



北京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒 (25)



北京大学数学科学学院
2011 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的凹函数，经过点 $(0, 0), (1, 0), \left(\frac{1}{3}, 2\right)$ ，并且 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ ，试作出 $y = f(x)$ 的图像。

2. (1) 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1)$ 。证明：

$$\forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}, \exists \xi \in [0, 1 - \alpha], \text{ 使得 } f(\xi + \alpha) = f(\xi).$$

(2) 证明：

$$\forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}, \exists g(x) \in C[0, 1], g(0) = g(1), \\ \text{满足 } \forall x \in [0, 1 - \alpha], g(x + \alpha) - g(x) \neq 0.$$

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内连续，以下说法是否成立？

(1) 若 $D_+f(x_0)$ 存在，则 $D_0f(x_0)$ 存在。

(2) 若 $D_0f(x_0)$ 存在，则 $D_-f(x_0)$ 存在。

其中

$$D_+f(x_0) = \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \\ D_0f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ D_-f(x_0) = \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

4. 设 $a_n \geq 0$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散。证明：存在数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$b_n, c_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty$$

使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \text{ 发散}.$$

5. 设

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$$

A_{m+n} 为 $m+n$ 阶方阵，前 m 行是 $f(x)$ 的系数，后 n 行是 $g(x)$ 的系数，即

$$A_{m+n} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\ & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & & \\ & 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix}$$

证明： $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式的次数等于 $m+n - \text{rank}(A_{m+n})$ 。



6. (1) 设 U 是 $ABX = 0$ 的基础解系, 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, X 是 $p \times 1$ 列向量, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $W = \{Y = BX \mid X \in U\}$ 。证明: W 的维数等于 $\text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$ 。

(2) 证明: 对任意矩阵 A, B, C , 有

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC).$$

7. 设 A, B 是 n 阶方阵, A, B 乘法可交换, B 是幂零矩阵, 证明: $A + B$ 和 A 有相同的特征多项式。

8. 设二次曲面 $\Gamma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 平面 $\Sigma(\theta)$ 过直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

且与平面 $z = 0$ 夹角为 θ 。

(1) 当 θ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 连续变化时, $\Sigma(\theta) \cap \Gamma$ 对应的曲线是哪种类型?

(2) 证明: 若平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 与 Γ 的交线为两条直线, 则 $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ 。

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 依次验证下列条件能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(1) $f(x) \in C^\infty[a, +\infty)$ 。

(2) $\int_0^{+\infty} |f(x)|^3 dx$ 收敛。

(3) $\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$ 收敛。

(4) $\int_0^{+\infty} |f''(x)| dx$ 收敛。

10. 求下述几何体的体积:

$$-1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1, \quad -1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1.$$

11. 对任意 n 维列向量 α, β , $\alpha^T A \beta = 0$ 当且仅当 $\beta^T A \alpha = 0$ 。证明: A 为对称矩阵或者反对称矩阵。

12. 平面上三条直线 AA', BB', CC' 互相平行, AB 与 $A'B'$ 交于点 D , BC 与 $B'C'$ 交于点 E , CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明: D, E, F 三点共线。



北京大学数学科学学院
2012 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (25 分) $\mathbb{R}^n$ 中集合 S 称为紧集, 如果对于 S 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个元素也覆盖 S 。证明: $S \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集的充分必要条件是 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集。
2. (25 分) 叙述和证明多元函数带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展开公式。
3. (20 分) 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 。
4. (20 分) 假定 $n \geq m > 1$, 问是否存在连续可导的映射 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $p \mapsto F(p)$, 使得 F 的 Jacobi 矩阵的秩处处为 m , 而 $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$? 为什么? 这里 0 表示 $\mathbb{R}^m$ 的原点。
5. (20 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是实轴 $\mathbb{R}$ 上一列一致有界的连续函数, 满足对于任意闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0.$$

证明: 对于实轴上的任意闭区间 $[c, d]$, 以及 $[c, d]$ 上绝对可积的函数 $g(x)$, 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d g(x) f_n(x) dx = 0.$$

(注: 原题积分下限写为 a , 但应为 c , 此处已按 $[c, d]$ 修正。)

6. (20 分) 设 $F(x, y, z)$ 和 $G(x, y, z)$ 都是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上连续可导的函数, 满足映射 $(x, y, z) \mapsto (F(x, y, z), G(x, y, z))$ 的 Jacobi 矩阵的秩在 D 上处处为 1, 而函数 $F(x, y, z)$ 的梯度向量 $\text{grad} F$ 在 D 上处处不为零。假定在点 $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ 。证明: 存在点 p_0 的邻域 $U \subset D$, 使得在 U 上, 函数方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

与函数方程 $F(x, y, z) = 0$ 是同解方程。问在 D 上这两组方程是否也是同解方程, 为什么?

7. (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是区间 (a, b) 上 n 阶可导的函数, 如果在点 $x_0 \in (a, b)$, 成立 $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $\dots$, $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处 k 阶相切。现设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 中互不相同的点 $x_1, \dots, x_t$ 处分别 $k_1 - 1, \dots, k_t - 1$ 阶相切, 而 $n = k_1 + \dots + k_t$ 。证明: 对于任意 $x \in (a, b)$, 存在 $y \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)}(y) - g^{(n)}(y)}{n!} (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_t)^{k_t}.$$

8. (25 分) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, 且 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 的某个零化多项式 $g(x)$ 可分解为一次因式幂的乘积的形式:

$$g(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{t_i} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j).$$

证明: 若存在 $h(x) \in \mathbb{P}[x]$, 使得

$$(x - \lambda_i)^{t_i} \mid [h(x) - \lambda_i], \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

则

(1) $h(\mathcal{A})$ 可对角化;



(2) $h(\mathcal{A}) - \mathcal{A}$ 是幂零变换 (原文写 “幂等变换”, 根据上下文此处应为幂零, 已按题意修正)。

9. (25 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, $D = AB - BA$ 且 D 与 A 乘法可交换, 证明 $D^n = O$ 。

10. (25 分) 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间, $W_1, \dots, W_k$ 为 V 的真子空间, 证明:

- (1) 存在 V 中的元素 α 不属于任何一个 $W_j, j = 1, \dots, k$;
- (2) 存在 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 满足 $\alpha_i \notin \bigcup_{j=1}^k W_j, \forall i = 1, 2, \dots, n$;
- (3) 若 U 为 V 的真子空间, 令 $C_U = \{W \mid W \text{ 为 } V \text{ 的子空间且 } W \oplus U = V\}$, 则 C_U 中含有无穷多个元素。

11. (25 分) 设 V 为 n 维欧氏空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正交变换。

- (1) 证明: V 可以分解为一些 1 维或 2 维的两两正交的 $\mathcal{A}$ -子空间的直和 (即 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$, 其中 V_i 为 $\mathcal{A}$ 的维数为 1 或 2 的不变子空间, 且若 $i \neq j$, 则 $V_i \perp V_j$)。
- (2) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 为 V 的两组标准正交基, 且

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)A.$$

证明:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_1, \eta_1) & \cos(\varepsilon_2, \eta_1) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_1) \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_2) & \cos(\varepsilon_2, \eta_2) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_m) & \cos(\varepsilon_2, \eta_m) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_m) \end{pmatrix},$$

这里 (α, β) 表示向量 α, β 在欧氏空间中的夹角。

- (3) 确定二维欧氏空间上的第一类正交矩阵及第二类正交矩阵的一般形式, 并由此给出 n 维欧氏空间上正交变换的相似标准形 (即某种简化的表示形式)。

12. (15 分) 求与三直线

$$l_1: \begin{cases} y - x = 0, \\ z - 1 = 0, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} y + x = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

都相交的直线所产生的曲面的方程。

13. (20 分) 设给出的仿射变换为

$$\begin{cases} x' = x + y + 3z, \\ y' = x + 5y + z, \\ z' = 3x + y + z. \end{cases}$$

求 3 个互相正交的向量, 使得在此变换下, 它们仍变为 3 个互相正交的向量。并将所给的仿射变换表示成一个正交变换和分别对 3 个互相正交的方向施行的伸缩变换的乘积。

14. (15 分) 证明: 分别属于双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 上两族互相垂直的直母线交点的轨迹是原双曲抛物面与平面 $2z = b^2 - a^2$ 的交线, 并且是一条双曲线。



北京大学数学科学学院
2013 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (20 分) 设 f 是 $[0, 2]$ 上的上凸可导函数, 过 $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$ 点, 问 f 与 x 轴围成面积的下确界是多少? 该下确界能达到吗?

2. (20 分) 设有方程 $y + \sin y = x$ 。

(1) 证明: 该方程在 $x = 0$ 附近可以唯一确定 $y = f(x)$ 。

(2) 将 y 表示为 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ 。

3. (20 分) 构造定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 f , 满足 f 只在其中一点可导, 在其它各点都不连续。

4. (20 分) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的收敛性。

5. (35 分) 函数 $f_n(x)$ 定义在 $[0, 2]$ 上, 满足

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \left(x - \frac{2k-1}{n}\right)^2}, \quad x \in \left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

(1) 求 f_n 的弧长 l_n 。

(2) 求证: f_n 一致收敛于某 f 。

(3) 求 f 的弧长 l 。

(4) l_n 收敛于 l 吗? 解释原因。

6. (35 分) 定义函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 如下:

$$f(x) = 0.0a_1a_2a_3\cdots, \quad x = 0.a_1a_2a_3\cdots.$$

这里 $x \in [0, 1]$ 都表示无限小数 (比如 $0.1 = 0.09$)。请自由探索 f 的性质。

7. (25 分)

(1) $x^6 + x^3 + 1$ 在有理数域上是否可约, 给出详细理由。

(2) 如果 α 是 $x^6 + x^3 + 1 = 0$ 的根, 求多项式 $f(x)$, 满足 $\deg(f) < 6$, 且 $\alpha^8 + \alpha^5 = f(\alpha)$ 。

(3) (2) 中所求 $f(x)$ 唯一吗? 为什么?

(4) 求多项式 $g(x)$, 满足 $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^8 + \alpha^5}$, 其中 $g(x)$ 是有理多项式。

8. (25 分)

(1) 设 A, B 是半正定矩阵。证明:

$$|A + B| \geq |A|, \quad |A + B| \geq |B|.$$

(2) 设 A 是正定矩阵, D 是由 A 第 $i_1, \dots, i_s$ 行和第 $i_1, \dots, i_s$ 列构成的子式, M 是 D 的代数余子式。证明: $|A| \leq DM$ 。

9. (25 分) n 维空间至多有多少个两两成钝角的向量?



10. (25 分) 设 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, 证明: $e^{|A|} = e^{\text{tr}(A)}$ 。
11. (30 分) 已知双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的一支 $z > 0$, M 是与该双曲面相交于封闭曲线的任意平面, M_0 是与 M 平行的一族平面, 证明 M_0 与 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ($z > 0$) 的交线都是椭圆, 且椭圆的中心在 xOy 平面上的投影都在 x 轴上。
12. (20 分) 平面上直线 AA', BB', CC' 平行, AB 和 $A'B'$ 交于点 D , BC 与 $B'C'$ 交于点 E , CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明: D, E, F 共线。



北京大学数学科学学院
2015 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (90 分) 设 $y = f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, 对任意正数 $k \geq 0$, 记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|,$$

设 m 和 n 为两整数, $0 \leq m < n$, 试分别就下列情况, 给出你的结论和证明。

- (1) 如果 M_m 和 M_n 均有界, 那么对哪些正数 k , M_k 有界? 对哪些整数 k , M_k 可以无界?
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 存在有限极限, 而 M_n 有界, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?
- (3) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(n)}(x)|$ 都存在有限极限, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?

2. (30 分) 判断级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的敛散性, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的取整。

3. (30 分) 证明:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(xy)^{xy}} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{x^y} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

4. (25 分) 设 A 是一个 n 阶方阵, 且 $n \geq 3$, A^* 是 A 的伴随矩阵 (即 A 的代数余子式所组成的矩阵)。试证明: 若 $(A^*)^* \neq 0$ (零矩阵), 则 A 可逆, 且此时 $(A^*)^*$ 是 A 的一个纯量倍。
5. (25 分) 设 A 是一个 3 阶实方阵, 考虑 A 所定义的线性变换 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha \mapsto A\alpha$ (α 是列向量)。试证明: 若 $AA^T = A^T A$ (其中 A^T 是指 A 的转置矩阵), 则上述线性变换必有一个 2 维不变子空间。
6. (25 分) 设 A 和 B 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的两个 n 阶方阵, 并且 A 有 n 个特征值 $1, 2, \dots, n$, B 也有 n 个特征值 $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$, 其中 $p_1, \dots, p_n$ 是前 n 个素数 (比如 $p_1 = 2, p_2 = 3$ 等)。试证明: $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $X \mapsto AXB$ 是可以对角化的。

7. (25 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

试找出两个没有常数项的多项式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 使得下列三个条件同时成立:

- (1) $f(A)$ 可对角化;
- (2) $\varphi(A)$ 是幂零矩阵;
- (3) $A = f(A) + \varphi(A)$ 。

8. (几何部分, 共 5 小题, 每题 10 分)

- (1) 三维欧氏空间中取定直角坐标系。有一直线 l 过点 $(1, 0, 0)$ 且方向向量为 $(0, 1, 1)$ 。绕 z 轴旋转生成一个二次曲面 S 。试写出此二次曲面的代数方程 (形如 $f(x, y, z) = 0$)。
- (2) 设有一固定平面 Σ , 具有以下性质: 上述直线 l 在绕 z 轴旋转过程中总是与 Σ 相交。考虑与 Σ 平行的平面族 Σ_t , $t \in \mathbb{R}$, $\Sigma_0 = \Sigma$ 。试证明 $\Sigma_t \cap S$ 总是椭圆。



- (3) 试证明 t 值变化过程中, 上述各椭圆中的中心总落在一个过原点的空间定直线 L 上。
- (4) 固定 L 上任一点 p , 试证明: 由 p 向曲面 S 作的各条切线的切点都落在一条椭圆 Γ_p 上, 且椭圆 Γ_p 所在平面是 Σ_t 之一。
- (5) S 把它在空间的补集分成内外两个连通分支, 其中外部区域不包含原点。取上一小题所述椭圆 Γ_p 所在平面落在 S 外部的一点 $\hat{p}$ 。试证明: 从 $\hat{p}$ 向 S 所作的各条切线之切点落在一条双曲线 Γ 上, 且 Γ 所在平面过 p 点。



北京大学数学科学学院
2016 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (证明题, 共 30 分, 每小题 15 分)

(1) 若 $f(x)$ 在实轴上可导且 $f'(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有一个零点。

(2) 若 $f(x)$ 处处二阶可导且 $f''(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有两个零点。

2. (30 分) 假设 $\varphi(x, y, z)$ 是原点 O 某个邻域上 C^∞ 函数, 且 $\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}$ 在 O 点为 0, $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}$ 在 O 点为 1, $\varphi_{xy}(O) = \frac{1}{2}, \varphi_z(O) = -\frac{1}{2}, \varphi(x, y, z) = 0$ 的隐函数记为 $z = z(x, y)$ (已知 $z(0, 0) = 0$)。请讨论 $z = z(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点附近的极值问题。

3. (40 分) 设 $z = z(x, y)$ 是题 2 中的隐函数, Ω_δ 是 $(0, 0)$ 点的 δ 邻域, 当 δ 充分小时, 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy.$$

4. (20 分) 设 A 是一个 2 阶复方阵, 考虑 2 阶复方阵的线性空间 $M_2(\mathbb{C})$ 上的线性变换

$$\varphi_A: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto AX - XA.$$

试确定 $\dim \ker \varphi_A$ 的所有可能的取值。

5. (30 分) 对于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的两个 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

试证明两者是相似的, 并求出一个矩阵 T , 使得 $A = T^{-1}BT$ 。

6. (20 分) $\mathbb{R}[x]$ 中多项式 $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ 。试用系数 a_1, a_2, a_3, a_4 的关系式, 给出 $f(x)$ 能表示成某个不可约二次多项式 $g(x)$ 之平方的充分必要条件。

7. (30 分) 欧氏平面上限定向的等距变换群的一个子群 G , 其中每一个非恒同的变换 g 都没有不动点, 而且每一个平面上的点 p 在群 G 作用下得到的轨道 (即点集 $\{g(p) \mid g \in G\}$) 在平面上都没有聚点。试证明 G 可以由一个或两个平移变换生成, 即

$$G = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{或} \quad G = \{n\alpha + m\beta \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, n, m 为任意整数, α, β 为线性无关的平移向量 (也表示其对应的平移变换)。 $n\alpha + m\beta$ 即对应线性组合所表示的平移。



北京大学数学科学学院
2017 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (1) (10 分) 证明隐函数 $y + \sin(xy) - x = 0$ 在 $x = 0$ 附近可以确定一个函数关系 $y = f(x)$ 。
(2) (5 分) 试简单回答这个函数的光滑度（不必证明）。
(3) (10 分) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的三阶导数 $f'''(0)$ 。
2. (1) (10 分) 叙述积分第一中值定理，并给出一个几何解释。
(2) (10 分) 叙述一个函数 $g(x) = 1$ ，另一个函数 $f(x)$ 单调时的积分第二中值定理（三种情况），并给出一个几何解释。
(3) (5 分) 请问 (2) 中的函数 $f(x)$ 的单调性是实质性条件还是技术性条件（自由畅谈）。如果是实质性的，那么本质是什么？如果是技术性的，在哪方面提供了哪些方便？
3. (25 分) 在考虑函数 $f(x)$ 在给定区间上的傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 的收敛时， $f(x)$ 的光滑性与级数的收敛速度之间有没有一定的关系？请给出一个你自己的理解和描述。
4. (1) (10 分) 试讨论广义积分 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ 的收敛性。
(2) (10 分) 试讨论广义重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$ ，其中 $D = \mathbb{R} \times [0, 1]$ 的敛散性。
(3) (5 分) 请对上述结论给出一个你认为合理且本质的解释。
5. (20 分) 求集合 $\{A \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R}) : A^3 = 0\}$ 中矩阵的秩的最大值。
6. (30 分) 设 V 是有限维实内积空间， $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in V$ 。假设存在非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \alpha, \alpha_i \rangle \beta_i = 0$ 。证明存在非零向量 $\beta \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \beta, \beta_i \rangle \alpha_i = 0$ 。
7. (20 分) 证明：对任意 3×3 复矩阵，存在 3×3 酉矩阵 U ，使得 UAU^{-1} 为形如

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

的矩阵。

8. (30 分) 对于空间仿射坐标系中的马鞍面 $S: z = xy$ ，记 G 为所有保持 S 作为点集不变的空间仿射变换构成的群。试决定空间中所有这样的直线 L ，使得对于任意的 G 中变换 g ，直线 $g(L)$ 都与 L 平行或重合。



北京大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (20 分) 设 $a > 0$, $a_1 = a$, $a_2 = a^a$, $a_3 = a^{a^a}$, $\dots$, $a_{n+1} = a^{a^{a^{\dots}}}$, $\dots$, 集合 $S = \{a \mid \text{序列}\{a_n\} \text{ 极限存在}\}$ 。

(1) 证明 S 有上界。

(2) 求 S 的上确界。

2. (共 20 分, 每小题 10 分)

(1) 设 $y = \arctan \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(2) 求定积分 $\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$ 。

3. (20 分) 试参照积分第二中值定理的表述, 给出第一类曲线积分的积分第二中值定理 (注意条件和结论表述的准确性), 并给出相应的证明。

4. (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆为整个实数轴上的连续函数, 其中 $g(x)$ 以 $T > 0$ 为周期。证明: 函数方程 $f(f(x)) = -x^3 + g(x)$ 不可能有连续解。

5. (20 分) 在单位圆盘 D 内, $u = \Delta u$, $u|_{\partial D} = 0$ 。证明: $u \equiv 0$ 。

6. (15 分) 设 a_0, a_1, a_2 为有理数, 且

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 + a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

证明: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。

7. (25 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$ 。

(1) (5 分) 将 f 写成 $x^T Ax$ 的形式, 求实对称矩阵 A 的特征向量与特征值。

(2) (10 分) 求正交矩阵 P 和对角矩阵 D , 使得 $A = PDP^T$ 。

(3) (10 分) 求二次型 $f(x) = x^T Ax$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上取到的最大值, 并确定在何处取到最大值。

8. (20 分) 设矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数均为 n , 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(AB) + n$$

当且仅当 $\text{Ker } A \subseteq \text{Im } B$ 。

9. (10 分) 设 A 为 $M_n(\mathbb{C})$ 中的幂零矩阵, 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $T_A: B \mapsto AB - BA$ 。证明: 若 $(T_A)^2 B = 0$, 则 AB 是幂零矩阵。

10. (30 分) 定义在平面 $y = 0$ 上的圆 $C: (x-2)^2 + z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转成一环面 Γ 。

(1) 求环面 Γ 的一个参数方程。

(2) 环面 Γ 的正等测投影 (其在平面 $x + y + z = 0$ 上的垂直投影) 外周是否为椭圆?