证明:

(a) 积分 $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$ 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$ 存在, 且 $h \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

证明. 考虑二重积分 $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)| dt dx$, 由 Fubini 定理交换积分次序:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)| dx dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| dx \right) dt = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

被积函数绝对可积, 故对几乎所有 x , $\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt < +\infty$, $h(x)$ a.e. 有限.

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)| dt dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

于是 $h \in L^1(\mathbb{R})$, 且 $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ 。

□

复变函数 (满分 40 分)

1. 用留数法计算积分

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta.$$

证明.

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta}.$$

令 $z = e^{i\theta}$, $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ 。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5 + 3 \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{(3z^2 + 10z + 3)} \frac{dz}{i}.$$

分母零点 $z = -3$, $z = -\frac{1}{3}$, 单位圆内极点 $z = -\frac{1}{3}$ 。

$$\text{Res} \left(\frac{1}{3z^2 + 10z + 3}, -\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{8}.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2 + 10z + 3} = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi i}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

□

2. 设 $f(z)$ 是整函数, 满足: 只要 $|z_n| \rightarrow \infty$ 就有 $|f(z_n)| \rightarrow \infty$ 。证明: $f(z)$ 是多项式。

证明. 反证. 若 $f(z)$ 不是多项式, 则 $f(z)$ 是超越整函数。 $g(z) = f(1/z)$ 在 $z = 0$ 为本性奇点。由 Casorati-Weierstrass 定理, 存在序列 $w_n \rightarrow 0$, 使得 $g(w_n)$ 有界。令 $z_n = 1/w_n$, 则 $|z_n| \rightarrow \infty$, 但 $f(z_n) = g(w_n)$ 有界, 与题设条件矛盾。故 $f(z)$ 必为多项式。

□

微分几何 (满分 40 分)

1. 将欧氏空间 $\mathbb{E}^3$ 中 xz -平面上的圆圈

$$S_r(a) = \{(x, y, z) \mid (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$$

绕 z -轴旋转一周生成环面, 记为 $\mathbb{T}_{a,r}$, 其中 $a > r > 0$ 。

(a) 请写出 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的参数表示, 并计算 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的第一、第二基本形式。

(b) 计算 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的面积和高斯曲率, 并找出 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的椭圆点和双曲点的区域。

(c) 计算点 $(a, 0, r)$ 绕 z -轴生成的圆在 $\mathbb{T}_{a,r}$ 上的测地曲率, 并判断其是否为测地线。

(1) 参数表示, $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = ((a + r \cos \theta) \cos \varphi, (a + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta).$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad \mathbf{r}_\varphi = (-(a + r \cos \theta) \sin \varphi, (a + r \cos \theta) \cos \varphi, 0).$$

第一基本形式系数:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r \cos \theta)^2.$$

$$I = r^2 d\theta^2 + (a + r \cos \theta)^2 d\varphi^2.$$

法向量 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi|}$, $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = r(a + r \cos \theta)$ 。第二基本形式系数:

$$L = -r, \quad M = 0, \quad N = -(a + r \cos \theta) \cos \theta.$$

$$II = -r d\theta^2 - (a + r \cos \theta) \cos \theta d\varphi^2.$$

(2) 面积

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r \cos \theta) d\theta d\varphi = 4\pi^2 ar.$$

高斯曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\cos \theta}{a + r \cos \theta}.$$

$-\theta < \frac{\pi}{2}, \cos \theta > 0$: $K > 0$, 椭圆点; $-\theta > \frac{\pi}{2}, \cos \theta < 0$: $K < 0$, 双曲点; $-\theta = \pm \frac{\pi}{2}, K = 0$, 抛物点。

(3) 点 $(a, 0, r)$ 对应参数 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 该圆周曲线测地曲率 $\kappa_g = \frac{1}{r} \neq 0$, 不是测地线。

2. 请判断如下结论是否正确, 并说明理由。

(a) 设 $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ 是 $\mathbb{E}^3$ 中曲面 Σ_1, Σ_2 间的光滑映射, 且在对应点处具有相同的高斯曲率, 即

$$K_{\sigma_1}(p) = K_{\sigma_2}(f(p)), \quad \forall p \in \Sigma_1,$$

则 Σ_1 与 Σ_2 局部等距。

(b) 设 Σ 是 $\mathbb{E}^3$ 中具有正高斯曲率的紧致连通曲面, γ_1, γ_2 为 Σ 上两条简单闭测地线, 则 γ_1, γ_2 会相交。

(1) **错误**。高斯曲率相等只是点态不变量, 映射必须保持第一基本形式才是局部等距。反例: 平面与圆柱面高斯曲率恒为 0, 存在光滑映射保持高斯曲率, 但不是局部等距。

(2) **正确**。紧致连通、正高斯曲率的曲面微分同胚于球面。反证: 假设两条简单闭测地线互不相交, 则球面被两条互不相交简单闭曲线分割, 应用高斯-博内公式, $\iint_D K > 0$, 与区域欧拉示性数矛盾, 故必相交。



1. 考虑交错群 A_4 ，以及元素 (123) 所在的共轭类 C 。考虑 A_4 在 C 上的共轭作用

$$A_4 \times C \rightarrow C, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}.$$

$x \in C$ 的稳定化子定义为

$$\text{Stab}(x) = \{g \in A_4 \mid g \cdot x = x\}.$$

试具体计算 (123) 的稳定化子，并列出 C 中的所有元素。

A_4 中 3- 轮换共轭类 $C = \{(123), (142), (134), (243)\}$, $|C| = 4$ 。轨道 - 稳定子公式: $|\text{Stab}((123))| = \frac{|A_4|}{|C|} = \frac{12}{4} = 3$ 。

$$\text{Stab}((123)) = \{e, (123), (132)\}.$$

2. 考虑三元域 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ ，以及一元多项式环 $\mathbb{F}_3[t]$ ，其中 t 为变元，考虑商环 $K = \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1)$ 。
问: K 是否为整环? 请具体列出 K 的所有含单位元的子环。

$\mathbb{F}_3[t]$ 中 $t^2 + 1$ 无零点，是不可约多项式。 $K = \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1) \cong \mathbb{F}_9$ ，是有限域。域一定是整环，故 K 是整环。

域的含单位元子环必为子域， $\mathbb{F}_9$ 的子域只有 $\mathbb{F}_3$ 和自身。全部含单位元子环:

$$\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}, \quad K = \mathbb{F}_9.$$



中国科学技术大学数学科学学院
2022 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. (20 分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的可微函数, 满足对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $0 < f(x) < 1$ 且 $f'(x) \neq 1$ 。证明: 存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

证明: 令 $g(x) = f(x) - x$ 。

$$g(0) = f(0) > 0, \quad g(1) = f(1) - 1 < 0.$$

由连续函数介值定理, $\exists \xi \in (0, 1)$, $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$, 存在性得证。

反证唯一性: 若存在两点 $\xi_1 < \xi_2$ 满足 $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$ 。由罗尔定理, $\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得

$$g'(\eta) = f'(\eta) - 1 = 0 \implies f'(\eta) = 1,$$

与条件 $f'(x) \neq 1$ 矛盾。故 ξ 唯一。

2. (20 分) 计算定积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$$

解:

$$\sqrt{\cos x - \cos^3 x} = \sqrt{\cos x(1 - \cos^2 x)} = \sqrt{\cos x} |\sin x|.$$

被积函数是偶函数,

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx.$$

令 $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$,

$$I = 2 \int_1^0 \sqrt{u}(-du) = 2 \int_0^1 u^{1/2} du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

3. (20 分) 记圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 被平面 $z = a$ 和 $z = b$ ($0 < a < b$) 所夹的部分为 Σ , 假设 Σ 具有均匀密度 1。求 Σ 对原点处单位质点的引力沿 z 轴方向的分量。

解: 引力 z 分量

$$F_z = G \iint_{\Sigma} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dS.$$

锥面取 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z_x = \frac{x}{z}$, $z_y = \frac{y}{z}$,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $a \leq r \leq b$, $z = r$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2r^2$ 。

$$\begin{aligned} F_z &= G \iint_{a \leq r \leq b} \frac{r}{(2r^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{2} r dr d\theta = G \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \frac{r^2}{2^{3/2} r^3} dr. \\ &= 2\pi G \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int_a^b \frac{1}{r} dr = 2\pi G \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

4. (20 分) 若 $\mathbb{R}^2$ 上定义的二元函数 $f(x, y)$ 分别是单变量 x 及 y 的连续函数。

(a) 判断 $f(x, y)$ 是否为二元连续函数, 证明或举出反例说明结论。

(b) 若进一步假设对任意固定的 x , $f(x, y)$ 是 y 的单调函数, 证明: $f(x, y)$ 是二元连续函数。



(1) 不一定二元连续。反例:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

固定 x , f 关于 y 连续; 固定 y , f 关于 x 连续。沿 $y = x$ 趋于 $(0, 0)$, $f(x, x) = \frac{1}{2}$, 极限不等于 $f(0, 0) = 0$, 在原点不二元连续。

(2) 证明: 任取 $(x_0, y_0), \forall \varepsilon > 0$ 。 $f(x, y_0)$ 在 x_0 连续, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1, |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ 。不妨设 $y \mapsto f(x, y)$ 单调递增。由 $y \mapsto f(x_0, y)$ 在 y_0 连续, 可取 $\delta_2 > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta_2$,

$$|f(x_0, y_0 \pm \delta_2) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

对 $|y - y_0| < \delta_2$, 单调性给出

$$f(x, y_0 - \delta_2) \leq f(x, y) \leq f(x, y_0 + \delta_2).$$

$f(\cdot, y_0 \pm \delta_2)$ 在 x_0 连续, 缩小 δ , 当 $|x - x_0| < \delta$,

$$f(x_0, y_0 - \delta_2) - \varepsilon < f(x, y_0 - \delta_2), \quad f(x, y_0 + \delta_2) < f(x_0, y_0 + \delta_2) + \varepsilon.$$

合并得 $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 3\varepsilon$ 。故二元连续。

线性代数 (满分 80 分)

1. (20 分) 设二次曲面

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xz = 0\}.$$

求 S 中包含的线性子空间的最大维数, 并给出一个达到该维数的子空间。

解: 二次型矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

特征方程

$$\det(\lambda I - Q) = (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 4) = 0,$$

特征值: $4, 0, -1$ 。正惯性指数 1, 负惯性指数 1, 零特征 1。实二次锥 $\mathbf{v}^T Q \mathbf{v} = 0$ 包含线性子空间最大维数为 2。例子: $U = \text{span}\{(1, 0, 1)^T + (0, 1, 0)^T, (1, 0, -1)^T\}$ 。

2. (20 分) 设 $\mathfrak{sl}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ 为迹零矩阵构成的线性空间, 定义对称双线性型

$$Q: \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(AB).$$

求 Q 的正惯性指数与负惯性指数。

解: $\dim \mathfrak{sl}_n = n^2 - 1$ 。非对角元 E_{ij} ($i \neq j$) 共 $n(n-1)$ 个; 对角迹零基 $H_i = E_{ii} - E_{nn}$ $i = 1, \dots, n-1$ 。每一对 $i < j$, 构造 X_{ij}, Y_{ij} , 贡献 1 个正、1 个负方向, 共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个正, $\frac{n(n-1)}{2}$ 个负。对角子空间维数 $n-1$, Q 在其上正定。

正惯性指数:

$$p = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

负惯性指数:

$$q = \frac{n(n-1)}{2}.$$



3. (20 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 满足对任意多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 矩阵 $I_n - f(A)A$ 均可逆。证明: A 是幂零矩阵。

证明: 反证。若 A 不是幂零, 则存在特征值 $\lambda \neq 0$ (实或复)。取多项式 f 满足 $f(\lambda) = \lambda^{-1}$, 则 $I - Af(A)$ 有特征值 $1 - \lambda f(\lambda) = 0$, 故 $I - Af(A)$ 不可逆, 矛盾。于是 A 的所有特征值全为 0, 实矩阵特征全为 0, 则 A 幂零。

4. (20 分) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 若对任意复数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及正整数 m , 矩阵 $(\lambda I_n - A)^m$ 与 $(\lambda I_n - B)^m$ 的秩相等。证明: A 与 B 在 $\mathbb{R}$ 上相似。

证明:

$$\dim \ker(\lambda I - A)^m = n - \text{rank}(\lambda I - A)^m$$

条件说明对每个特征值, 各阶广义特征子空间维数相等, 故 A, B 在复数域上 Jordan 标准型完全相同, 即 $\mathbb{C}$ 上相似。实矩阵若在复数域相似, 则必在实数域相似。故 A, B 在 $\mathbb{R}$ 上相似。

实变函数 (满分 40 分)

1. (10 分) 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在任意区间上绝对连续, 证明: f 将任意 Lebesgue 零测集映射为 Lebesgue 零测集。

证明: 设 E 为零测集。对任意 $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ 。 f 在 $[-N, N]$ 绝对连续, 绝对连续函数把零测集映为零测集, 故 $m(f(E_N)) = 0$ 。

$$f(E) = \bigcup_{N=1}^{\infty} f(E_N),$$

可数个零测集的并仍为零测集, 故 $m(f(E)) = 0$ 。

2. (10 分) 证明: 若点集 $A \subset [0, 1]$ 满足 $m^*(A) + m^*([0, 1] \setminus A) = 1$, 则 A 可测。其中 m^* 表示 Lebesgue 外测度。

证明: 取 G_δ 集 $G \supset A$, $m(G) = m^*(A)$; 取 G_δ 集 $H \supset [0, 1] \setminus A$, $m(H) = m^*([0, 1] \setminus A)$ 。 $G \cup H \supset [0, 1]$, 于是

$$1 \leq m(G \cup H) \leq m(G) + m(H) = 1,$$

故 $m(G \cup H) = 1$, $m(G \cap H) = 0$ 。 $G \setminus H \subset A \subset G$, A 与可测集 $G \setminus H$ 相差零测集, 因此 A 可测。

3. (20 分) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 且存在 $r > 0$ 及常数 M 使得对任意 k , 有

$$\int_a^b |f_n(x)|^r dx \leq M.$$

(a) 证明: 对任意 $0 < p < r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0$ 。

(b) 若将区间 $[a, b]$ 改为 $\mathbb{R}$, 判断上述结论是否仍成立。

(1) 证明: 由 Fatou 引理, $\int_a^b |f|^r dx \leq M$ 。对 $\forall \varepsilon > 0$, 拆分积分

$$\int |f_n - f|^p = \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} |f_n - f|^p + \int_{\{|f_n - f| \leq \delta\}} |f_n - f|^p.$$

第二项 $\leq \delta^p(b - a)$, 取 δ 足够小可控制。Hölder 不等式:

$$\int |f_n - f|^p \chi_{\{|f_n - f| > \delta\}} \leq \left(\int |f_n - f|^r \right)^{p/r} \cdot m(\{|f_n - f| > \delta\})^{\frac{r-p}{r}}.$$

由 Egorov 定理, 除去小测度集, f_n 一致收敛于 f ; L^r 范数一致有界, 故第一项可以任意小。积分趋于 0。

(2) 不成立。 反例: $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ 。几乎处处收敛到 0, $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^r = 1 \leq M$, 但 $\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0|^p = 1$, 不趋于 0。



复变函数 (满分 40 分)

1. (15 分) 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$ 的收敛域为右半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, 且对任意 $\varepsilon > 0$, 该级数在区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}$ 上一致收敛。

证明: 记 $z = x + iy$, $|e^{-n^2 z}| = e^{-n^2 x}$ 。若 $x \geq \varepsilon > 0$, $|e^{-n^2 z}| \leq e^{-n^2 \varepsilon}$, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \varepsilon}$ 收敛。由 M 判别法, 在 $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon$ 一致收敛。 $x < 0$, $n \rightarrow \infty$, $e^{-n^2 x} \rightarrow +\infty$, 通项不趋于 0, 发散。 $x = 0$, $|e^{-n^2 iy}| = 1$, 通项模不为 0, 发散。收敛域: $\operatorname{Re} z > 0$ 。

2. (15 分) 利用留数定理计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx.$$

解:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 + 1} dx.$$

$z^4 + 1 = 0$ 上半平面极点 $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$ 。

$$\operatorname{Res}_{z_k} \frac{e^{iz}}{z^4 + 1} = \frac{e^{iz_k}}{4z_k^3}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 + 1} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z_1} + \operatorname{Res}_{z_2}).$$

计算得到

$$I = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. (10 分) 证明或否定: 对每个正整数 n , 存在整函数 $f_n(z)$, 使得

$$\max_{1 \leq |z| \leq 2} |\operatorname{Re} f_n(z) - \ln |z|| < \frac{1}{n}.$$

答: 不存在。 $u_n = \operatorname{Re} f_n(z)$ 是全平面调和函数。在圆环 $1 \leq |z| \leq 2$, u_n 一致收敛于调和函数 $\ln |z|$ 。由最大值原理, 圆盘 $|z| < 1$ 内 u_n 内闭一致收敛到调和函数 u , 边界 $|z| = 1$ 上 $\ln |z| = 0$, 故 $u \equiv 0$ 。但是 $\ln |z|$ 在 $z = 0$ 处有对数奇点, u_n 在 $z = 0$ 调和, 矛盾。故不存在。

微分几何 (满分 40 分)

1. (10 分) 设 S 为正则光滑曲面, P 为其上一点。记 $k_n(\theta)$ 为点 P 处沿方向 θ (这里 $\theta \in [0, 2\pi)$ 为与主方向的夹角) 的法曲率, 并记 H 为曲面 S 在点 P 处的平均曲率。假定 $H \neq 0$ 。试计算

$$\frac{1}{H} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta.$$

解: 欧拉公式 $k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$ 。

$$\int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta) d\theta = \pi k_1 + \pi k_2 = 2\pi \cdot 2H.$$

$$\frac{1}{H} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta = \frac{4\pi H}{H} = 4\pi.$$

2. (15 分) 设 S 为正则光滑曲面, 在测地平行坐标系 (u, v) 下曲面 S 的第一基本形式为

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2.$$

(a) 计算 Christoffel 符号 Γ_{jk}^i 并写出测地线方程。

(b) 计算高斯曲率 $K(u, v)$ 。



(1) $E = 1, F = 0, G = G(u, v)$ 。

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.\end{aligned}$$

测地线方程:

$$\begin{cases} \ddot{u} - \frac{1}{2}G_u \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + \frac{G_u}{G} \dot{u} \dot{v} + \frac{G_v}{2G} \dot{v}^2 = 0. \end{cases}$$

(2) 正交参数高斯曲率公式:

$$K(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

3. (15 分) 记 S^2 为三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点的单位球面。

(a) 判断 $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ 上是否存在光滑单位切向量场。

(b) 判断 $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ 上是否存在沿所有光滑曲线均平行的非零光滑切向量场。

(1) 存在。去掉南北极, 球坐标 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 是非零光滑切向量场, 归一化得到单位切向量场。

(2) 不存在。若存在处处非零平行切向量场, 则沿任意闭曲线平行移动向量不变。取纬线闭曲线, 球面高斯曲率 $K = 1 > 0$, 环绕该闭曲线的和乐转动角等于高斯曲率在围成区域的积分, 不为零, 平行移动向量会旋转, 矛盾。

近世代数 (满分 40 分)

1. (15 分) 设 $A = \langle a \rangle$ 为 m 阶循环群, $B = \langle b \rangle$ 为 n 阶循环群。

(a) 证明: 所有群同态 $f: A \rightarrow B$ 均可由自然数 k 唯一确定, 满足 $f(a) = b^k$ 。进一步, 请描述由固定 k 所决定的同态性质。

(b) 证明: 自然数 k 可定义上述同态当且仅当 $n \mid km$ 。

(1) 循环群由生成元的像唯一决定, $f(a^t) = b^{kt}$ 。像: $\text{Im } f = \langle b^k \rangle$, 阶为 $\frac{n}{\gcd(k, n)}$; 核: $\ker f = \langle a^{\frac{m}{\gcd(k, m)}} \rangle$, 阶 $\gcd(k, m)$ 。

(2) $a^m = e_A$, 必须 $f(a)^m = b^{km} = e_B$, 故 $n \mid km$ 。反之, 若 $n \mid km$, 映射良定义, 是群同态。

2. (10 分) 设 R 为主理想整环, p 为 R 的素元。证明: 商环 $R/(p)$ 是一个域。

证明: PID 中素元生成极大理想。交换环模去极大理想得到域, 故 $R/(p)$ 为域。

3. (15 分) 设 R 是一个么环, 满足对任意 $a \in R$ 有 $a^2 = a$ (这样的环称作布尔环)。

(a) 证明: R 的特征为 2。

(b) 证明: R 是交换环。

(c) 对任意 $a \in R$, 证明环同构 $R \cong (a) \times (1-a)$ 。

(d) 举例说明存在非整环的布尔环。

(e) 证明: R 的每个有限生成理想均为主理想。

(1) $(a+a)^2 = a+a$, 展开:

$$a^2 + 2a + a^2 = a + a \implies a + 2a + a = a + a \implies 2a = 0.$$

故 $\text{char } R = 2$ 。



(2) $(a+b)^2 = a+b$,

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a+b \implies a + ab + ba + b = a+b,$$

$ab + ba = 0$ 。特征 2, $-ba = ba$, 于是 $ab = ba$, 交换。

(3) 映射 $\phi: R \rightarrow (a) \times (1-a)$, $\phi(r) = (ra, r(1-a))$ 。 ϕ 是环同态。 $\ker \phi = \{r : ra = 0, r(1-a) = 0\}$,

$$r = r \cdot 1 = r(a + (1-a)) = ra + r(1-a) = 0,$$

故单。任取 $(xa, y(1-a))$, 取 $s = xa + y(1-a)$, $\phi(s) = (xa, y(1-a))$, 满。故环同构。

(4) 例子: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 布尔环, $(1,0)(0,1) = (0,0)$, 含零因子, 不是整环。

(5) 设有限生成理想 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 。布尔环交换幂等, 取 $e = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, 则 $(a_1, \dots, a_k) = (e)$, 为主理想。



中国科学技术大学数学科学学院

2024 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 已知函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

求偏导数 f_x, f_{xy} 。

解：第一步： $xy \neq 0$ 处求导

$$f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} + x^2 \cdot \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - y^2 \cdot \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

化简：

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2}, \quad 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$$

$$f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{y(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2x \arctan \frac{y}{x} - y.$$

坐标轴上 $xy = 0$ ，先算 $f_x(x, 0)$ ：固定 $y = 0$ ， $f(x, 0) = 0$ ，故 $f_x(x, 0) = 0$ 。固定 $x \neq 0, y = 0$ ，上面表达式取 $y \rightarrow 0$ ： $2x \cdot 0 - 0 = 0$ ，连续。

再算 f_{xy} 。当 $xy \neq 0$ ：

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2x \arctan \frac{y}{x} - y \right) = 2x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

求混合偏导在 $(0, 0)$ ：

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

注： $f_{yx}(0, 0) = -1$ ，混合偏导在原点不相等。

总结：

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \arctan \frac{y}{x} - y, & xy \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases} \quad f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & xy \neq 0, \\ 0, & (0, 0). \end{cases}$$

2. 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $(0, 1)$ 上的收敛性和一致收敛性。

解：对固定 $x \in (0, 1)$ ，等比级数

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n(1-x) = (1-x) \cdot \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = 1-x^{N+1}.$$

点态极限： $S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = 1$ ，故在 $(0, 1)$ 上逐点收敛到 1。

一致收敛判别：

$$|S_N(x) - S(x)| = x^{N+1}.$$

$\sup_{x \in (0, 1)} x^{N+1} = 1$ ，上确界不趋于 0。或者取点列 $x_N = 1 - \frac{1}{N+1} \in (0, 1)$ ，

$$|S_N(x_N) - S(x_N)| = \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{N+1} \rightarrow e^{-1} \neq 0.$$

故在 $(0, 1)$ 上逐点收敛，但不一致收敛。



3. 利用二重积分计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i^2 + j^2}.$$

解: 变形黎曼和

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i^2 + j^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\frac{i}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

这是单位正方形 $D: [0, 1] \times [0, 1]$ 的二重黎曼和, $x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n}$ 。

$$I = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy.$$

先对 y 积分:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^1 \left[\arctan \frac{y}{x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \arctan \frac{1}{x} dx.$$

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) dx = \frac{\pi}{2} - \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

4. (1) 设函数 $f \in C^1[a, b]$, 且 $f(a) = 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

证明: $f(a) = 0 \implies f(x) = \int_a^x f'(t) dt$ 。由柯西不等式

$$f(x)^2 = \left(\int_a^x 1 \cdot f'(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^x 1^2 dt \right) \left(\int_a^x (f')^2 dt \right) \leq (x-a) \int_a^x (f')^2 dt.$$

两边积分:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \int_a^b (x-a) dx \cdot \int_a^b (f')^2 dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f')^2 dx.$$

(2) 若函数 $f \in C^1(D)$, 其中 $D = [a, b] \times [c, d]$, 且 $f(x, c) = 0$, 证明:

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq \frac{(d-c)^2}{2} \iint_D (f_y(x, y))^2 dx dy.$$

证明: 固定 x , $f(x, c) = 0$,

$$f(x, y) = \int_c^y f_y(x, t) dt.$$

柯西不等式:

$$f(x, y)^2 \leq \left(\int_c^y 1^2 dt \right) \left(\int_c^y f_y^2 dt \right) \leq (y-c) \int_c^y f_y^2(x, t) dt.$$

两边在 D 上二重积分

$$\iint_D f^2 dx dy \leq \iint_D (y-c) \left(\int_c^y f_y^2 dt \right) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d (y-c) dy \int_c^y f_y^2(x, t) dt.$$

$$\int_c^d (y-c) dy = \frac{(d-c)^2}{2}, \text{ 交换积分次序即得}$$

$$\iint_D f^2 dx dy \leq \frac{(d-c)^2}{2} \iint_D f_y^2(x, y) dx dy.$$



5. (1) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单位圆盘, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x, y) = 0$ 。证明:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy = f(0, 0), \quad D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0)).$$

证明: 极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。

$$xf_x + yf_y = r \frac{\partial f}{\partial r}, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{rf_r}{r^2} \cdot r dr d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{\partial f}{\partial r} dr d\theta.$$

对 r 积分:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\partial f}{\partial r} dr = f(1, \theta) - f(\varepsilon, \theta) = 0 - f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta).$$

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

f 在原点连续, $\varepsilon \rightarrow 0$, 积分中值定理:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0, 0) d\theta = f(0, 0).$$

- (2) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通区域, 且原点 $(0, 0) \in D$ 。函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x, y) = 0$ 。计算

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0)).$$

解: 同极坐标变换, 边界 ∂D 上 $f = 0$ 。

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{r(\theta)} \frac{\partial f}{\partial r} dr d\theta = \int_0^{2\pi} (f(r(\theta), \theta) - f(\varepsilon, \theta)) d\theta = -\int_0^{2\pi} f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

由 (1), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \dots = f(0, 0)$,

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy = -2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$, 该积分趋于 $-2\pi f(0, 0)$ 。

线性代数 (满分 80 分)

1. 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵。

解:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

特征值: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 。

$\lambda = 5$: 解 $(5I - A)\mathbf{x} = 0$, 得特征向量 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T$, 单位化: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ 。



$\lambda = -1$: 解 $(-I - A)\mathbf{x} = 0$, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 取正交特征向量 $\xi_2 = (1, -1, 0)^T$, $\xi_3 = (1, 1, -2)^T$ 。
单位化:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T.$$

正交矩阵

$$P = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad P^T A P = \text{diag}\{5, -1, -1\}.$$

2. 证明: n 阶矩阵 A 是幂零矩阵的充要条件是 $\text{tr}(A^k) = 0, 1 \leq k \leq n$ 。

证明: 必要性: 若 A 幂零, 则所有特征值 $\lambda_i = 0$ 。 A^k 特征值为 $\lambda_i^k = 0$, 故 $\text{tr}(A^k) = \sum \lambda_i^k = 0$ 。

充分性: 设 A 在复数域特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。条件给出幂和

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{tr}(A^k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

由 Newton 恒等式, 初等对称多项式 $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = 0$ 。 A 的特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n = \lambda^n.$$

由 Cayley-Hamilton, $A^n = 0$, 即 A 幂零。

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个幂零矩阵, 定义矩阵指数

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

证明: $\exp(A)$ 是可逆矩阵, 且 $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ 。

证明: A 幂零, 存在 m , $A^m = 0$, 级数是有限和:

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!}.$$

二项式乘法, 幂零矩阵 $A, -A$ 可交换:

$$\exp(A) \exp(-A) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-A)^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{2m-2} \left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \right) A^k.$$

$$k \geq 1: \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{i!(k-i)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \frac{(1-1)^k}{k!} = 0. \quad \text{只剩 } k=0 \text{ 项等于 } I.$$

$$\exp(A) \exp(-A) = I \implies \exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

4. 设 V 为有限维线性空间, $\Phi: V \rightarrow V$ 是幂零线性变换。证明: 存在唯一的线性子空间链

$$\{0\} = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k = V,$$

满足:

(a) $\Phi(W_i) \subset W_{i+2}$ 对所有 $-1 \leq i \leq k-2$ 成立。

(b) $W_{i+1}/W_i \cong W_{k-i}/W_{k-i-1}$ 对所有 $0 \leq i \leq k-1$ 成立。



证明思路：幂零变换 Φ 的 Jordan 块分解， k 为幂零指数， $\Phi^k = 0, \Phi^{k-1} \neq 0$ 。取 $W_i = \ker \Phi^{i+1}$ ，即幂零变换的核上升链：

$$W_{-1} = \ker \Phi^0 = \{0\}, W_0 = \ker \Phi^1, W_1 = \ker \Phi^2, \dots, W_{k-1} = \ker \Phi^k = V.$$

(1) $\Phi(W_i) = \Phi(\ker \Phi^{i+1}) \subset \ker \Phi^i = W_{i-1}$ ，题目条件下标移位，重新标号即可满足 $\Phi(W_i) \subset W_{i+2}$ 。

(2) Jordan 标准型中，商空间 $W_{i+1}/W_i = \ker \Phi^{i+2}/\ker \Phi^{i+1}$ 的维数等于 Jordan 块阶数大于 $i+1$ 的块的个数；对偶地， W_{k-i}/W_{k-i-1} 维数相同，故同构。

唯一性：该链就是幂零变换的根子空间升链，由 Jordan 块的大小唯一确定，故子空间链唯一。

实变函数（满分 40 分）

1. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Borel/Lebesgue 可测函数，讨论复合函数 $g \circ f$ 的可测性。

解： 1. 若 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 **Borel 可测函数**，则 $g \circ f$ 必可测。理由：对任意 Borel 集 B ， $g^{-1}(B)$ 是 Borel 集： $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$ ， f 可测，原像可测。

2. 若 g 仅仅是 Lebesgue 可测，则 $g \circ f$ **不一定 Lebesgue 可测**。反例：存在 Lebesgue 可测集 A ，Borel 零测集 N ， $A \subset N$ ， $g = \chi_A$ 是 Lebesgue 可测；取 f 为连续函数把零测 Borel 集映到 N ，使得 $f^{-1}(A)$ 不可测，则 $g \circ f = \chi_A \circ f$ 不可测。

总结： g Borel 可测 $\implies g \circ f$ 可测； g 仅 Lebesgue 可测，复合不一定可测。

2. 设 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数，证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} nt^{-(n+1)} f(t) dt = f(1).$$

证明：做变量替换 $u = t^{-n}$ ， $t = u^{-1/n}$ ， $dt = -\frac{1}{n} u^{-\frac{1}{n}-1} du$ 。

$$\int_1^{+\infty} nt^{-(n+1)} f(t) dt = \int_0^1 f(u^{-1/n}) du.$$

记 $g_n(u) = f(u^{-1/n})$ 。- $u \in (0, 1)$ ， $n \rightarrow \infty$ ， $u^{-1/n} = e^{-\frac{\ln u}{n}} \rightarrow 1$ ，故 $g_n(u) \rightarrow f(1)$ ；- f 有界， $|g_n(u)| \leq M$ ，控制收敛定理适用。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(u) du = \int_0^1 f(1) du = f(1).$$

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 中收敛，证明其存在几乎处处收敛的子列。

证明：若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$ ，则 f_n 依测度收敛于 f 。依测度收敛的函数列，必存在子列 f_{n_k} ，使得 f_{n_k} 几乎处处收敛到 f （Riesz 定理）。

复变函数（满分 40 分）

1. 设整函数 $f(z)$ 满足 $\int_{\mathbb{C}} |f(z)| dA(z) < +\infty$ ， $dA(z)$ 为复平面面积测度，证明： $f(z) \equiv 0$ 。

证明：Cauchy 积分公式，对任意 $r > 0$ ，

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

两边对圆盘 $B(z_0, R)$ 面积平均：

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B(z_0, R)} f(z) dA(z).$$

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\mathbb{C}} |f(z)| dA.$$

令 $R \rightarrow +\infty$ ，右边趋于 0，故 $f(z_0) = 0$ ，由 z_0 任意， $f \equiv 0$ 。



2. 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上的全纯函数, 且满足当 $|z| \rightarrow 1^-$ 时, $|f(z)| \rightarrow 1$ 。证明: 存在有限个复数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ 和实数 $t \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(z) = e^{it} \prod_{i=1}^n \left(\frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z} \right)^{n_i}, \quad n_i \in \mathbb{N}^+.$$

证明: 由最大模原理, f 在 $\mathbb{D}$ 内零点至多可数。条件 $|f(z)| \rightarrow 1, |z| \rightarrow 1^-$, 说明零点只有有限个, 记零点 a_i , 阶数 n_i 。记有限 Blaschke 乘积

$$B(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z} \right)^{n_i}.$$

则 $h(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$ 在 $\mathbb{D}$ 无零点, $|h(z)| \rightarrow 1, |z| \rightarrow 1^-$ 。 $\log h(z)$ 全纯, 边界模恒为 1, $\operatorname{Re} \log h = \ln |h| \rightarrow 0$, 由 Schwarz 反射原理, $h(z)$ 是模恒为 1 的全纯函数, 故 $h(z) = e^{it}, t \in \mathbb{R}$ 。于是 $f(z) = e^{it} B(z)$ 。

3. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为有界闭区域, 全纯映射 $f: D \rightarrow D$ 存在不动点 $z_0 \in D$ 。证明: $|f'(z_0)| \leq 1$ 。

证明: 取 z_0 为不动点 $f(z_0) = z_0$ 。做分式线性变换把 z_0 映到原点, 不妨设 $z_0 = 0, f(0) = 0, f: \mathbb{D} \rightarrow D$, D 有界。由 Schwarz 引理推广: 令 $M = \sup_{z \in D} |z| < +\infty$ 。 f 在原点 Taylor 展开 $f(z) = f'(0)z + \dots$ 。考虑迭代 $f_n(z) = f^n(z), f_n(0) = 0, |f_n(z)| \leq M$ 。由 Cauchy 导数估计:

$$|(f^n)'(0)| = |f'(0)|^n \leq \frac{M}{r^n}, \quad \forall r > 0.$$

若 $|f'(0)| > 1$, 左边 $|f'(0)|^n \rightarrow +\infty$, 矛盾。故 $|f'(z_0)| \leq 1$ 。

注: 若 z_0 在内部, $|f'(z_0)| = 1$ 可推出 f 是旋转。

微分几何 (满分 40 分)

1. 设球面方程为 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, 上任取一条大圆 (球面的测地线)。

(a) 求此大圆作为空间曲线的曲率和挠率。

(b) 求球面 S^2 的 Gauss 曲率。

(c) 求此大圆在球面上的测地曲率。

解: (1) 大圆: 平面与球面交线, 半径 R , 平面曲线。空间曲率: $k = \frac{1}{R}$; 平面曲线挠率 $\tau = 0$ 。

(2) 球面两主曲率均为 $\frac{1}{R}$, 高斯曲率

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{R^2}.$$

(3) 大圆是球面测地线, 测地曲率 $k_g = 0$ 。

2. 设曲面 S 的方程为 $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$, 其中 $f(u, v)$ 为光滑函数。

(a) 计算曲面的第一基本形式 I 和第二基本形式 II。

(b) 当 $f(u, v) = \ln \cos u - \ln \sin v$ 时, 求曲面的平均曲率 H 。

(1)

$$S_u = (1, 0, f_u), \quad S_v = (0, 1, f_v).$$

$$E = S_u \cdot S_u = 1 + f_u^2, \quad F = S_u \cdot S_v = f_u f_v, \quad G = S_v \cdot S_v = 1 + f_v^2.$$

$$I = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = (1 + f_u^2)du^2 + 2f_u f_v du dv + (1 + f_v^2)dv^2.$$

单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{S_u \times S_v}{|S_u \times S_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$



$$S_{uu} = (0, 0, f_{uu}), S_{uv} = (0, 0, f_{uv}), S_{vv} = (0, 0, f_{vv}).$$

$$L = \mathbf{n} \cdot S_{uu} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad M = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad N = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

$$(2) f(u, v) = \ln \cos u - \ln \sin v.$$

$$f_u = \frac{-\sin u}{\cos u} = -\tan u, \quad f_v = \frac{-\cos v}{\sin v} = -\cot v.$$

$$f_{uu} = -\sec^2 u, \quad f_{uv} = 0, \quad f_{vv} = \csc^2 v.$$

$$1 + f_u^2 + f_v^2 = 1 + \tan^2 u + \cot^2 v = \sec^2 u + \csc^2 v.$$

平均曲率公式

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

$$F = M = 0,$$

$$E = 1 + \tan^2 u = \sec^2 u, \quad G = 1 + \cot^2 v = \csc^2 v.$$

$$L = \frac{-\sec^2 u}{\sqrt{\sec^2 u + \csc^2 v}}, \quad N = \frac{\csc^2 v}{\sqrt{\sec^2 u + \csc^2 v}}.$$

$$EG - F^2 = \sec^2 u \csc^2 v.$$

$$EN + GL = \sec^2 u \cdot \frac{\csc^2 v}{\sqrt{\dots}} + \csc^2 v \cdot \frac{-\sec^2 u}{\sqrt{\dots}} = 0.$$

$H = 0$, 此曲面为极小曲面。

3. 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是紧致, 无边界, 可定向的曲面。

(a) 若 S 上存在处处非零的光滑切向量场, 构造 S 上的整体正交活动标架。

(b) 说明球面 S^2 是否存在处处非零的光滑切向量场, 并给出理由。

解: (1) 设 $\mathbf{X}$ 处处非零切向量场, 单位化 $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|}$ 。 S 可定向, 有整体单位法向量场 $\mathbf{n}$ 。令 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_1$ 。则 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ 构成 S 上整体正交单位活动标架。

(2) 球面 S^2 不存在处处非零光滑切向量场。由 Poincaré-Hopf 定理: 紧致无边可定向曲面, 切向量场的指标之和等于欧拉示性数。 $\chi(S^2) = 2 \neq 0$ 。若存在处处非零切向量场, 则总指标为 0, 矛盾。故不存在。

近世代数 (满分 40 分)

1. 求 Abel 群 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24}$ 的不变因子和初等因子。

解: $24 = 8 \times 3$, $\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3$ 。

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3.$$

初等因子 (素数幂): $\{2, 2^3, 2^3, 3\}$ 。

不变因子: 按从大到小, 最大不变因子取各素最高幂: $2^3 \cdot 3 = 24$; 剩余 $2^3, 2$;

不变因子: $2, 8, 24$ 。

验证: $2 \oplus 8 \oplus 24$, 阶 $2 \times 8 \times 24 = 384$, 与原群阶 $2 \cdot 8 \cdot 24 = 384$ 相等。



2. 设 H 和 K 是群 G 的正规子群, 且 $HK = G$ 。证明:

$$G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

证明: 构造同态

$$\varphi: G \rightarrow (G/H) \times (G/K), \quad \varphi(g) = (gH, gK).$$

φ 是群同态。

$$\ker \varphi = \{g \in G \mid g \in H, g \in K\} = H \cap K.$$

下证 φ 满: 任取 $(aH, bK) \in (G/H) \times (G/K)$ 。 $HK = G$, 记 $a = h_1k_1$, $b = h_2k_2$ 。取 $g = h_1b$ 。
 $gH = h_1bH = bH$ ($h_1 \in H$); $gK = h_1bK = h_1h_2k_2K = h_1h_2K$ 。另一种标准证法: $HK = G$, 对任意 $x, y \in G$, 存在 $g \in G$, 使得 $g \equiv x \pmod{H}$, $g \equiv y \pmod{K}$ 。由群同态基本定理:

$$G/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi.$$

由 $HK = G$, φ 满, 故

$$G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

3. 证明: 有限含么交换环的素理想必是极大理想。

证明: 设 R 有限交换么环, P 是素理想。则商环 R/P 是有限整环。有限整环必是域。商环是域 $\iff P$ 是极大理想。证毕。

4. 设 $f(x, y) \in K[x, y]$ 是不可约多项式。

(a) 证明: $f(x, y)$ 在 $K(y)[x]$ 中要么是不可约元, 要么是单位。

(b) 已知 $g(x, y) \in K[x, y]$ 且 $f(x, y) \nmid g(x, y)$, 证明方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

在 K 上只有有限个解。

(1) 证明: $K[x, y] = K[y][x]$ 。 $f(x, y) \in K[y][x]$ 。若 f 在 $K[y][x]$ 不是不可约元, 则可分解 $f = AB$, $A, B \in K(y)[x]$, 都不是单位。由 Gauss 引理, 可以清分母, 得到 f 在 $K[y][x]$ 的非平凡分解, 与 f 在 $K[x, y]$ 不可约矛盾。 $K(y)[x]$ 的单位恰是 $K(y)$ 中非零元; $f \in K[x, y]$, 若 f 是单位, 则 $f \in K^*$, 常数多项式。故: 要么 f 是单位 (常数), 要么 f 在 $K(y)[x]$ 不可约。

(2) 证明: f 不可约, $f \nmid g$ 。视 $f, g \in K(y)[x]$ 。由 (1), f 在 $K(y)[x]$ 不可约; g 不被 f 整除, 故在 $K(y)[x]$ 中 $\gcd(f, g) = 1$ 。于是存在 $u, v \in K(y)[x]$, 使得 $uf + vg = 1$ 。通分, 乘 $d(y) \in K[y]$, 得到 $U, V \in K[x, y]$,

$$Uf + Vg = d(y).$$

若 (a, b) 是公共零点, 则 $d(b) = 0$ 。 $d(y)$ 是一元非零多项式, 只有有限个根 b 。对每一个固定的 b , 代入 $f(x, b) = 0$, 一元多项式, 只有有限个 x 。因此方程组公共解只有有限多。



中国科学技术大学数学科学学院
2026 年夏令营招生考试试题（回忆版）

数学分析（80 分）

1. (20 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > a_0 > 0$, 且

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}}$$

求证: $\{a_n\}$ 收敛, 且极限为正。

证明: 取倒数, 令 $b_n = \frac{1}{a_n} > 0$ 。

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2a_{n+1}^2} \implies b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_n a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n.$$

改写原式:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{2a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{2}{\frac{a_n}{a_{n+1}} + 1}.$$

记 $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$, 则 $r_{n+1} = \frac{2}{r_n + 1}$ 。初值 $r_0 = \frac{a_1}{a_0} > 1$ 。迭代 $r_{n+1} = \frac{2}{r_n + 1}$ 。不动点 $r = \frac{2}{r+1} \implies r^2 + r - 2 = 0 \implies r = 1$ (正根)。

$$|r_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{r_n + 1} - 1 \right| = \frac{|1 - r_n|}{r_n + 1} \leq |r_n - 1|.$$

进一步: $r_0 > 1 \implies r_1 = \frac{2}{r_0 + 1} < 1$, $r_2 = \frac{2}{r_1 + 1} > 1$, 奇偶震荡趋向 1。 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ 。

$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, $\ln a_n = \ln a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \ln r_k$ 。 $\ln r_{k+1} = \ln 2 - \ln(r_k + 1)$, $\{r_n\} \rightarrow 1$, $\ln r_n \rightarrow 0$ 。可以证明 $\{a_n\}$ 有上下正界, $\underline{\lim} a_n > 0$, $\overline{\lim} a_n > 0$ 。对原式两边取上下极限: 记 $\alpha = \underline{\lim} a_n$, $\beta = \overline{\lim} a_n$,

$$\beta = \frac{2\beta^2}{\alpha + \beta} \implies \beta(\alpha + \beta) = 2\beta^2 \implies \alpha + \beta = 2\beta \implies \alpha = \beta.$$

故极限存在 $A = \lim a_n > 0$ 。代入递推: $A = \frac{2A^2}{A + A} = A$, 自治。

2. (20 分) 定义在 $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x)$ 有非负的三阶导数, 满足

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) - 1.$$

求所有满足条件的 $f(x)$ 。

解: 差分方程。记移位算子 $Tf(x) = f(x+1)$, 方程:

$$(T - I)f(x) = f'(x) + 1.$$

已知 $f'''(x) \geq 0$, f''' 非负, 故 f'' 单调递增, f' 凸。对等式两边连续求导:

$$f''(x) = f'(x+1) - f'(x), \quad f'''(x) = f''(x+1) - f''(x).$$

因为 $f'''(t) \geq 0$, $f''(x+1) \geq f''(x)$, f'' 不减。设 f 是多项式解: 假设次数 d 。左边 $f'(x)$ 次数 $d-1$; 右边 $f(x+1) - f(x) - 1$ 最高次项为 dx^{d-1} , 故 $d-1 = d-1$, 比较系数: $d = 2$ 。设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 。

$$f'(x) = 2ax + b.$$

$$f(x+1) - f(x) - 1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) - 1 = 2ax + a + b - 1.$$



等式 $2ax + b = 2ax + a + b - 1 \implies a - 1 = 0 \implies a = 1$ 。 $f(x) = x^2 + bx + c$ 。检验三阶导数： $f'''(x) \equiv 0 \geq 0$ ，满足条件。

再证明没有非多项式解： $f'''(x+1) - f'''(x) = f^{(4)}(x)$ 。若 f 不是二次多项式，则 f''' 非零。但 f'' 单调递增。若 f''' 不恒等于 0，则当 $x \rightarrow +\infty$ ， $f''(x) \rightarrow +\infty$ ， $f'(x+1) - f'(x) = f''(x) \rightarrow +\infty$ 。而 $f'(x)$ 二阶导数 f'' 递增，差分增长太快，矛盾。故全部解：

$$f(x) = x^2 + bx + c, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

3. (20 分) 计算二重积分

$$I = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

解：单位正方形，利用对称性，计算 $x, y \geq 0$ ，分 $y \leq x$ 和 $y \geq x$ 。

$$I = 2 \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

内层积分公式：

$$\int \sqrt{x^2 + y^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{2} \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

代入 $0 \rightarrow x$ ：

$$\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2x} + \frac{x^2}{2} \ln(x + \sqrt{2x}) = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 + \frac{x^2}{2} (\ln x + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x^2 + \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right) dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 x^2 dx + (\ln(1 + \sqrt{2})) \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^2 \ln x dx. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \quad \int_0^1 x^2 \ln x dx = -\frac{1}{9}.$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{9}.$$

4. (10 分) 定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 函数 $f(x, y)$ 连续可微，边界恒为 0。求证

$$\left| \iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{1}{6} \max_{[0,1]^2} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}.$$

证明：记 $M = \max \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ 。 f 在边界为 0，对任意 (x, y) ，由沿线段从边界积分：取从 $(0, y)$ 到 (x, y) ， $f(x, y) = \int_0^x f_x(t, y) dt$ 。

$$|f(x, y)| \leq \int_0^x |f_x(t, y)| dt \leq \int_0^x M dt = Mx.$$

同理， $|f(x, y)| \leq M(1 - x), My, M(1 - y)$ 。

$$|f(x, y)| \leq M \cdot \min\{x, 1 - x, y, 1 - y\}.$$

$$\left| \iint f \right| \leq M \iint_{[0,1]^2} \min\{x, 1 - x, y, 1 - y\} dx dy.$$

正方形四等分，只算第一象限小正方形 $0 \leq y \leq x \leq 1/2$ ，乘以 4。

$$\iint_{[0,1]^2} \min\{x, 1 - x, y, 1 - y\} = 4 \int_0^{1/2} dx \int_0^x y dy = 4 \int_0^{1/2} \frac{x^2}{2} dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} = 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

【注】这里得到 $\frac{1}{12}$ ，题目右端是 $\frac{1}{6}M$ ， $\frac{1}{12}M \leq \frac{1}{6}M$ ，不等式成立。 > 注：本证明给出更紧界 $\frac{1}{12}M$ ，自然蕴含题目的 $\frac{1}{6}M$ 。



5. (10 分) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, f 二阶连续可微, $f(0, 0) = 0$, $\Delta f = x + x^2 + y^2$, 计算

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

解: 使用格林公式/泊松方程积分技巧。极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。格林公式: $\iint_D \Delta f \cdot G dx dy = \oint_{\partial D} \cdots - \iint_D f \Delta G$ 。取格林函数 $G = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)$, 满足 $\Delta G = 1$ 。

$$\iint_D f \cdot 1 dx dy = \iint_D f \Delta G = \oint_{\partial D} \left(G \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds - \iint_D G \Delta f.$$

在 ∂D , $G = 0$; $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{r}{2} \Big|_{r=R} = -\frac{R}{2}$.

$$I = \oint_{\partial D} f \cdot \frac{R}{2} ds - \iint_D \frac{R^2 - r^2}{4} (x + x^2 + y^2) dx dy.$$

但注意: 条件只有 $f(0, 0) = 0$, ** 没有边界条件, 不能直接消去环路积分! ** > 正确思路: 分解方程 $\Delta f = x + (x^2 + y^2)$ 。找特解。 $\Delta f_1 = x$, 试 $f_1 = \frac{1}{8}x(x^2 + y^2)$; $\Delta f_2 = x^2 + y^2$, 试 $f_2 = \frac{1}{16}(x^2 + y^2)^2$ 。

$$\Delta f_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}xy^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\cdots) = \frac{1}{8}(6x) + \frac{1}{8}(2x) = x.$$

$$\Delta f_2 = \Delta \left(\frac{1}{16}r^4 \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^4}{16} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{4r^3}{16} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^4}{4} = r^2 = x^2 + y^2.$$

通解: $f = f_1 + f_2 + h$, $\Delta h = 0$, h 调和。

$$f(0, 0) = 0 \implies h(0, 0) = 0.$$

$$I = \iint_D f_1 dx dy + \iint_D f_2 dx dy + \iint_D h dx dy.$$

$\iint_D f_1 = \iint_D \frac{1}{8}x(x^2 + y^2) dx dy$, 被积函数是 x 奇函数, 圆盘对称, 该项等于 0。

$$\iint_D f_2 = \iint_D \frac{1}{16}r^4 \cdot r dr d\theta = \frac{1}{16} \cdot 2\pi \int_0^R r^5 dr = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^6}{6} = \frac{\pi R^6}{48}.$$

调和函数均值性质: $\iint_D h(x, y) dx dy = h(0, 0) \cdot \text{Area}(D) = 0 \cdot \pi R^2 = 0$.

$$I = \frac{\pi R^6}{48}.$$

线性代数与解析几何 (80 分)

1. (20 分) 曲线

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 0, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

变换 $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + 2z, z + 3x)$, 变换后得到椭圆, 求椭圆中心、法向量、面积。

解: 记线性变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

原曲线是平面 $x + y + z = 3$ 上的二次曲线, 平面与二次锥面 $xy + yz + zx = 0$ 交线。原平面 $x + y + z = 3$, 中心: 原平面上二次曲线的中心, 满足导数条件。 $xy + yz + zx = 0$, 平面 $x + y + z = 3$ 。原中心 $(1, 1, 1)$ 。变换后椭圆中心: $T(1, 1, 1)^T = (2, 3, 4)^T$ 。



原平面法向量 $\mathbf{n}_0 = (1, 1, 1)$; 变换后平面: u, v, w 满足约束, $T^{-T}\mathbf{n}_0$ 为新平面法向量。

$$\det T = 1(1-0) - 1(0-6) + 0 = 1+6 = 7, \quad T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

原二次型 $Q(x, y, z) = xy + yz + zx = \frac{1}{2}[(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]$ 。在平面 $x+y+z=3$, $Q = \frac{1}{2}(9 - (x^2 + y^2 + z^2)) = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 。原曲线是平面 $x+y+z=3$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 交线, 是圆! 半径 $r = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$ 。原圆面积 $S_0 = \pi \cdot 6 = 6\pi$ 。线性变换限制到二维平面, 面积放大倍数是该平面上诱导线性映射的面积伸缩因子。

2. (20 分) 分块方阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

满足 $B^T D$ 为对称矩阵。求证:

$$\det M = \det(A^T D - C^T B).$$

证明: 分块变换。条件 $(B^T D)^T = B^T D \implies D^T B = B^T D$ 。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BB & B \\ CD - DB & D \end{pmatrix}.$$

改用转置思路:

$$M^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}.$$

由条件 $D^T B = B^T D$ 。做分块消元:

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T D & -A^T B + C^T A \\ B^T D & -B^T B + D^T A \end{pmatrix}.$$

另一种标准套路: 若 D 可逆,

$$\det M = \det D \det(A - BD^{-1}C).$$

目标右端 $\det(A^T D - C^T B) = \det(D^T A - B^T C)$ 。条件 $D^T B = B^T D$ 。

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{pmatrix}.$$

对 $\begin{pmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{pmatrix}$ 做分块行变换: $R_2 - C^T(D^T)^{-1}R_1$:

$$\det(D^T) \det(A^T - C^T(D^T)^{-1}B^T) = \det(D^T A - C^T B).$$

$\det(M) = \det(M^T) = \det \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$ 。当 D 可逆,

$$\det \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \det(D^T) \det(A^T - C^T(D^T)^{-1}B^T) = \det(A^T D - C^T B).$$

可逆情形成立; 多项式恒等式, 去掉可逆条件, 等式作为多项式恒成立。

3. (20 分) 记

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



求方阵

$$M = \begin{pmatrix} B & B & O \\ O & B & B \\ O & O & B \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形。

解: $B = I + N$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$, B 是 3 阶 Jordan 块 $J_3(1)$ 。

$$M = \begin{pmatrix} I+N & I+N & 0 \\ 0 & I+N & I+N \\ 0 & 0 & I+N \end{pmatrix} = I_9 + \begin{pmatrix} N & N & 0 \\ 0 & N & N \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} = I + Q.$$

$Q = \begin{pmatrix} N & N & 0 \\ 0 & N & N \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}$, 求 Q 的 Jordan 标准形。 $\lambda = 1$ 是 M 唯一特征值。计算 Q 的幂零指数。 $N^3 = 0$

。计算 $\ker Q, \ker Q^2, \ker Q^3, \ker Q^4$ 。 Q 是 9 阶幂零矩阵。 $\dim \ker Q = \text{rank}(Q)$ 补: Q 每块 N 秩为 2, 算出来 $\dim \ker Q = 3$; $\dim \ker Q^2 = 6$; $\dim \ker Q^3 = 8$; $\dim \ker Q^4 = 9$ 。幂零 Jordan 块: $J_4(0), J_3(0), J_2(0)$ 。于是 M 的 Jordan 标准形: $J_4(1) \oplus J_3(1) \oplus J_2(1)$ 。

4. (20 分) $V = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr} A = 0\}$, V 上线性变换 $\mathcal{P}(X) = P^{-1}XP$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathcal{P}$ 的特征多项式。

解: 共轭映射 $\text{Ad}_P : X \mapsto P^{-1}XP$ 。 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ 是 8 维实线性空间。若 P 特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 Ad_P 在 M_3 上特征值 λ_i/λ_j , $1 \leq i, j \leq 3$ 。去掉 $i = j$ 对应特征值 1 (一维迹部分), 剩下 8 个就是 $\mathfrak{sl}_3$ 上 $\mathcal{P}$ 特征值。 P 下三角, 特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ 。 $M_3(\mathbb{R})$ 上 Ad_P 特征值:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2, 1, \frac{1}{2}, 4, 2, 1.$$

去掉一维迹对应的特征值 1 (一重)。 $\mathcal{P}$ 的特征值:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{4}, 4.$$

特征多项式:

$$\det(tI - \mathcal{P}) = (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 (t-2)^2 \left(t - \frac{1}{4}\right) (t-4).$$

实分析 (40 分)

1. (10 分) 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, g 是 $\mathbb{R}$ 上有界可测函数, 卷积

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

求证: $f * g$ 有界并且一致连续。

证明: 有界: $|(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|g\|_{\infty} \|f\|_{L^1}$, 故有界。

一致连续:

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| \leq \int |f(x+h-y) - f(x-y)||g(y)|dy \leq \|g\|_{\infty} \int |f(z+h) - f(z)|dz.$$

L^1 函数的平移连续性: $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot+h) - f\|_{L^1} = 0$ 。 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta, \|f(\cdot+h) - f\|_{L^1} < \varepsilon/\|g\|_{\infty}$, 于是 $|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| < \varepsilon$, 与 x 无关, 一致连续。



2. (15 分) 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上绝对连续函数。求证:

- f 把零测集映为零测集;
- f 把可测集映为可测集。

证明: 1. 绝对连续定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对互不相交区间 $\{(a_i, b_i)\}$, $\sum |b_i - a_i| < \delta \implies \sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ 。设 N 零测, $\forall \varepsilon > 0$, 取可数开区间覆盖 N , 总长度 $< \delta$ 。则 $f(N)$ 可以被区间 $\{f((a_i, b_i))\}$ 覆盖, 总外测度 $\leq \sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ 。 ε 任意, $m^*(f(N)) = 0$, $f(N)$ 零测。

2. 任意可测集 E , 写成 $E = F \cup N$, F 是 F_σ 集, N 零测。 $f(F)$ 是 F_σ (连续映紧为紧, 可数并), $f(N)$ 零测, 故 $f(E) = f(F) \cup f(N)$ 可测。

3. (15 分) 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ 是正外测度集合。求证: $\exists h \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

证明: 用 Fubini 定理。考虑特征函数卷积:

$$\chi_{E_1} * \chi_{E_2}(h) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{E_1}(x) \chi_{E_2}(x - h) dx = m(E_1 \cap (E_2 + h)).$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\chi_{E_1} * \chi_{E_2})(h) dh = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{E_1} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{E_2}(x - h) dh dx = m(E_1) m(E_2) > 0.$$

积分大于 0, 故被积函数不能几乎处处为 0, 必存在 h 使得 $m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0$ 。

复分析 (40 分)

1. (10 分) D 是 $\mathbb{C}$ 上边界光滑区域, f 在 $\overline{D}$ 全纯。证明:

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z) - \bar{z}| \geq \frac{2 \text{Area}(D)}{\text{Length}(\partial D)}.$$

证明: 复格林公式, $\text{Area}(D) = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} \bar{z} dz$. f 全纯, $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ 。

$$\int_{\partial D} (f(z) - \bar{z}) dz = - \int_{\partial D} \bar{z} dz = -2i \text{Area}(D).$$

取模:

$$2 \text{Area}(D) = \left| \int_{\partial D} (f(z) - \bar{z}) dz \right| \leq \sup_{\partial D} |f(z) - \bar{z}| \cdot \text{Length}(\partial D).$$

移项即

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z) - \bar{z}| \geq \frac{2 \text{Area}(D)}{\text{Length}(\partial D)}.$$

2. (15 分) 设 $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, $\mathbb{D}$ 单位圆盘。证明 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上单射, 并求值域。

解: 分式变换, 令 $w = \frac{z}{(z-1)^2}$ 。解方程 $w = \frac{z}{(z-1)^2}$, $w(z-1)^2 - z = 0$, $wz^2 - (2w+1)z + w = 0$ 。两根 z_1, z_2 , 韦达: $z_1 z_2 = 1$ 。若 $|z_1| < 1$, 则 $|z_2| = \frac{1}{|z_1|} > 1$ 。单位圆盘内至多一个根, 故 f 在 $\mathbb{D}$ 单射。

求值域: $z \in \mathbb{D}$, $w = \frac{z}{(z-1)^2}$ 。这是 Koebe 函数, 值域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ 。

3. (15 分) 整函数 $f(z)$ 满足

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^{2029}} dA(z) < +\infty.$$

证明 $f(z)$ 是次数不超过 2026 的多项式。



证明：整函数，取圆盘 $B(0, R)$ ，柯西积分，对 $k \geq 0$ ，导数估计：

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz.$$

面积平均：

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \frac{(k+1)!}{\pi R^{k+2}} \iint_{|z| \leq R} \frac{f(z)}{z^k} dA(z). \\ |f^{(k)}(0)| &\leq \frac{(k+1)!}{\pi R^{k+2}} \iint_{|z| \leq R} |f(z)| dA(z) \leq \frac{(k+1)!}{\pi R^{k+2}} \cdot C \cdot R^{2029}. \\ |f^{(k)}(0)| &\leq C' \cdot \frac{(k+1)! R^{2029}}{R^{k+2}} = C'(k+1)! R^{2027-k}. \end{aligned}$$

若 $k > 2026$ ， $2027 - k < 0$ ，令 $R \rightarrow +\infty$ ，得到 $f^{(k)}(0) = 0$ 。于是 $k \geq 2027$ 阶导数全为 0， $f(z)$ 是次数至多 2026 多项式。

近世代数（40 分）

1. (10 分) 分类 360 阶有限 Abel 群。 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ 。初等因子（素幂部分）： 2^3 : 8; $4 \oplus 2$; $2 \oplus 2 \oplus 2$. 3^2 : 9; $3 \oplus 3$. 5^1 : 5.

全部初等因子型：1. $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$ 2. $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ 3. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$ 4. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ 5. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$ 6. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$.

不变因子（从大到小）：1. 360 2. $120 \oplus 3$ 3. $180 \oplus 2$ 4. $60 \oplus 6$ 5. $90 \oplus 2 \oplus 2$ 6. $30 \oplus 6 \oplus 2$.

2. (10 分) u 是 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的根。

- 证明 $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$;
- 将 $(1+u)^{-1}$ 表示为 $\{1, u, u^2\}$ 的 $\mathbb{Q}$ -线性组合。

证明：由 Eisenstein 判别法，做替换 $x = t + 2$ 或者模 p 判别。 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, $f(1) = 1 - 6 + 9 + 3 = 7 > 0$, $f(3) = 27 - 54 + 27 + 3 = 3 > 0$, $f(0) = 3 > 0$, $f(4) = 64 - 96 + 36 + 3 = 7 > 0$, $f(-1) = -1 - 6 - 9 + 3 = -13 < 0$ 。仅有一个实根，无有理根，三次不可约，故 $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$ 。

求逆： $(1+u)(au^2 + bu + c) = 1$ 。 $u^3 = 6u^2 - 9u - 3$ 。 $(u+1)(au^2 + bu + c) = au^3 + (a+b)u^2 + (b+c)u + c = a(6u^2 - 9u - 3) + (a+b)u^2 + (b+c)u + c = (7a+b)u^2 + (-8a+b+c)u + (-3a+c) = 1$ 。方程组

$$\begin{cases} 7a + b = 0, \\ -8a + b + c = 0, \\ -3a + c = 1. \end{cases}$$

解得： $a = 1/11$, $b = -7/11$, $c = 14/11$ 。

$$(1+u)^{-1} = \frac{1}{11}u^2 - \frac{7}{11}u + \frac{14}{11}.$$

3. (10 分) R 含么交换环， P 素理想。 $I_1, \dots, I_n$ 理想， $\bigcap_{i=1}^n I_i = P$ 。证明：存在 i , $I_i = P$ 。

证明： $P \subset I_i$ 对每个 i 。若对全部 i , $I_i \supsetneq P$ ，则存在 $a_i \in I_i$, $a_i \notin P$ 。乘积 $a_1 a_2 \cdots a_n \in \bigcap I_i = P$ 。 P 素理想，推出某个 $a_i \in P$ ，矛盾。故必有某个 $I_i = P$ 。

4. (10 分) $C(G)$ 是 G 的中心。若 $G/C(G)$ 循环群，则证明 $G = C(G)$ ，即 G 交换。

证明：标准结论。设 $G/C(G) = \langle \bar{g} \rangle$ 。 $\forall x, y \in G$ ，可以写成 $x = g^a z_1$, $y = g^b z_2$, $z_1, z_2 \in C(G)$ 。

$$xy = g^a z_1 g^b z_2 = g^a g^b z_1 z_2, \quad yx = g^b z_2 g^a z_1 = g^b g^a z_2 z_1.$$

$g^a g^b = g^b g^a$, z_1, z_2 与全体交换，故 $xy = yx$, G 交换， $G = C(G)$ 。



微分几何 (40 分)

1. (15 分) $\mathbf{r}(s)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 弧长参数光滑曲线, 曲率 $0 \leq \kappa(s) \leq \kappa_0$, Frenet 标架 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 。取 $0 \leq \rho \leq 1/\kappa_0$, 管曲面:

$$\mathbf{r}(s, v) = \mathbf{r}(s) + \rho(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}), \quad s \in I, v \in [0, 2\pi].$$

- 若原曲线长度 ℓ , 求管曲面面积;
- 证明 $\mathbf{r}_s$ 为主方向, 求主曲率; 证明是 Weingarten 曲面, 即不全为零实数 a, b, c , $aH + bK = c$ 。

解: (1) 管曲面第一基本形式, 管面积公式: $A = 2\pi\rho \cdot \ell$ 。

(2) 求偏导:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{t} + \rho(-\kappa \cos v \mathbf{t} + (-\tau \cos v - \tau \sin v) \mathbf{n} + \dots).$$

Frenet 公式 $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$.

$$\partial_s(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}) = \cos v(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) + \sin v(-\tau \mathbf{n}) = -\kappa \cos v \mathbf{t} - \tau \sin v \mathbf{n} + \tau \cos v \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{t} + \rho(-\kappa \cos v \mathbf{t} - \tau \sin v \mathbf{n} + \tau \cos v \mathbf{b}) = (1 - \rho\kappa \cos v) \mathbf{t} - \rho\tau \sin v \mathbf{n} + \rho\tau \cos v \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{r}_v = \rho(-\sin v \mathbf{n} + \cos v \mathbf{b}).$$

$\mathbf{r}_v$ 是圆周切向; $\mathbf{r}_s$ 是沿轴线方向。管曲面两个主曲率: $k_1 = \frac{-\kappa(s) \cos v}{1 - \rho\kappa(s) \cos v}$, $k_2 = \frac{-1}{\rho}$ 。一个主曲率恒等于常数 $-1/\rho$ 。平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, 高斯曲率 $K = k_1 k_2$ 。消去 k_1 , $2H + \rho K = -\frac{1}{\rho}$ 。即 $2\rho H + \rho^2 K = -1$, $a = 2\rho, b = \rho^2, c = -1$ 不全为零, 满足 Weingarten 条件。

2. (10 分) 单位球面 S^2 参数

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

- 取 $u = \ln \tan \frac{\theta}{2}$, $v = \varphi$, 给出新参数 $\mathbf{r}(u, v)$, 证明局部共形于 $\mathbb{R}^2$;
- 斜航线: 与经线交角恒为常数。三条斜航线构成球面三角形, 求内角和。

解: (1) $u = \ln \tan \frac{\theta}{2}$, $du = \frac{1}{\sin \theta} d\theta$, $d\theta = \sin \theta du$ 。球面第一基本形式:

$$I = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2 = \sin^2 \theta (du^2 + dv^2).$$

$I = \lambda(u, v)^2 (du^2 + dv^2)$, 是共形度量, 局部共形等价平面。

(2) 球面三角形 Gauss-Bonnet: 内角和 = π + 球面面积。斜航线在球面上, 投影到平面是直线; 球面三角形内角和大于 π 。

3. (15 分) 简单光滑闭曲线 $\mathbf{r}(s)$, 主法向量 $\mathbf{n}(s)$ 在单位球面画出的曲线为主法线标。

- 求主法线标的测地曲率 k_g ;
- 用 Gauss-Bonnet 证明: 主法线标把球面分成面积相等两半。

解: 球面曲线 $\mathbf{n}(s)$, 球面 Gauss 曲率 $K = 1$ 。Frenet: $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$ 。 $\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$ 。记 σ 为主法线标的弧长参数。

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}).$$

球面曲线测地曲率公式。主法线标是球面闭曲线, $\oint k_g d\sigma = 0$, Gauss-Bonnet 给出两边包围面积相等, 各为 2π 。