



中国科学院数学与系统科学研究院夏令营 试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙 (25)



中国科学院数学与系统科学研究院

2018 年夏令营招生考试试题

注：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分) 设 Ω_n 是含有 n 个元素的集合, $\{A_1, \dots, A_r\}$ 称为 Ω_n 的一个覆盖, 如果 $\bigcup_{i=1}^r A_i = \Omega_n$, $A_i \subset \Omega_n$ 非空, $A_i \neq A_j$, $r = 1, 2, \dots$ 。记 C_n 为 Ω_n 的不同覆盖的个数。例如 $C_1 = 1$, $C_2 = 5$, 求 C_3 。

解答：集合覆盖计数：每个非空子集族，其并为全集，子集互不相同。 $\Omega_3 = \{a, b, c\}$ ，全体非空子集共 $2^3 - 1 = 7$ 个。集合划分要求元素分块互不相交；覆盖允许多块重叠。(OEIS A003465)

$$C_3 = 109.$$

2. (10 分) 通过研究极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ 证明 e 是无理数。

证明：

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \quad n!e = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = N_n + \delta_n,$$

N_n 为整数,

$$\delta_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$\frac{1}{n+1} < \delta_n < \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{n}.$$

$$2\pi en! = 2\pi N_n + 2\pi \delta_n, \quad \sin(2\pi en!) = \sin(2\pi \delta_n).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot 2\pi \delta_n = 2\pi.$$

反证：若 $e = \frac{p}{q}$ 为有理数，取 $n \geq q$ ，则 $n!e$ 为整数， $\delta_n = 0$ ， $\sin(2\pi en!) = 0$ ，极限为 0，矛盾。故 e 无理。

3. (15 分) 设 P 为区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 到 $[0, 1]$ 的单调递增连续可微函数 $p(\theta)$ 全体构成的集合，且 $p(0) = 0$, $p(\frac{\pi}{2}) = 1$ 。定义

$$I(p(\theta)) = \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{p(\theta)} \right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{1-p(\theta)} \right)^2.$$

- (1) 求解极值问题 $\inf_{p(\cdot) \in P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(p(\theta)) d\theta$ 。

解答：令 $u(\theta) = \sqrt{p(\theta)}$ ，则 $\sqrt{1-p} = \sqrt{1-u^2}$ ，

$$I = u'^2 + \left(\frac{-uu'}{\sqrt{1-u^2}} \right)^2 = \frac{u'^2}{1-u^2}.$$

边界条件： $\theta = 0, u = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}, u = 1$ 。

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{u'^2}{1-u^2} d\theta.$$

欧拉 - 拉格朗日方程： $F = \frac{u'^2}{1-u^2}$ ，

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0.$$

代入计算得解 $u = \sin \theta$ ，即 $p(\theta) = \sin^2 \theta$ 。

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin \theta \cos \theta)^2 / 4}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

下确界 $\frac{\pi}{4}$ 。



(1) 若 $I(p(\theta))$ 与 θ 无关, 求 $p(\theta)$.

解答: $I = C$ 常数, $\frac{u'^2}{1-u^2} = C, \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{C} d\theta$. $\arcsin u = \sqrt{C}\theta + D$, 边界 $u(0) = 0 \Rightarrow D = 0$;
 $u(\pi/2) = 1 \Rightarrow \sqrt{C} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 1$. $u = \sin \theta$, 得 $p(\theta) = \sin^2 \theta$.

4. (15 分) 请问以下函数是否是超越函数 (说明理由)? [注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 $a_{ij}, (i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n)$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$.]

(1) 多项式.

解答: 多项式是代数函数, 不是超越函数. 设 $f(x)$ 为 d 次多项式, 则 $f(x) - P(x) = 0$, 取 $m = d, n = 1$, 存在非零系数满足代数方程, 故为代数函数.

(1) 三角函数 $\sin x$.

解答: $\sin x$ 是超越函数. 反证: 若存在非零二元多项式 $Q(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$, 使得 $Q(x, \sin x) \equiv 0$. $\sin x$ 有无穷多零点 $x = k\pi, Q(k\pi, 0) = 0$, 多项式 $Q(x, 0)$ 有无穷多根, 故 $Q(x, 0) \equiv 0$, $Q(x, y) = yQ_1(x, y)$. 得 $Q_1(x, \sin x) \equiv 0$, 反复降次, 最后得到矛盾, 故无这样非零多项式, $\sin x$ 是超越函数.

5. (15 分) 设 $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 均为 $n \times n$ 复矩阵, A^* 表示 A 的共轭转置.

(1) 讨论等式 $AB = AC$ 与 $A^*AB = A^*AC$ 的关系.

解答: 若 $AB = AC$, 左乘 A^* , 必有 $A^*AB = A^*AC$; 反之不成立. $A^*A(B - C) = 0 \Rightarrow (B - C)^*A^*A(B - C) = 0 \Rightarrow A(B - C) = 0$, 即: $A^*AB = A^*AC \iff AB = AC$. (因为 $A^*AX = 0 \iff AX = 0$)

(1) 讨论等式 $A^2B = A$ 与 $B^2A = B$ 的关系.

解答: 二者互不蕴含. 例: 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = A, A^2B = A$ 成立, $B^2A = B$ 成立; 反例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2B = A$, 但 $B^2A \neq B$. 故 $A^2B = A$ 一般推不出 $B^2A = B$; 交换例子可构造反向不成立.

(1) 讨论等式 $A^2B = BA^2$ 与 $AB = BA$ 的关系, 其中 A 为正定矩阵.

解答: A 正定, 可对角化, 特征值全正. 若 $AB = BA$, 显然 $A^2B = BA^2$; 反之, $A^2B = BA^2$ 不能推出 $AB = BA$. A 正定, A^2 也是正定; 与 A^2 可交换的矩阵集合大于与 A 可交换矩阵集合. 举例子: $A = \text{diag}(1, 2), A^2 = \text{diag}(1, 4)$, 取 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2B = BA^2$, 但 $AB \neq BA$.

6. (15 分) 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 为任意 $n \times n$ 复矩阵, 满足 $AA^* = A^*A$. 是否一定存在多项式 f 使得 $A^* = f(A)$? 说明理由.

解答: A 正规矩阵, 可酉对角化 $A = U\Lambda U^*, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), A^* = U\bar{\Lambda}U^*$. 存在多项式 f 使 $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ 对所有 i 成立的充要条件: 若 $\lambda_i = \lambda_j$ 则 $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_j$ (自然成立). 反例: 正规矩阵 $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, 特征值 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

$$f(z) = z^3, \quad f(i) = i^3 = -i, \quad f(-i) = (-i)^3 = i.$$

此时 $A^* = A^3$. 关键点: 正规矩阵, 同一特征值 $\lambda, f(\lambda)$ 必须等于 $\bar{\lambda}$. ** 结论: 对复正规矩阵, 一定存在复系数多项式 f , 使得 $A^* = f(A)$. **

7. (15 分) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}$ 为 $n \times n$ 正定矩阵, 定义哈达玛乘积 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$. 判断以下论断的对错, 并给出理由.



(1) $A \circ B$ 为正定矩阵.

解答: 正确。Schur 乘积定理: 两个正定矩阵的哈达玛乘积仍是正定矩阵。

(1) $A \circ A^{-1} \geq I$.

解答: 正确。Oppenheim 不等式的推论, 正定矩阵 $A \circ A^{-1} \succeq I$ 。

(1) $A^{\frac{1}{2}} \circ B^{\frac{1}{2}} \preceq I$, 此处正定矩阵 A, B 对角线上的元素均为 1.

解答: 正确。 A, B 对角元为 1, 对任意单位向量 x , 利用哈达玛与平方根性质, Schur 乘积, $A^{1/2} \circ B^{1/2}$ 的对角元都是 1, 并且特征值均不大于 1, $A^{1/2} \circ B^{1/2} \preceq I$ 。



中国科学院数学与系统科学研究院

2019 年夏令营招生考试试题

注：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分) 集合 $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个分划是指一族非空集合 $\{B_i\}$, 满足 $\bigcup B_i = \Omega_n$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ (空集), $j \neq k$, $\{\Omega_n\}$ 也算 Ω_n 的一个分划。记 T_n 为 Ω_n 的分划个数, 例如 $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5, \dots$ 。求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{T_n n!}$ 。

解答: T_n 为 Bell 数, Bell 数指数生成函数:

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} x^n = \exp(e^x - 1), \quad T_0 = 1.$$

题目级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{T_n n!}.$$

注意: $\exp(e^x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$, 本题是取 $\frac{1}{T_n}$, 不是 T_n 。该级数没有初等闭式; Bell 数 T_n 增长极快, 级数整平面收敛。> 补充: 若原题印刷笔误, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!}$, 则结果为 $\exp(e^x - 1) - 1$ 。

2. (5 分) 设 $0 < a_k < \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, $k = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 。刻画数列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 的子序列和 (即 $\sum_{n \in S} a_n$ 的子级数) 构成的集合。

解答: 条件 $0 < a_k < \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, 每一项严格小于后面全部项之和。记 $S = \{\sum_{n \in S} a_n \mid S \subset \mathbb{N}^*\}$ 。由条件可以实现 $[0, 1]$ 中每一个实数: 对任意 $t \in [0, 1]$, 依次抉择是否取 a_k , 总能逼近到 t 。子级数集合 $S = [0, 1]$ 。

3. (10 分) 设 f 为 $[0, 2\pi]$ 上连续可微函数, $f(0) = f(2\pi)$, 且 $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ 。探讨 $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ 与 $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ 的关系, 并解函数方程

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

解答: 傅里叶展开, $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} c_k e^{ikt}$ ($\int f = 0$, 常数项为 0)。

$$\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{k \neq 0} |c_k|^2, \quad \|f'\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2.$$

$$\|f'\|_{L^2}^2 \geq \|f\|_{L^2}^2,$$

等号成立当且仅当 $|k| = 1$ 系数非零。

$$f(t) = Ae^{it} + Be^{-it} = C \cos t + D \sin t, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

关系: $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt \geq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$; 函数方程全部解: $f(t) = C \cos t + D \sin t$, C, D 为常数。

4. (15 分) 设 $0 < a < b < +\infty$ 为实数, $K_{a,b}$ 为区间 $[a, b]$ 上满足 $\int_a^b f(t) dt = 1$, 且 $af(a) = bf(b)$ 的非负单调递减函数全体。求

$$\sup_{f, g \in K_{a,b}} \int_a^b \max\{f(t), g(t)\} dt.$$



解答:

$$\max\{f, g\} = f + g - \min\{f, g\}, \quad \int_a^b \max\{f, g\} = \int_a^b f + \int_a^b g - \int_a^b \min\{f, g\} = 2 - \int_a^b \min\{f, g\}.$$

最大化 $\int \max\{f, g\}$ 等价最小化 $\int \min\{f, g\}$ 。约束: $f, g \geq 0$, 单调递减, $\int f = \int g = 1$, $af(a) = bf(b)$ 。分析边界极值构型, 上确界 $2 - \frac{a}{b-a} \ln \frac{b}{a}$ 。

5. (10 分) 设 A 为方阵, $\text{tr}(A)$ 为迹 (A 的对角元之和)。讨论以下两个条件之间的关系:

(1) 存在正整数 k 使得 $A^k = O$ 。

(2) 对任何正整数 k 都有 $\text{tr}(A^k) = 0$ 。

解答: (1) $\implies$ (2): 若 A 幂零, 则全部特征值为 0, A^k 特征值也全为 0, $\text{tr}(A^k) = 0$ 。

(2) $\nRightarrow$ (1): 复数域上, 若矩阵所有幂次迹为 0, 则全部特征值为 0, 故复数域上 (2) $\implies$ (1); 实数域例子 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = -I$, $\text{tr}(A^2) = -2 \neq 0$, 该例子不满足条件 (2)。实/复域: 若对全部 $k \geq 1$, $\text{tr}(A^k) = 0$, 则特征多项式全部根为 0, 故矩阵幂零。 ** 复数域: (1) $\iff$ (2); 实数域, 在实矩阵范畴同样等价 (Newton 恒等式, 幂和全为 0 $\implies$ 特征多项式 x^n)。 **

6. (5 分) 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{2019}$ 。

解答: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 。特征方程

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0,$$

$\lambda = 2$ 二重特征值, Jordan 块:

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 2^m & m \cdot 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}.$$

求得 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

$$A^m = 2^{m-1} \begin{pmatrix} m+2 & m \\ -m & 2-m \end{pmatrix}.$$

代入 $m = 2019$:

$$A^{2019} = 2^{2018} \begin{pmatrix} 2021 & 2019 \\ -2019 & -2017 \end{pmatrix}.$$

7. (10 分) 设 A 为复数域上 n 阶矩阵, 非零列向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 满足 $Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ 。设 $y \in \mathbb{C}^n$ 。讨论矩阵 A 的特征值与矩阵 $A + xy^\top$ 的特征值之间的关系。

解答: 秩 1 修正 $B = A + xy^\top$ 。已知 $Ax = \lambda x$ 。利用 Sylvester 矩阵行列式定理:

$$\det(\mu I - B) = \det(\mu I - A) \cdot (1 - y^\top (\mu I - A)^{-1} x).$$

λ 是 A 的特征值; - 若 $y^\top x \neq 0$: λ 不再是 B 的特征值, 被扰动; 其余特征值不变, 新增一个特征值 $\lambda + y^\top x$ 。 - 若 $y^\top x = 0$: λ 仍然是 B 的特征值, $Bx = \lambda x$; 其余特征值不变。

简言之: 秩 1 更新 $A + xy^\top$, 至多改变一个特征值; λ 这条特征值是否改变取决于 $y^\top x$ 。



8. (10 分) 设 V, W 都是有限维线性空间, V^* 为 V 的对偶空间, $\mathcal{L}(V^*, W)$ 是从 V^* 到 W 的线性映照全体, $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 是从 $V \times W$ 到复数域 $\mathbb{C}$ 的双线性映照全体。讨论 $\mathcal{L}(V^*, W)$ 与 $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 之间的关系。

解答:

$$\mathcal{L}(V^*, W) \cong V \otimes W, \quad \mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C}) = (V \otimes W)^*.$$

$\mathcal{L}(V^*, W)$ 同构于张量积 $V \otimes W$; $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 是 $V \otimes W$ 的对偶空间。

$$\dim \mathcal{L}(V^*, W) = \dim V \cdot \dim W, \quad \dim \mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C}) = \dim V \cdot \dim W.$$

有限维下维数相等, 二者 ** 互为对偶空间, 维数相同, 但不同构 (作为空间本身可以建立线性同构, 但构造意义不同) **。

9. (10 分) 设 n 为正整数, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, 分别求以下级数之和:

$$(1) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2.$$

解答: 组合恒等式:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

$$\text{结果: } n \binom{2n-1}{n-1}.$$

$$(1) \sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k}.$$

解答:

$$\sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

10. (15 分) 设 σ 是域 K 上有限维线性空间 V 上的一个线性变换 (又称线性算子), 证明: 如果 σ 的极小多项式 (又称最小多项式) $\mu_\sigma(t)$ 是不可约的 (又称既约的), 证明: 多项式环 $K[\sigma]$ 是一个域。

证明: $K[\sigma]$ 是 σ 的多项式全体构成的交换环, 同构于 $K[t]/(\mu_\sigma(t))$ 。已知 $\mu_\sigma(t)$ 在域 K 上不可约, 域上多项式环模不可约多项式生成的理想得到域, 即

$$K[\sigma] \cong K[t]/(\mu_\sigma(t))$$

故 $K[\sigma]$ 是域。

- (15 分) 设 σ 是域 K 上有限维线性空间 V 上的一个线性变换 (又称线性算子), 证明: 如果 σ 的极小多项式 (又称最小多项式) $\mu_\sigma(t)$ 是不可约的 (又称既约的), 证明: 多项式环 $K[\sigma]$ 是一个域。

证明: $K[\sigma]$ 是 σ 的多项式全体构成的交换环, 同构于 $K[t]/(\mu_\sigma(t))$ 。已知 $\mu_\sigma(t)$ 在域 K 上不可约, 域上多项式环模不可约多项式生成的理想得到域, 即

$$K[\sigma] \cong K[t]/(\mu_\sigma(t))$$

故 $K[\sigma]$ 是域。



中国科学院数学与系统科学研究院

2023 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (10 分)

(1) 已知 $f'(a)$ 存在, $f(a) \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$.

解答:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(a + h) - \ln f(a)}{h} = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \exp \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right).$$

(1) 求不定积分 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.解答: 分部积分, 令 $u = \ln x$, $dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$, $v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$.

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

2. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且严格单调增加, 求证

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

证明: 等价证明

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \geq 0.$$

或者用切比雪夫积分不等式: 两个增函数乘积积分大于等于积分平均之积。

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx \right) \left(\int_a^b f(x) dx \right) = 0.$$

不等式得证。

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二次连续可微, 并且 $f(a) = f(b) = 0$ 。证明不等式

$$M^2 \leq \frac{(b-a)^3}{2} \int_a^b |f''(x)|^2 dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.证明: 取 $x_0 \in [a, b]$ 满足 $|f(x_0)| = M$ 。由 $f(a) = 0$, 泰勒展开:

$$f(x_0) = \int_a^{x_0} (x_0 - t) f''(t) dt.$$

柯西 - 施瓦茨:

$$M = |f(x_0)| \leq \left(\int_a^{x_0} (x_0 - t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^{x_0} |f''(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$$\int_a^{x_0} (x_0 - t)^2 dt = \frac{(x_0 - a)^3}{3}.$$



同理若靠近右端 $f(x_0) = \int_b^{x_0} (x_0 - t)f''(t)dt$, 得到 $\frac{(b-x_0)^3}{3}$ 。

$$M^2 \leq \max \left\{ \frac{(x_0 - a)^3}{3}, \frac{(b - x_0)^3}{3} \right\} \int_a^b |f''|^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{2} \int_a^b |f''(x)|^2 dx.$$

证毕。

4. (10 分) 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 AB 和 BA 均为实对称矩阵。求证: AB 和 BA 相似。

证明: 实对称矩阵一定可对角化。 AB 实对称 $\implies AB = (AB)^T = B^T A^T$; BA 实对称 $\implies BA = (BA)^T = A^T B^T$ 。可对角化矩阵 AB 与 BA 有相同非零特征值; 只要证明二者零特征值的几何重数相等。

$$\dim \ker(AB) = n - \text{rank}(AB), \quad \dim \ker(BA) = n - \text{rank}(BA).$$

又 AB, BA 对称, $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$ 。可对角化, 特征值完全相同, 故 AB 与 BA 相似。

5. (10 分) 设 x, y 都是复数域上 n 阶方阵, 定义 $x^{(0)} = x$, $x^{(1)} = [x, y] = xy - yx$, $x^{(j)} = [x^{(j-1)}, y]$ 。证明:

$$\sum_{i=0}^k y^i x y^{k-i} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j+1} y^{k-j} x^{(j)}.$$

证明: 对 k 数学归纳法。 $k=0$: 左边 $y^0 x y^0 = x$; 右边 $\binom{1}{1} y^0 x^{(0)} = x$, 成立。假设 $k=m$ 成立; 利用 $x^{(j+1)} = [x^{(j)}, y] = x^{(j)}y - yx^{(j)}$, 推 $k=m+1$ 等式成立。归纳完成。

6. (20 分) 定义 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Delta r = \partial_x^2 r + \partial_y^2 r + \partial_z^2 r$ 。

(1) (10 分) 证明如下两个等式成立:

$$\Delta r = \frac{2}{r}, \quad \frac{1}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \nabla r.$$

注: 这里的 $\cdot$ 表示两个向量做内积。

证明:

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \frac{x}{r}, \quad \partial_x^2 r = \frac{r^2 - x^2}{r^3}. \\ \Delta r &= \sum \partial_{xx} r = \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = \frac{2r^2}{r^3} = \frac{2}{r}. \\ \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \\ -\nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla r &= -\left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

两式证毕。

- (1) (10 分) 假设 u 是一个在无穷远处为零的一次连续可微函数, 且使得积分 $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz$ 和 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz$ 存在。证明如下不等式成立

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz.$$

注: $|\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla u$ 。

证明: Hardy 不等式 (三维 Hardy):

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx.$$

利用分部积分:

$$\int \frac{u^2}{r^2} = - \int u^2 \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla r = \int 2u \frac{\partial u}{\partial r} dr dS \leq 2 \left(\int \frac{u^2}{r^2} \right)^{1/2} \left(\int \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

平方整理得到 $\int \frac{u^2}{r^2} \leq 4 \int |\partial_r u|^2 \leq 4 \int |\nabla u|^2$ 。证毕。



7. (20 分) 证明 $\cos x$ 是超越函数。[注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 $a_{ij}, (i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n)$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$ 。]

证明: 反证。假设存在非零二元多项式 $P(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$, 满足 $P(x, \cos x) \equiv 0$ 。 $\cos x$ 有无穷多零点: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。于是 $P(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) = 0$ 对无穷多 k 成立。一元多项式 $P(x, 0)$ 有无穷多根, 故 $P(x, 0) \equiv 0$, 即 $P(x, y) = yP_1(x, y)$ 。于是 $P_1(x, \cos x) \equiv 0$, 重复降次, 最后得到 $P \equiv 0$, 矛盾。故不存在这样非零多项式, $\cos x$ 是超越函数。



中国科学院数学与系统科学研究院

2024 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分)

(1) 设数列 $a_n > 0$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_n}}{n} \right)^n.$$

解答：

$$\sqrt[n]{a_k} = a_k^{1/n} = e^{\frac{\ln a_k}{n}} = 1 + \frac{\ln a_k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a_k} = n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k + o(1).$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a_k} = 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln a_k + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

取对数：

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln a_k + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sim n \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k.$$

由 $\lim a_n = a$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k \rightarrow \ln a$ 。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a_k}}{n} \right)^n = a.$$

(1) 对 $\alpha \geq 2$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t^\alpha} dt - \sin x}{\sin x - x}.$$

解答：泰勒展开：

$$e^{-t^\alpha} = 1 - t^\alpha + o(t^\alpha), \quad \int_0^x e^{-t^\alpha} dt = x - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

分子：

$$\int_0^x e^{-t^\alpha} dt - \sin x = \left(x - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + o(x^3).$$

- 当 $\alpha = 2$: $\alpha + 1 = 3$,

$$\text{分子} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)} = 1.$$

- 当 $\alpha > 2$: $\alpha + 1 > 3$,

$$\text{分子} = \frac{1}{6} x^3 + o(x^3), \quad \lim = -1.$$

2. (20 分)



- (1) 设 n 为正整数, 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta$.

解答: 利用三角恒等式,

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} = 1 + 2 \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta + \cdots + 2 \cos 2n\theta.$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2k\theta d\theta = 0, \quad k \geq 1.$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

- (1) 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

解答: 圆心 $(1,1)$, 半径 $\sqrt{2}$, 直线 $y=x$ 过圆心, 区域为半圆。作平移 $u = x-1, v = y-1$, $u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u$ 。

$$x+y = (u+1) + (v+1) = u+v+2.$$

$$\iint_D (x+y) dx dy = \iint_{v \geq u, u^2+v^2 \leq 2} (u+v+2) du dv.$$

奇函数在对称半圆上 $\iint u = 0, \iint v = 0$; 半圆面积 $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2 = \pi$ 。

$$\iint_D (x+y) dx dy = 2\pi.$$

3. (15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的二阶导函数, $f(0) = f(1) = 0$, 当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x) \neq 0$ 。

证明:

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

证明: 不妨设 $f > 0$ 在 $(0,1)$ 。设 $M = \max_{[0,1]} f(x) = f(x_0), 0 < x_0 < 1$ 。

$$f(x_0) = \int_0^{x_0} f'(t) dt, \quad 0 = f(0) = f(x_0) - \int_0^{x_0} \int_s^{x_0} f''(u) du ds.$$

$$M \leq \int_0^{x_0} \int_s^{x_0} |f''(u)| du ds = \int_0^{x_0} u |f''(u)| du.$$

同理 $M \leq \int_{x_0}^1 (1-u) |f''(u)| du$ 。

$$2M \leq \int_0^1 (\max(u, 1-u)) |f''(u)| du.$$

$$2 = \frac{2M}{M} \leq \int_0^1 \max(u, 1-u) \left| \frac{f''}{f} \right| du \leq \max_{0 \leq u \leq 1} \max(u, 1-u) \int_0^1 \left| \frac{f''}{f} \right| dx.$$

$\max(u, 1-u) \leq 1$, 更精细: $\max(x_0, 1-x_0) \leq \frac{1}{2}$ 取等在 $x_0 = \frac{1}{2}$,

$$M \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f''|, \quad \int_0^1 \left| \frac{f''}{f} \right| \geq \frac{1}{M} \int_0^1 |f''| \geq 4.$$

证毕。

4. (10 分) 设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ 为实数域上 n 阶方阵, $(AB)^7 = C, |C| \neq 0$ 且 $[A, C] = O$ 或 $[B, C] = O$, 求 $(BA)^{14}$ 与 C 的关系, 其中 $[X, Y] := XY - YX$.

解答: $C = (AB)^7, C$ 可逆。

$$BA \cdot (BA)^{13} = B(AB)^{13}A.$$

若 $[A, C] = AC = CA$:

$$A(AB)^7 = (AB)^7 A \implies A(AB)^k = (AB)^k A.$$



$$(BA)^{14} = B(AB)^{13}A = BA(AB)^{13} = (BA)^2(AB)^{12} = \cdots = (AB)^{14} = C^2.$$

同理 $[B, C] = O$ 也得到 $(BA)^{14} = C^2$ 。

$$(BA)^{14} = C^2.$$

5. (20 分) 令 x, y, z 表示三维空间中的点。设定义在三维空间中的开区域 D 上的函数 $u(x)$ 二阶连续可导, 且满足调和条件 $\Delta u = 0$ 。对任意的 $x \in D$, 定义如下关于半径 r 的函数

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y).$$

其中, $B(x, r)$ 表示以 x 为球心, r 为半径的球。 $\partial B(x, r)$ 表示这个球的外表面。这里 r 充分小使得 $B(x, r) \subseteq D$ 。

- (1) 证明: $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ 。

证明: 高斯公式, $\Delta u = 0$,

$$\frac{d}{dr} \iint_{\partial B(x, r)} u d\sigma = \iint_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iiint_{B(x, r)} \Delta u dy = 0.$$

故 $\phi'(r) = 0$ 。

- (1) 证明: $u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y)$ 。

证明: $\phi(r)$ 与 r 无关, 令 $r \rightarrow 0$, 由连续性 $\phi(r) \rightarrow u(x)$, 故 $\phi(r) \equiv u(x)$ 。

- (1) 证明: $u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{B(x, r)} u(y) dy$ 。

证明: 对球面均值等式两边关于 r 积分:

$$\begin{aligned} u(x) \cdot 4\pi r^2 &= \iint_{\partial B(x, r)} u d\sigma, \\ \int_0^r u(x) 4\pi t^2 dt &= \iiint_{B(x, r)} u(y) dy, \\ u(x) \cdot \frac{4\pi r^3}{3} &= \iiint_{B(x, r)} u(y) dy \implies u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{B(x, r)} u(y) dy. \end{aligned}$$

6. (20 分) 证明如下两个结论:

- (1) 设 f 是 n 维欧氏空间 V 上的一个正交变换, 证明: f 的不变子空间的正交补也是 f 的不变子空间。

证明: 设 W 是 f -不变子空间: $f(W) \subseteq W$ 。任取 $v \in W^\perp$, $\forall w \in W$,

$$(f(v), w) = (v, f^{-1}(w)).$$

正交变换可逆, $f^{-1}(w) \in W$, 故 $(v, f^{-1}(w)) = 0$, 于是 $(f(v), w) = 0$, 即 $f(v) \in W^\perp$ 。 $W^\perp$ 是不变子空间。

- (1) 令 $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 。若 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, 则有 $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ 。

证明: A 复矩阵, Jordan 标准形 $A = PJP^{-1}$, $e^A = Pe^JP^{-1}$, $\det e^A = \det e^J$ 。上三角矩阵指数 e^J 对角元为 e^{λ_i} , $\det e^J = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr} A}$ 。