



中国科学院数学与系统科学研究院夏令营 试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙 (25)



中国科学院数学与系统科学研究院

2018 年夏令营招生考试试题

注：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分) 设 Ω_n 是含有 n 个元素的集合, $\{A_1, \dots, A_r\}$ 称为 Ω_n 的一个覆盖, 如果 $\bigcup_{i=1}^r A_i = \Omega_n$, $A_i \subset \Omega_n$ 非空, $A_i \neq A_j$, $r = 1, 2, \dots$. 记 C_n 为 Ω_n 的不同覆盖的个数. 例如 $C_1 = 1$, $C_2 = 5$, 求 C_3 .

2. (10 分) 通过研究极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ 证明 e 是无理数.

3. (15 分) 设 P 为区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 到 $[0, 1]$ 的单调递增连续可微函数 $p(\theta)$ 全体构成的集合, 且 $p(0) = 0$, $p(\frac{\pi}{2}) = 1$. 定义

$$I(p(\theta)) = \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{p(\theta)} \right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{1-p(\theta)} \right)^2.$$

- (1) 求解极值问题 $\inf_{p(\cdot) \in P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(p(\theta)) d\theta$.

- (1) 若 $I(p(\theta))$ 与 θ 无关, 求 $p(\theta)$.

4. (15 分) 请问以下函数是否是超越函数 (说明理由)? [注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 a_{ij} , ($i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$), 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$.]

- (1) 多项式.

- (1) 三角函数 $\sin x$.

5. (15 分) 设 $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 均为 $n \times n$ 复矩阵, A^* 表示 A 的共轭转置.

- (1) 讨论等式 $AB = AC$ 与 $A^*AB = A^*AC$ 的关系.

- (1) 讨论等式 $A^2B = A$ 与 $B^2A = B$ 的关系.

- (1) 讨论等式 $A^2B = BA^2$ 与 $AB = BA$ 的关系, 其中 A 为正定矩阵.

6. (15 分) 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 为任意 $n \times n$ 复矩阵, 满足 $AA^* = A^*A$. 是否一定存在多项式 f 使得 $A^* = f(A)$? 说明理由.

7. (15 分) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}$ 为 n 阶正定矩阵, 定义哈达玛乘积 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$. 判断以下论断的对错, 并给出理由.

- (1) $A \circ B$ 为正定矩阵.

- (1) $A \circ A^{-1} \succeq I$.

- (1) $A^{\frac{1}{2}} \circ B^{\frac{1}{2}} \preceq I$, 此处正定矩阵 A, B 对角线上的元素均为 1.



中国科学院数学与系统科学研究院

2019 年夏令营招生考试试题

注：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分) 集合 $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个分划是指一族非空集合 $\{B_i\}$, 满足 $\bigcup B_i = \Omega_n$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ (空集), $j \neq k$, $\{\Omega_n\}$ 也算 Ω_n 的一个分划。记 T_n 为 Ω_n 的分划个数, 例如 $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5, \dots$ 。求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{T_n n!}$ 。

2. (5 分) 设 $0 < a_k < \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, $k = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 。刻画数列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 的子序列和 (即 $\sum_{n \in S} a_n$ 的子级数) 构成的集合。

3. (10 分) 设 f 为 $[0, 2\pi]$ 上连续可微函数, $f(0) = f(2\pi)$, 且 $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ 。探讨 $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ 与 $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ 的关系, 并解函数方程

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

4. (15 分) 设 $0 < a < b < +\infty$ 为实数, $K_{a,b}$ 为区间 $[a, b]$ 上满足 $\int_a^b f(t) dt = 1$, 且 $af(a) = bf(b)$ 的非负单调递减函数全体。求

$$\sup_{f, g \in K_{a,b}} \int_a^b \max\{f(t), g(t)\} dt.$$

5. (10 分) 设 A 为方阵, $\text{tr}(A)$ 为迹 (A 的对角元之和)。讨论以下两个条件之间的关系:

(1) 存在正整数 k 使得 $A^k = O$ 。

(1) 对任何正整数 k 都有 $\text{tr}(A^k) = 0$ 。

6. (5 分) 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{2019}$ 。

7. (10 分) 设 A 为复数域上 n 阶矩阵, 非零列向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 满足 $Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ 。设 $y \in \mathbb{C}^n$ 。讨论矩阵 A 的特征值与矩阵 $A + xy^\top$ 的特征值之间的关系。

8. (10 分) 设 V, W 都是有限维线性空间, V^* 为 V 的对偶空间, $\mathcal{L}(V^*, W)$ 是从 V^* 到 W 的线性映照全体, $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 是从 $V \times W$ 到复数域 $\mathbb{C}$ 的双线性映照全体。讨论 $\mathcal{L}(V^*, W)$ 与 $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 之间的关系。

9. (10 分) 设 n 为正整数, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, 分别求以下级数之和:

$$(1) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2.$$

$$(1) \sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k}.$$



中国科学院数学与系统科学研究院

2023 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (10 分)

(1) 已知 $f'(a)$ 存在, $f(a) \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$.(1) 求不定积分 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.2. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且严格单调增加, 求证

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二次连续可微, 并且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明不等式

$$M^2 \leq \frac{(b-a)^3}{2} \int_a^b |f''(x)|^2 dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.4. (10 分) 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 AB 和 BA 均为实对称矩阵. 求证: AB 和 BA 相似.5. (10 分) 设 x, y 都是复数域上 n 阶方阵, 定义 $x^{(0)} = x$, $x^{(1)} = [x, y] = xy - yx$, $x^{(j)} = [x^{(j-1)}, y]$. 证明:

$$\sum_{i=0}^k y^i x y^{k-i} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j+1} y^{k-j} x^{(j)}.$$

6. (20 分) 定义 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Delta r = \partial_x^2 r + \partial_y^2 r + \partial_z^2 r$.

(1) (10 分) 证明如下两个等式成立:

$$\Delta r = \frac{2}{r}, \quad \frac{1}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \nabla r.$$

注: 这里的 $\cdot$ 表示两个向量做内积.(1) (10 分) 假设 u 是一个在无穷远处为零的一次连续可微函数, 且使得积分 $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz$ 和 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz$ 存在. 证明如下不等式成立

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz.$$

注: $|\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla u$.7. (20 分) 证明 $\cos x$ 是超越函数. [注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 a_{ij} , ($i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$), 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$.]



中国科学院数学与系统科学研究院

2024 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分)

(1) 设数列 $a_n > 0$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_n}}{n} \right)^n.$$

(1) 对 $\alpha \geq 2$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t^\alpha} dt - \sin x}{\sin x - x}.$$

2. (20 分)

(1) 设 n 为正整数, 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta$.

(1) 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

3. (15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导函数, $f(0) = f(1) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \neq 0$ 。证明:

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

4. (10 分) 设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ 为实数域上 n 阶方阵, $(AB)^7 = C$, $|C| \neq 0$ 且 $[A, C] = O$ 或 $[B, C] = O$, 求 $(BA)^{14}$ 与 C 的关系, 其中 $[X, Y] := XY - YX$.

5. (20 分) 令 x, y, z 表示三维空间中的点。设定义在三维空间中的开区域 D 上的函数 $u(x)$ 二阶连续可导, 且满足调和条件 $\Delta u = 0$ 。对任意的 $x \in D$, 定义如下关于半径 r 的函数

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y).$$

其中, $B(x, r)$ 表示以 x 为球心, r 为半径的球。 $\partial B(x, r)$ 表示这个球的外表面。这里 r 充分小使得 $B(x, r) \subseteq D$.

(1) 证明: $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$.

(1) 证明: $u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y)$.

(1) 证明: $u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{B(x, r)} u(y) dy$.

6. (20 分) 证明如下两个结论:

(1) 设 f 是 n 维欧氏空间 V 上的一个正交变换, 证明: f 的不变子空间的正交补也是 f 的不变子空间。

(1) 令 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ 。若 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, 则有 $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.