



北京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒 (25)



北京大学数学科学学院
2011 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的凹函数，经过点 $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{3}, 2)$ ，并且 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ，试作出 $y = f(x)$ 的图像。

解答 凹函数（上凸函数）的图像位于任意两点间弦的上方。分别取弦 $(0, 0) - (\frac{1}{3}, 2)$ 与 $(\frac{1}{3}, 2) - (1, 0)$ ，得

$$f(x) \geq g(x) := \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 3(1-x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

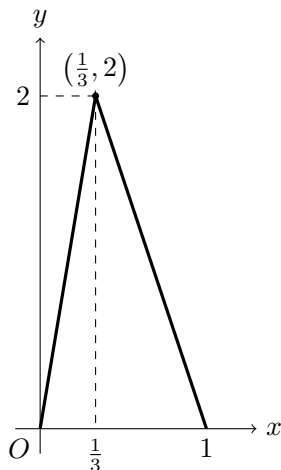
而折线 g 下方面积为两个三角形的面积之和：

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 1 = \int_0^1 f(x) dx.$$

由于 $f - g$ 连续且 $f - g \geq 0$ ，若存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使 $f(x_0) > g(x_0)$ ，则由连续性在 x_0 的某邻域内 $f > g$ ，从而 $\int_0^1 f > \int_0^1 g = 1$ ，矛盾。故 $f \equiv g$ ，即 f 的图像就是连接 $(0, 0), (\frac{1}{3}, 2), (1, 0)$ 的折线：

$$f(x) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 3(1-x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

图像如下：



□

2. (1) 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1)$ 。证明：

$$\forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}, \exists \xi \in [0, 1 - \alpha], \text{ 使得 } f(\xi + \alpha) = f(\xi).$$

(2) 证明：

$$\begin{aligned} & \forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}, \exists g(x) \in C[0, 1], g(0) = g(1), \\ & \text{满足 } \forall x \in [0, 1 - \alpha], g(x + \alpha) - g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

解答 (1) 设 $n = \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}$ 。令

$$F(x) = f(x + \alpha) - f(x), \quad x \in [0, 1 - \alpha],$$



则 $F \in C[0, 1 - \alpha]$, 且由 $n\alpha = 1$ 得

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(k\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} [f((k+1)\alpha) - f(k\alpha)] = f(1) - f(0) = 0.$$

若 F 在 $[0, 1 - \alpha]$ 上无零点, 则由连续性 F 恒正或恒负; 但上式表明 $F(0), F(\alpha), \dots, F((n-1)\alpha)$ 这 n 个数之和为 0, 不可能同号。故存在 $\xi \in [0, 1 - \alpha]$ 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi + \alpha) = f(\xi)$ 。

(2) 设 $n = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$, $\beta = 1 - n\alpha$ 。因 $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, 故 $0 < \beta < \alpha$ 。在 $[0, 1]$ 上按下述结点作分段线性连续函数 g :

$$0 < \beta < \alpha < \alpha + \beta < 2\alpha < \dots < n\alpha < n\alpha + \beta = 1,$$

规定

$$g(k\alpha) = k, \quad g(k\alpha + \beta) = k - n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

特别地 $g(0) = g(n\alpha + \beta) = g(1) = 0$, 满足端点条件。现在验证对一切 $x \in [0, 1 - \alpha]$ 有 $g(x + \alpha) - g(x) = 1$ 。

当 $x \in [k\alpha, k\alpha + \beta]$ ($0 \leq k \leq n-1$) 时,

$$g(x) = k - \frac{n}{\beta}(x - k\alpha),$$

而 $x + \alpha \in [(k+1)\alpha, (k+1)\alpha + \beta]$, 故

$$g(x + \alpha) = k + 1 - \frac{n}{\beta}(x - k\alpha) \implies g(x + \alpha) - g(x) = 1.$$

当 $x \in [k\alpha + \beta, (k+1)\alpha]$ ($0 \leq k \leq n-2$) 时,

$$g(x) = k - n + \frac{n+1}{\alpha - \beta}(x - k\alpha - \beta),$$

而 $x + \alpha \in [(k+1)\alpha + \beta, (k+2)\alpha]$, 故

$$g(x + \alpha) = k + 1 - n + \frac{n+1}{\alpha - \beta}(x - k\alpha - \beta) \implies g(x + \alpha) - g(x) = 1.$$

最后 $x \in [(n-1)\alpha + \beta, 1 - \alpha]$ 时只有 $x = 1 - \alpha = (n-1)\alpha + \beta$ 一点, 此时

$$g(1) - g(1 - \alpha) = 0 - ((n-1) - n) = 1.$$

综上, 对一切 $x \in [0, 1 - \alpha]$ 有 $g(x + \alpha) - g(x) = 1 \neq 0$, 且 $g \in C[0, 1]$, $g(0) = g(1)$ 。命题得证。□

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内连续, 以下说法是否成立?

(1) 若 $D_+f(x_0)$ 存在, 则 $D_0f(x_0)$ 存在。

(2) 若 $D_0f(x_0)$ 存在, 则 $D_-f(x_0)$ 存在。

其中

$$\begin{aligned} D_+f(x_0) &= \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \\ D_0f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ D_-f(x_0) &= \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

解答 两个说法都成立。



(1) 设 $D_+f(x_0) = L$ 。由定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x_1 \neq x_2$ 且 $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0$ 时,

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - L \right| < \varepsilon.$$

固定 h ($0 < |h| < \delta$), 取 $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + h'$, 其中 h' 与 h 同号且 $0 < |h'| < \delta, h' \neq h$ 。则上式对一切这样的 h' 成立。令 $h' \rightarrow 0$, 由 f 在 x_0 连续得 $f(x_0 + h') \rightarrow f(x_0)$, 故

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + h')}{h - h'} \rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

从而 $\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - L \right| \leq \varepsilon$ 。由 h ($0 < |h| < \delta$) 及 ε 的任意性,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L,$$

即 $D_0f(x_0) = f'(x_0) = L$ 存在。故 (1) 成立。

(2) 设 $f'(x_0) = L$, 则

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \quad r(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_0).$$

当 $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0$ 时, $x_1 - x_0$ 与 $x_2 - x_0$ 异号, 故 $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|$ 。于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - L \right| &= \frac{|r(x_1)(x_1 - x_0) - r(x_2)(x_2 - x_0)|}{|x_1 - x_2|} \\ &\leq \frac{|r(x_1)||x_1 - x_0| + |r(x_2)||x_2 - x_0|}{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|} \leq |r(x_1)| + |r(x_2)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(当 $x_1, x_2 \rightarrow x_0$)。故 $D_-f(x_0) = L = f'(x_0)$ 存在。故 (2) 成立。

注: 事实上 $D_-f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 的存在性等价; 而 $f'(x_0)$ 存在并不保证 $D_+f(x_0)$ 存在。例如 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$, 则 $f'(0) = 0$, 但当 $x_1, x_2 > 0$ 时由拉格朗日中值定理, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$

(ξ 介于 x_1, x_2 之间), 而 $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ 在 0 附近无界振荡, 故 $D_+f(0)$ 不存在。□

4. 设 $a_n \geq 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散。证明: 存在数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$b_n, c_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty$$

使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \text{ 发散}.$$

解答 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$, 可选取严格递增的正整数列 $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots$, 使得每一块

$$B_k = \{N_{k-1} + 1, N_{k-1} + 2, \dots, N_k\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

上成立 $T_k := \sum_{n \in B_k} a_n^2 \geq 1$ 。下面在块 B_k 上分别定义 c_n, b_n 。

构造 $\{c_n\}$: 当 $n \in B_k$ 时令

$$c_n = \frac{a_n}{kT_k} \geq 0.$$

则

$$\sum_{n \in B_k} a_n c_n = \frac{1}{kT_k} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k},$$



故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty;$$

而

$$\sum_{n \in B_k} c_n^2 = \frac{1}{k^2 T_k^2} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k^2 T_k} \leq \frac{1}{k^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

构造 $\{b_n\}$: 当 $n \in B_k$ 时令

$$b_n = \frac{a_n}{k^2 T_k} \geq 0.$$

则

$$\sum_{n \in B_k} a_n b_n = \frac{1}{k^2 T_k} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty;$$

而

$$\sum_{n \in B_k} b_n^2 = \frac{1}{k^4 T_k^2} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k^4 T_k} \leq \frac{1}{k^4},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < +\infty.$$

命题得证。 □

5. 设

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$$

A_{m+n} 为 $m+n$ 阶方阵, 前 m 行是 $f(x)$ 的系数, 后 n 行是 $g(x)$ 的系数, 即

$$A_{m+n} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\ & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & & \\ & 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix}$$

证明: $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式的次数等于 $m+n - \text{rank}(A_{m+n})$ 。

解答 记 $P_j = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq j\}$, 则 $\dim P_j = j+1$ 。考虑线性映射

$$\varphi: P_{m-1} \oplus P_{n-1} \longrightarrow P_{m+n-1}, \quad (u, v) \mapsto uf + vg.$$

在基 $\{x^{m-1}, \dots, x, 1; x^{n-1}, \dots, x, 1\}$ 与 $\{x^{m+n-1}, \dots, x, 1\}$ 下, φ 的矩阵正是 A_{m+n} (其各列为

$$x^{m-1}f, \dots, f, x^{n-1}g, \dots, g$$



的系数, 即 Sylvester 矩阵), 故

$$\text{rank}(A_{m+n}) = \dim \text{Im } \varphi.$$

设 $d = \gcd(f, g)$, $\deg d = r$, 且 $f = dp$, $g = dq$, 其中 $\gcd(p, q) = 1$, $\deg p = n - r$, $\deg q = m - r$ 。对 $(u, v) \in \ker \varphi$, 有 $uf + vg = 0$, 即 $up = -vq$ 。由 $\gcd(p, q) = 1$ 得 $p \mid v$, 设 $v = ph$, 则 $u = -qh$, 且

$$\deg u = \deg q + \deg h \leq m - 1 \implies \deg h \leq (m - 1) - (m - r) = r - 1.$$

反之, 任取 $h \in P_{r-1}$, $(-qh, ph)$ 满足 $(-qh)f + (ph)g = d(-qhp + phq) = 0$, 故 $(-qh, ph) \in \ker \varphi$ 。因此

$$\ker \varphi = \{(-qh, ph) : h \in P_{r-1}\} \cong P_{r-1}, \quad \dim \ker \varphi = r.$$

由维数公式,

$$\text{rank}(A_{m+n}) = \dim(P_{m-1} \oplus P_{n-1}) - r = m + n - r,$$

故

$$\deg \gcd(f, g) = r = m + n - \text{rank}(A_{m+n}).$$

□

6. (1) 设 U 是 $ABX = 0$ 的基础解系, 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, X 是 $p \times 1$ 列向量, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $W = \{Y = BX \mid X \in U\}$ 。证明: W 的维数等于 $\text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$ 。
(2) 证明: 对任意矩阵 A, B, C , 有

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC).$$

解答 (1) 记 $U = \{X \in \mathbb{R}^p : ABX = 0\} = \ker(AB)$ 。考虑限制映射

$$L : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X \mapsto BX,$$

则 $W = \text{Im } L$ 。由核像维数公式,

$$\dim W = \dim U - \dim \ker L.$$

因 $U = \ker(AB)$, 故 $\dim U = p - \text{rank}(AB)$; 又 $\ker L = \{X \in \ker(AB) : BX = 0\} = \ker(AB) \cap \ker B = \ker B$ (显然 $\ker B \subseteq \ker(AB)$), 故 $\dim \ker L = \dim \ker B = p - \text{rank}(B)$ 。于是

$$\dim W = (p - \text{rank}(AB)) - (p - \text{rank}(B)) = \text{rank}(B) - \text{rank}(AB).$$

(2) 先用秩-零化度公式给出一个基本恒等式: 对矩阵 X, Y ,

$$\text{rank}(XY) = \dim \text{Im}(XY) = \dim X(\text{Im } Y) = \dim \text{Im } Y - \dim(\ker X \cap \text{Im } Y) = \text{rank } Y - \dim(\ker X \cap \text{Im } Y).$$

分别取 $(X, Y) = (A, B)$ 与 $(X, Y) = (A, BC)$, 得

$$\text{rank}(AB) = \text{rank } B - \dim(\ker A \cap \text{Im } B),$$

$$\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC) - \dim(\ker A \cap \text{Im}(BC)).$$

由于 $\text{Im}(BC) = B(\text{Im } C) \subseteq \text{Im } B$, 故

$$\dim(\ker A \cap \text{Im}(BC)) \leq \dim(\ker A \cap \text{Im } B).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{rank}(ABC) &= \text{rank}(BC) - \dim(\ker A \cap \text{Im}(BC)) \\ &\geq \text{rank}(BC) - \dim(\ker A \cap \text{Im } B) \\ &= \text{rank}(BC) - \text{rank } B + \text{rank}(AB). \end{aligned}$$



移项即得

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC).$$

□

7. 设 A, B 是 n 阶方阵, A, B 乘法可交换, B 是幂零矩阵, 证明: $A + B$ 和 A 有相同的特征多项式。

解答 (若矩阵是实矩阵, 则先视作复矩阵, 特征多项式不变。) 先证一个引理:

引理 设 A, B 是复数域上可交换的 n 阶方阵, 则存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同为上三角矩阵。

引理的证明 对 n 归纳。取 A 的一个特征值 λ , 考虑特征子空间 $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ 。对任意 $v \in V_\lambda$,

$$(A - \lambda I)Bv = B(A - \lambda I)v = 0,$$

故 $Bv \in V_\lambda$, 即 V_λ 是 B 的不变子空间。在 V_λ 上取 B 的一个特征向量 $v_1 \neq 0$, 则 v_1 是 A, B 的公共特征向量。将 v_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 并对商空间使用归纳假设 (A, B 在商空间上诱导的线性变换仍可交换), 即得结论。

回到本题。由引理, 在适当的基下 A, B 同时上三角化: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 均为上三角矩阵, 对角元分别为 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 与 $b_{11}, \dots, b_{nn}$ 。因 B 幂零, 其特征值全为 0, 故 $b_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, n$)。此时 $A + B$ 也是上三角矩阵, 对角元为 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 。于是

$$\det(\lambda I - (A + B)) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{ii}) = \det(\lambda I - A),$$

即 $A + B$ 与 A 有相同的特征多项式。

□

8. 设二次曲面 $\Gamma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 平面 $\Sigma(\theta)$ 过直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

且与平面 $z = 0$ 夹角为 θ 。

(1) 当 θ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 连续变化时, $\Sigma(\theta) \cap \Gamma$ 对应的曲线是哪一种类型?

(2) 证明: 若平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 与 Γ 的交线为两条直线, 则 $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ 。

解答 (1) 过直线 $\begin{cases} x = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 的平面束为 $x = 1 + tz$ ($t \in \mathbb{R}$), 其中 $t = \tan \theta \geq 0$ (平面 $x = 1 + tz$ 的法向量 $(1, 0, -t)$ 与 z 轴夹角 θ)。将 $x = 1 + tz$ 代入 Γ 的方程:

$$(1 + tz)^2 + y^2 - z^2 = 1 \implies y^2 + (t^2 - 1)z^2 + 2tz = 0.$$

这是平面 $\Sigma(\theta)$ 上以 y, z 为参数的二次曲线 (均过点 $(1, 0, 0)$)。按 t 分类:

- $t = 0$ ($\theta = 0$): $y^2 - z^2 = 0$, 即 $y = \pm z$, 为两条相交直线;
- $0 < t < 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$): 二次型 $y^2 + (t^2 - 1)z^2$ 不定, 为双曲线;
- $t = 1$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$): $y^2 + 2z = 0$, 为抛物线;
- $t > 1$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$): 二次型 $y^2 + (t^2 - 1)z^2$ 正定, 为椭圆;
- $\theta = \frac{\pi}{2}$: 平面为 $z = 0$, 交线为圆 $x^2 + y^2 = 1$ (椭圆的极限情形)。



(2) 设平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 与 Γ 的交线为两条直线 l, l' 。先证 l 与 l' 相交。单叶双曲面上的直线(直母线)分属两族, 同族直线彼此异面, 异族直线彼此相交; 而 l, l' 同在一个平面内, 不可能异面, 故 l, l' 必相交, 设交点为 $P = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ 。

Γ 在 P 点的切平面为

$$x_0x + y_0y - z_0z = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1.$$

由于 l, l' 是 Γ 上过 P 的两条直线, 它们都落在该切平面内(过曲面上一点的曲面切线必在切平面内), 故 Π 就是切平面。于是存在 $\lambda \neq 0$ 使

$$(A, B, C, D) = \lambda(x_0, y_0, -z_0, -1).$$

因此

$$A^2 + B^2 = \lambda^2(x_0^2 + y_0^2),$$

$$C^2 + D^2 = \lambda^2(z_0^2 + 1) = \lambda^2(z_0^2 + (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2)) = \lambda^2(x_0^2 + y_0^2).$$

故 $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ 。

□

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 依次验证下列条件能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(1) $f(x) \in C^\infty[a, +\infty)$ 。

(2) $\int_0^{+\infty} |f(x)|^3 dx$ 收敛。

(3) $\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$ 收敛。

(4) $\int_0^{+\infty} |f''(x)| dx$ 收敛。

解答 以下把 f 视为 $[0, +\infty)$ 上的函数(题设积分限为 0 到 $+\infty$)。结论: (1)(2) 不能推出, (3)(4) 能推出。

(1) **不能推出**。取 C^∞ 鼓包函数 $\varphi(x)$: $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\text{supp } \varphi \subset (-1, 1)$, $\varphi(0) = 1$ (例如 $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \chi_{|x|<1}$ 再乘常数)。令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n^2(x-n)).$$

第 n 个鼓包支在 $[n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}]$ 上, 彼此不相交, 故 $f \in C^\infty[0, +\infty)$, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int \varphi(n^2(x-n)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int \varphi < \infty,$$

但 $f(n) = 1 \not\rightarrow 0$ 。

(2) **不能推出**。作高为 $h_n = n^{1/4}$ 、底宽为 $2n^{-2}$ 的三角形尖峰: 当 $n \geq 2$ 时令

$$f(x) = h_n(1 - n^2|x - n|), \quad x \in [n - n^{-2}, n + n^{-2}],$$

其余处 $f(x) = 0$, 各尖峰相接处取 0。则 f 连续, 且

$$\int_0^{+\infty} f dx = \sum_n h_n n^{-2} = \sum_n n^{1/4} \cdot n^{-2} = \sum_n n^{-7/4} < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |f|^3 dx = \sum_n h_n^3 n^{-2} = \sum_n n^{3/4} \cdot n^{-2} = \sum_n n^{-5/4} < +\infty,$$



但 $f(n) = n^{1/4} \rightarrow +\infty$ (甚至连有界性都不成立)。

(3) 能推出。设 $\int_0^{+\infty} |f'|^2 dx = M^2 < +\infty$ 。若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 与 $x_k \rightarrow +\infty$ 使 $|f(x_k)| \geq \varepsilon$ 。对 $x \geq x_k$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|f(x) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^x f' \right| \leq \sqrt{x - x_k} \left(\int_{x_k}^{+\infty} |f'|^2 \right)^{1/2} \leq M \sqrt{x - x_k}.$$

取 $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2$, 则在 $[x_k, x_k + \delta]$ 上 $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 。因 f 连续, f 在 $[x_k, x_k + \delta]$ 上保号, 故

$$\left| \int_{x_k}^{x_k + \delta} f(x) dx \right| \geq \frac{\varepsilon \delta}{2} > 0.$$

由反常积分的 Cauchy 收敛准则, 当 R 充分大时对一切 $v > u > R$ 有 $|\int_u^v f| < \frac{\varepsilon \delta}{2}$, 与上式 ($x_k \rightarrow +\infty$) 矛盾。故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(4) 能推出。因 $\int_0^{+\infty} |f''| < +\infty$, 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(x) dx =: L$$

存在。若 $L \neq 0$, 不妨 $L > 0$, 则当 x 充分大时 $f'(x) \geq \frac{L}{2}$, 从而 $f(x) \rightarrow +\infty$, 与 $\int_0^{+\infty} f$ 收敛矛盾 (可用 Cauchy 准则)。故 $L = 0$ 。于是

$$f'(x) = - \int_x^{+\infty} f''(t) dt,$$

从而 $|f'(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f''| = \omega(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$)。若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 与 $x_k \rightarrow +\infty$ 使 $|f(x_k)| \geq \varepsilon$ 。在 $[x_k, x_k + 1]$ 上,

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \sup_{t \in [x_k, x_k + 1]} |f'(t)| \leq \omega(x_k) \rightarrow 0,$$

故 k 充分大时 $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 于 $[x_k, x_k + 1]$ 上成立, 且 f 保号, 从而 $\left| \int_{x_k}^{x_k + 1} f \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, 与 Cauchy 收敛准则矛盾。故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。□

10. 求下述几何体的体积:

$$-1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1, \quad -1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1.$$

解答 记 $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : -1 \leq x_i \leq 1, -1 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$ 。由对称性,

$$\text{vol}(\Omega) = 2^n - 2 \text{vol}(C_+), \quad C_+ = \left\{ x \in [-1, 1]^n : \sum_{i=1}^n x_i > 1 \right\}$$

(两个“角” C_+ 与 $\{\sum x_i < -1\}$ 体积相等且不相交)。作替换 $y_i = 1 - x_i$, 则 $y_i \in [0, 2]$, 且 $\sum x_i > 1 \iff \sum y_i < n - 1$, 故

$$\text{vol}(C_+) = \text{vol}\left\{ y \in [0, 2]^n : \sum_{i=1}^n y_i \leq n - 1 \right\}.$$

用容斥原理计算上式。记 $E_i = \{y_i > 2\}$ 。 $\mathbb{R}^n$ 中单纯形 $\{y_i \geq 0, \sum y_i \leq s\}$ 的体积为 $\frac{s^n}{n!}$ 。于是

$$\text{vol}\left\{ y \in [0, 2]^n : \sum y_i \leq n - 1 \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n - 1 - 2k)^n,$$



其中第 k 项对应“恰有某 k 个坐标 ≥ 2 ”的容斥（此时其余坐标之和 $\leq n-1-2k$ ，当 $n-1-2k < 0$ 时体积为 0，故 $k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ）。因此

$$\text{vol}(\Omega) = 2^n - \frac{2}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-1-2k)^n.$$

例如 $n=1$ 时体积为 2； $n=2$ 时为 $4-2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ ； $n=3$ 时为 $8-2 \cdot \frac{8}{6} = \frac{16}{3}$ 。□

11. 对任意 n 维列向量 α, β ， $\alpha^T A \beta = 0$ 当且仅当 $\beta^T A \alpha = 0$ 。证明： A 为对称矩阵或者反对称矩阵。

解答 记双线性型 $B(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta$ 。注意 $\beta^T A \alpha$ 是数，故 $\beta^T A \alpha = \alpha^T A^T \beta$ 。题设等价于

$$B(\alpha, \beta) = 0 \iff B(\beta, \alpha) = 0 \quad (\forall \alpha, \beta).$$

先证一个引理：若双线性型 B 满足上式，则 B 或对称或反对称。

若 $B(x, x) = 0$ 对一切 x 成立，则

$$0 = B(x+y, x+y) = B(x, y) + B(y, x),$$

故 $B(x, y) = -B(y, x)$ ， B 反对称。

否则存在 x 使 $B(x, x) \neq 0$ ，不妨设 $B(x, x) = 1$ 。对任意 y ，因

$$B(y - B(y, x)x, x) = B(y, x) - B(y, x)B(x, x) = 0,$$

由题设条件得 $B(x, y - B(y, x)x) = 0$ ，即 $B(x, y) = B(y, x)$ 。故 $B(x, \cdot) = B(\cdot, x)$ 。

任取 y, z 。若 $B(y, x) \neq 0$ ，取 $s = \frac{B(y, z)}{B(y, x)}$ ，则

$$B(y, z - sx) = B(y, z) - sB(y, x) = 0 \implies B(z - sx, y) = 0 \implies B(z, y) = sB(x, y) = sB(y, x) = B(y, z).$$

若 $B(y, x) = 0$ （此时 $B(x, y) = 0$ ），取 $s = B(y, z) + B(x, z)$ ，则

$$B(y + x, z - sx) = B(y, z) + B(x, z) - sB(x, x) = 0$$

（用到 $B(y, x) = 0$ 、 $B(x, x) = 1$ ），由题设条件得 $B(z - sx, y + x) = 0$ ，即

$$B(z, y) + B(z, x) - sB(x, y) - sB(x, x) = 0 \implies B(z, y) = s - B(z, x) = B(y, z) + B(x, z) - B(z, x) = B(y, z),$$

其中最后一步用到 $B(x, z) = B(z, x)$ 。故对一切 y, z 有 $B(y, z) = B(z, y)$ ， B 对称。引理得证。

于是 $A^T = A$ 或 $A^T = -A$ ，即 A 为对称矩阵或反对称矩阵。□

12. 平面上三条直线 AA', BB', CC' 互相平行， AB 与 $A'B'$ 交于点 D ， BC 与 $B'C'$ 交于点 E ， CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明： D, E, F 三点共线。

解答 这是 Desargues 定理的平行情形（视 AA', BB', CC' 交于无穷远点）。下面用向量方法直接证明。

设三条平行线的公共方向为 $w \neq 0$ ，记

$$A' = A + aw, \quad B' = B + bw, \quad C' = C + cw.$$

先求 $D = AB \cap A'B'$ 。设 $D = A + t(B - A) = A' + t'(B' - A')$ ，即

$$A + t(B - A) = A + aw + t'[(B - A) + (b - a)w].$$



由于 $B - A$ 与 w 线性无关, 比较系数得 $t = t'$, 且 $a + t'(b - a) = 0$, 故 $t = \frac{a}{a - b}$ (设 $a \neq b$, 退化情形见下)。于是

$$D = A + \frac{a}{a - b}(B - A) = \frac{bA - aB}{b - a}.$$

同理

$$E = \frac{cB - bC}{c - b}, \quad F = \frac{aC - cA}{a - c}.$$

现在

$$(b - a)D + (c - b)E + (a - c)F = (bA - aB) + (cB - bC) + (aC - cA) = 0,$$

且系数之和 $(b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$ 。故 D, E, F 作为仿射空间的点仿射相关, 即三点共线 (若两两不同则所在直线唯一)。

若出现 $a = b$ 等退化情形 (例如 $a = b$ 时 $AB \parallel A'B'$, D 在无穷远处), 可对参数 a, b, c 作小扰动后取极限, 结论仍成立; 亦可直接在射影平面中用 Desargues 定理。证毕。 $\square$



北京大学数学科学学院
2012 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (25 分) $\mathbb{R}^n$ 中集合 S 称为紧集, 如果对于 S 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个元素也覆盖 S 。证明: $S \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集的充分必要条件是 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集。

解答 必要性 (S 紧 $\implies S$ 有界闭)。

先证 S 有界: 考虑开覆盖 $\{B(0, k) : k \in \mathbb{N}\}$, 由紧性取有限子覆盖, 故 $S \subseteq B(0, K)$, S 有界。

再证 S 是闭集, 即证 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 是开集。任取 $p \notin S$, 对每个 $q \in S$, 因 $p \neq q$, 取 $r_q = \frac{|p-q|}{2}$, 则 $\{B(q, r_q) : q \in S\}$ 是 S 的开覆盖。由紧性有有限子覆盖 $\{B(q_i, r_{q_i})\}_{i=1}^k$ 。令 $\delta = \min_i r_{q_i} > 0$, 断言 $B(p, \delta) \cap S = \emptyset$ 。事实上若 $s \in B(p, \delta) \cap S$, 则 $s \in B(q_i, r_{q_i})$ 对某个 i 成立, 从而

$$|p - q_i| \leq |p - s| + |s - q_i| < \delta + r_{q_i} \leq 2r_{q_i} = |p - q_i|,$$

矛盾。故 $B(p, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$, S 为闭集。

充分性 (S 有界闭 $\implies S$ 紧)。

先证闭方体 $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ 是紧集。设 $\{U_\alpha\}$ 为 Q 的开覆盖且无有限子覆盖。将 Q 的各边二等分, 得 2^n 个闭子方体, 其中必有一个子方体不能被有限个 U_α 覆盖 (否则 Q 被有限覆盖)。如此反复二分, 得闭方体套 $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots$, $\text{diam}(Q_k) \rightarrow 0$, 且每个 Q_k 都不能被有限覆盖。由闭集套定理, $\bigcap_k Q_k = \{p\}$ 。取 α_0 使 $p \in U_{\alpha_0}$, 因 U_{α_0} 开且 $\text{diam}(Q_k) \rightarrow 0$, 当 k 充分大时 $Q_k \subseteq U_{\alpha_0}$, 与 Q_k 不能被有限覆盖矛盾。故 Q 紧。

现在设 S 为有界闭集, 则 S 含于某个闭方体 Q 。设 $\{U_\alpha\}$ 为 S 的任一开覆盖, 则 $\{U_\alpha\} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus S\}$ 是 Q 的开覆盖。由 Q 的紧性有有限子覆盖, 其中去掉 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 后, 得到覆盖 S 的有限个 U_α 。故 S 紧。

□

2. (25 分) 叙述和证明多元函数带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展开公式。

解答 叙述: 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $f \in C^2(U)$, $a, a+h \in U$ 且线段 $\overline{a, a+h} \subseteq U$ 。则存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a+\theta h) h,$$

即

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h) h_i h_j,$$

其中 H_f 为 f 的 Hesse 矩阵。

证明: 作一元辅助函数

$$\varphi(t) = f(a+th), \quad t \in [0, 1],$$

则 $\varphi \in C^2[0, 1]$ 。由一元函数的带 Lagrange 余项 Taylor 公式 (Maclaurin 展开到二阶), 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(\theta).$$

由链式法则,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i = \nabla f(a+th) \cdot h, \\ \varphi''(t) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) h_i h_j = h^T H_f(a+th) h. \end{aligned}$$



代入即得

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a + \theta h) h.$$

□

3. (20 分) 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 。

解答 积分区域为 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$, 等价于

$$0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq y.$$

交换积分次序:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \left(\int_{y^2}^y dx \right) dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy \\ &= \int_0^1 (1 - y) \sin y dy = \left[-(1 - y) \cos y - \sin y \right]_0^1 \\ &= -\sin 1 - (-1) = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

□

4. (20 分) 假定 $n \geq m > 1$, 问是否存在连续可导的映射 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $p \mapsto F(p)$, 使得 F 的 Jacobi 矩阵的秩处处为 m , 而 $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$? 为什么? 这里 0 表示 $\mathbb{R}^m$ 的原点。

解答 不存在。反证: 设这样的 F 存在。

由 $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$, 存在 $R > 0$, 当 $|p| \geq R$ 时 $|F(p)| \geq 2|F(0)|$ 。因 F 连续, 连续函数 $|F|$ 在紧集 $\overline{B(0, R)}$ 上取得最小值 m_0 , 且 $m_0 \leq |F(0)|$ 。由于球外 $|F| \geq 2|F(0)| \geq |F(0)| \geq m_0$, 故 m_0 就是 $|F|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的全局最小值。设其在 p_0 处取得, 则 p_0 是 $|F|^2$ 的极小点, 由一阶条件

$$0 = \nabla(|F|^2)(p_0) = 2 dF(p_0)^T F(p_0),$$

即对一切 $v \in \mathbb{R}^n$,

$$F(p_0) \cdot dF(p_0) v = 0.$$

这说明 $\text{Im } dF(p_0) \subseteq F(p_0)^\perp$, 而 $F(p_0)^\perp$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 $m-1$ 维子空间, 故 $\text{rank } dF(p_0) \leq m-1$ 。但题设 $\text{rank } dF(p_0) = m$, 矛盾。

(注: $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$ 的含义是: $\forall R > 0, \exists M > 0$, 当 $|p| > M$ 时 $|F(p)| > R$ 。)

□

5. (20 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是实轴 $\mathbb{R}$ 上一列一致有界的连续函数, 满足对于任意闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0.$$

证明: 对于实轴上的任意闭区间 $[c, d]$, 以及 $[c, d]$ 上绝对可积的函数 $g(x)$, 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d g(x) f_n(x) dx = 0.$$

(注: 原题积分下限写为 a , 但应为 c , 此处已按 $[c, d]$ 修正。)

解答 设 $\sup_n \|f_n\|_\infty \leq M < +\infty$ 。先对阶梯函数证明结论。设 $h = \sum_{j=1}^r c_j \chi_{I_j}$, 其中 $I_j \subset [c, d]$ 为区间, 则

$$\int_c^d h(x) f_n(x) dx = \sum_{j=1}^r c_j \int_{I_j} f_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$



再证一般情形。 g 在 $[c, d]$ 上绝对可积 (即 Riemann 可积), 故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 h 使 $\int_c^d |g - h| < \frac{\varepsilon}{2M}$ 。于是

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d g f_n \right| &\leq \left| \int_c^d h f_n \right| + \left| \int_c^d (g - h) f_n \right| \\ &\leq \left| \int_c^d h f_n \right| + M \int_c^d |g - h| < \left| \int_c^d h f_n \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

由第一步, $\exists N$, 当 $n > N$ 时 $\left| \int_c^d h f_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 故 $n > N$ 时 $\left| \int_c^d g f_n \right| < \varepsilon$ 。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d g(x) f_n(x) dx = 0$ 。
□

6. (20 分) 设 $F(x, y, z)$ 和 $G(x, y, z)$ 都是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上连续可导的函数, 满足映射 $(x, y, z) \mapsto (F(x, y, z), G(x, y, z))$ 的 Jacobi 矩阵的秩在 D 上处处为 1, 而函数 $F(x, y, z)$ 的梯度向量 $\text{grad } F$ 在 D 上处处不为零。假定在点 $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ 。证明: 存在点 p_0 的邻域 $U \subset D$, 使得在 U 上, 函数方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

与函数方程 $F(x, y, z) = 0$ 是同解方程。问在 D 上这两组方程是否也是同解方程, 为什么?

解答 先证局部结论。由秩处处为 1 且 $\nabla F \neq 0$, ∇G 与 ∇F 处处线性相关, 故

$$\nabla G = \lambda \nabla F, \quad \lambda = \frac{\nabla G \cdot \nabla F}{|\nabla F|^2} \in C(D).$$

设 $\gamma(t)$ 为落在某等值面 $F = c$ 上的任一条 C^1 曲线, 则

$$\frac{d}{dt} G(\gamma(t)) = \nabla G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \lambda \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0,$$

即 G 在 F 的每个等值面上局部为常数。

由 $\nabla F(p_0) \neq 0$ 及隐函数定理, $F = 0$ 在 p_0 附近确定一张连通的光滑曲面 S 。 $G|_S$ 在 S 上局部为常数, $S \cap U$ 连通, 故 $G|_{S \cap U} \equiv G(p_0) = 0$ 。因此在 U 上 $F = 0$ 与 $\{F = 0, G = 0\}$ 同解。

在 D 上一般不同解。反例: 取

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}, \quad F(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1.$$

则 D 是 (连通) 开区域, $\nabla F = (2x, -2y, 0)$ 在 D 上处处非零, $F = 0$ 是双曲柱面 $x^2 - y^2 = 1$, 由两叶 $C_+ := \{x = \sqrt{1 + y^2}\}$ 与 $C_- := \{x = -\sqrt{1 + y^2}\}$ 组成。取光滑函数 $H_+, H_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足: $H_+(0) = 0, H_-(0) = 1$, 且当 $t \leq -1$ 时 $H_+(t) = H_-(t)$ 、 $H'_+(t) = H'_-(t)$ (例如取 $H_-(t) = H_+(t) + \varphi(t)$, 其中 H_+ 光滑且 $H_+(0) = 0$ 、 $H_+ \equiv t$ 于 $(-\infty, -1]$, φ 光滑且 $\text{supp } \varphi \subseteq (-1, \infty)$ 、 $\varphi(0) = 1$)。定义

$$G(x, y, z) = \begin{cases} H_+(F(x, y, z)), & x > 0, \\ H_-(F(x, y, z)), & x < 0. \end{cases}$$

在 $\{x = 0\} \cap D$ 附近 $F = -y^2 - 1 \leq -1$, 故 H_+, H_- 及其导数在过渡处相等, $G \in C^1(D)$, 且 $\nabla G = H'_\pm(F) \nabla F$, Jacobi 矩阵的秩处处为 1。取 $p_0 = (1, 0, 0)$, 则 $F(p_0) = G(p_0) = H_+(0) = 0$ 。在 p_0 的小邻域内两组方程同解; 但在整个 D 上,

$$G|_{C_+} = H_+(0) = 0, \quad G|_{C_-} = H_-(0) = 1 \neq 0,$$

故 $\{F = 0\}$ 比 $\{F = 0, G = 0\}$ 多出一整叶 C_- , 两组方程不同解。
□



7. (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是区间 (a, b) 上 n 阶可导的函数, 如果在点 $x_0 \in (a, b)$, 成立 $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处 k 阶相切。现设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 中互不相同的点 $x_1, \dots, x_t$ 处分别 $k_1 - 1, \dots, k_t - 1$ 阶相切, 而 $n = k_1 + \dots + k_t$ 。证明: 对于任意 $x \in (a, b)$, 存在 $y \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)}(y) - g^{(n)}(y)}{n!} (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_t)^{k_t}.$$

解答 令 $h = f - g$, 则 $h^{(j)}(x_i) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, k_i - 1, i = 1, \dots, t$), 结论等价于: 对任意 $x \in (a, b)$, 存在 $y \in (a, b)$ 使

$$h(x) = \frac{h^{(n)}(y)}{n!} P(x), \quad P(x) = \prod_{i=1}^t (x - x_i)^{k_i}.$$

若 $x = x_i$ 对某个 i , 结论显然 (取 $y = x_i$, 两边均为 0)。以下设 $x \notin \{x_1, \dots, x_t\}$, 则 $P(x) \neq 0$ 。令

$$K = \frac{h(x)}{P(x)}, \quad H(t) = h(t) - KP(t).$$

则 $H(x) = 0$, 且对 $j = 0, \dots, k_i - 1$,

$$H^{(j)}(x_i) = h^{(j)}(x_i) - KP^{(j)}(x_i) = 0$$

(P 在 x_i 处有 k_i 重零点, 故 $P^{(j)}(x_i) = 0$)。于是 H 在 x 处有 1 重零点, 在 x_i 处至少有 k_i 重零点, 计重数共有至少 $1 + k_1 + \dots + k_t = n + 1$ 个零点。

由推广的 Rolle 定理 (H 在 (a, b) 内有 $n + 1$ 个计重数的零点, 则 $H^{(n)}$ 在 (a, b) 内有零点), 存在 $y \in (a, b)$ 使 $H^{(n)}(y) = 0$ 。注意 P 是 n 次首一多项式, $P^{(n)} \equiv n!$, 故

$$0 = H^{(n)}(y) = h^{(n)}(y) - K n! \implies h(x) = KP(x) = \frac{h^{(n)}(y)}{n!} P(x),$$

即

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)}(y) - g^{(n)}(y)}{n!} (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_t)^{k_t}.$$

□

8. (25 分) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, 且 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 的某个零化多项式 $g(x)$ 可分解为一次因式幂的乘积的形式:

$$g(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{t_i} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j).$$

证明: 若存在 $h(x) \in \mathbb{P}[x]$, 使得

$$(x - \lambda_i)^{t_i} \mid [h(x) - \lambda_i], \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

则

(1) $h(\mathcal{A})$ 可对角化;

(2) $h(\mathcal{A}) - \mathcal{A}$ 是幂零变换 (原文写“幂等变换”, 根据上下文此处应为幂零, 已按题意修正)。

解答 因 $g(\mathcal{A}) = 0$ 且因式 $(x - \lambda_i)^{t_i}$ 两两互素, 由多项式理论 (Bezout 恒等式与中国剩余定理), 有根子空间分解

$$V = \bigoplus_{i=1}^m V_i, \quad V_i = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{t_i}.$$

设 $(x - \lambda_i)^{t_i} \mid [h(x) - \lambda_i]$, 则存在 $q_i(x) \in \mathbb{P}[x]$ 使 $h(x) = \lambda_i + (x - \lambda_i)^{t_i} q_i(x)$ 。于是

$$h(\mathcal{A}) - \lambda_i \mathcal{I} = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{t_i} q_i(\mathcal{A}).$$



(1) 在 V_i 上, $(A - \lambda_i I)^{t_i} = 0$, 故 $h(A)|_{V_i} = \lambda_i I$ 。于是 $h(A)$ 在每个根子空间 V_i 上是纯量变换, 从而在 $V = \bigoplus V_i$ 上可对角化 (在每个 V_i 内任取一组基拼成 V 的基, $h(A)$ 在该基下为对角矩阵)。

(2) 在 V_i 上,

$$h(A) - A = \lambda_i I - A = -(A - \lambda_i I),$$

而 $(A - \lambda_i I)^{t_i}$ 在 V_i 上为零, 故 $h(A) - A$ 在每个 V_i 上幂零, 从而在 V 上幂零。证毕。 $\square$

9. (25 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, $D = AB - BA$ 且 D 与 A 乘法可交换, 证明 $D^n = O$ 。

解答 (实数情形可先视作复矩阵。) 由 $DA = AD$, 对任意 $k \geq 1$, D^{k-1} 与 A 可交换, 故

$$D^k = (AB - BA)D^{k-1} = ABD^{k-1} - BAD^{k-1} = ABD^{k-1} - BD^{k-1}A = A(BD^{k-1}) - (BD^{k-1})A,$$

即 D^k 是换位子, 从而

$$\text{tr}(D^k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

设 D 的特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_n$, 则

$$\sum_{j=1}^n \mu_j^k = \text{tr}(D^k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

由 Newton 恒等式, D 的特征多项式的各次系数 (初等对称多项式) 全为 0, 故其特征多项式为 x^n 。

由 Cayley-Hamilton 定理, $D^n = O$ 。 $\square$

10. (25 分) 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间, $W_1, \dots, W_k$ 为 V 的真子空间, 证明:

- (1) 存在 V 中的元素 α 不属于任何一个 W_j , $j = 1, \dots, k$;
- (2) 存在 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 满足 $\alpha_i \notin \bigcup_{j=1}^k W_j$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$;
- (3) 若 U 为 V 的真子空间, 令 $C_U = \{W \mid W \text{ 为 } V \text{ 的子空间且 } W \oplus U = V\}$, 则 C_U 中含有无穷多个元素。

解答 (以下设数域 $\mathbb{P}$ 为无限域; 对有限域命题 (1) 不成立, 例如 $\mathbb{F}_2^2$ 中三个一维子空间覆盖全空间。)

(1) 对 k 归纳。 $k = 1$ 时因 $W_1 \subsetneq V$, 取 $\alpha \in V \setminus W_1$ 即可。 设已找到 $\alpha \notin \bigcup_{j < k} W_j$ 。 若 $\alpha \notin W_k$, 得证; 若 $\alpha \in W_k$, 取 $\beta \notin W_k$ 。 对每个 $j \leq k$, 考虑集合

$$T_j = \{t \in \mathbb{P} : \alpha + t\beta \in W_j\}.$$

当 $j < k$: 若 $t_1, t_2 \in T_j$ 且 $t_1 \neq t_2$, 则 $(t_1 - t_2)\beta \in W_j$, 故 $\beta \in W_j$, 进而 $\alpha = (\alpha + t_1\beta) - t_1\beta \in W_j$, 矛盾。 故 $|T_j| \leq 1$ 。 当 $j = k$: 若 $t_1 \neq t_2$ 均属于 T_k , 则 $\beta \in W_k$, 矛盾, 故 $|T_k| \leq 1$ 。 于是 $\bigcup_{j=1}^k T_j$ 是有限集, 而 $\mathbb{P}$ 无限, 取 $t \notin \bigcup_{j=1}^k T_j$, 则 $\alpha + t\beta \notin \bigcup_{j=1}^k W_j$ 。

(2) 归纳构造。 由 (1) 取 $\alpha_1 \notin \bigcup_j W_j$ 。 若已取到线性无关的 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($m < n$), 每个 $\alpha_i \notin \bigcup_j W_j$, 则 $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 是 V 的真子空间。 对有限个真子空间 $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, W_1, \dots, W_k$ 应用 (1), 得

$$\alpha_{m+1} \notin \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \cup \bigcup_{j=1}^k W_j.$$

故 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性无关且都不属于 $\bigcup_j W_j$ 。 反复进行 n 次即得 V 的一组基。

(3) 设 $\dim U = s$, 则 $n - s =: r \geq 1$ 。 取 U 的一个补空间 W_0 ($\dim W_0 = r$), 取非零线性泛函 $\varphi: W_0 \rightarrow \mathbb{P}$ 与 $0 \neq u_0 \in U$ 。 对每个 $t \in \mathbb{P}$, 令

$$W_t = \{w + t\varphi(w)u_0 : w \in W_0\}.$$



W_t 是映射 $w \mapsto w + t\varphi(w)u_0$ 的像, 该映射是单射 (若 $w + t\varphi(w)u_0 = 0$, 则 $w \in W_0 \cap U = \{0\}$, 从而 $w = 0$), 故 $\dim W_t = \dim W_0 = r$ 。且 $W_t \cap U = \{0\}$: 若 $w + t\varphi(w)u_0 \in U$, 则 $w \in W_0 \cap U = \{0\}$ 。于是 $\dim(W_t + U) = r + s = n$, 即 $W_t \oplus U = V$, $W_t \in C_U$ 。

又 $t_1 \neq t_2$ 时 $W_{t_1} \neq W_{t_2}$: 取 w_0 使 $\varphi(w_0) = 1$, 若 $W_{t_1} = W_{t_2}$, 则 $w_0 + t_1 u_0 \in W_{t_2}$, 即存在 $w \in W_0$ 使 $w_0 + t_1 u_0 = w + t_2 \varphi(w)u_0$, 比较 U -分量得 $t_1 = t_2 \varphi(w)$, 比较 W_0 -分量得 $w = w_0$, 代入得 $t_1 = t_2$, 矛盾。由于 $\mathbb{P}$ 无限, C_U 含无穷多个元素。□

11. (25 分) 设 V 为 n 维欧氏空间, $A \in \mathcal{L}(V)$ 是正交变换。

(1) 证明: V 可以分解为一些 1 维或 2 维的两两正交的 A -子空间的直和 (即 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$, 其中 V_i 为 A 的维数为 1 或 2 的不变子空间, 且若 $i \neq j$, 则 $V_i \perp V_j$)。

(2) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 为 V 的两组标准正交基, 且

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)A.$$

证明:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_1, \eta_1) & \cos(\varepsilon_2, \eta_1) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_1) \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_2) & \cos(\varepsilon_2, \eta_2) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_m) & \cos(\varepsilon_2, \eta_m) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_m) \end{pmatrix},$$

这里 (α, β) 表示向量 α, β 在欧氏空间中的夹角。

(3) 确定二维欧氏空间上的第一类正交矩阵及第二类正交矩阵的一般形式, 并由此给出 n 维欧氏空间上正交变换的相似标准形 (即某种简化的表示形式)。

解答 (1) 先证明: A 必有 1 维或 2 维不变子空间 W 。设 λ 为 A 的特征值, 因 A 正交, $|\lambda| = 1$ 。

- 若 $\lambda = \pm 1$ 为实特征值, 取实特征向量 v , 则 $W = \text{span}\{v\}$ 为 1 维不变子空间;
- 若 λ 非实, 设 $\lambda = e^{i\theta}$ ($\sin \theta \neq 0$), 取复特征向量 $v = u + iv'$ (u, v' 实)。由 $Av = e^{i\theta}v$ 比较实虚部:

$$Au = \cos \theta u - \sin \theta v', \quad Av' = \sin \theta u + \cos \theta v',$$

故 $W = \text{span}\{u, v'\}$ 是 2 维不变子空间 (u, v' 线性无关: 若 $v' = cu$, 则 $\sin \theta = c \cos \theta$ 且 $\cos \theta = -c \sin \theta$, 即 $c = \tan \theta = -\cot \theta$, 矛盾)。

再证 $W^\perp$ 也是 A 的不变子空间。对 $x \in W^\perp$, $w \in W$,

$$\langle Ax, w \rangle = \langle x, A^T w \rangle = \langle x, A^{-1} w \rangle = 0$$

($A^{-1}w \in W$), 故 $Ax \in W^\perp$ 。于是对维数归纳: $V = W \oplus W^\perp$, $A|_W$ 、 $A|_{W^\perp}$ 均为正交变换, 对 $W^\perp$ 继续分解, 最终得到两两正交的 1、2 维不变子空间的直和分解。

(2) 两组基都是 V 的标准正交基, 故 $m = n$ (题中记号 m 实为 n)。将 ε_j 按基 $\{\eta_i\}$ 展开:

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon_j, \eta_i \rangle \eta_i,$$

故 $a_{ij} = \langle \varepsilon_j, \eta_i \rangle$ 。因 ε_j, η_i 均为单位向量, $\langle \varepsilon_j, \eta_i \rangle = \cos(\varepsilon_j, \eta_i)$, 即得所证矩阵。

(3) 设 $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为二阶正交矩阵。由 $Q^T Q = I$ 且 $|Q| = \pm 1$:

- 第一类 ($|Q| = 1$): $Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (旋转);



- 第二类 ($|Q| = -1$): $Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ (反射)。

由 (1) 的分解, 在由各 V_i 的标准正交基拼成的 V 的标准正交基下, A 的矩阵为分块对角矩阵, 各块为 ± 1 (1 维块) 或旋转矩阵 $\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ (2 维块, $\theta_i \notin \{0, \pi\}$)。即正交变换的相似标准形为

$$\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, R(\theta_1), \dots, R(\theta_s)).$$

□

12. (15 分) 求与三直线

$$l_1: \begin{cases} y - x = 0, \\ z - 1 = 0, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} y + x = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

都相交的直线所产生的的曲面的方程。

解答 参数化三直线:

$$l_1: (t, t, 1), \quad l_2: (s, -s, -1), \quad l_3: (u, 0, 0).$$

任取 $P(t) = (t, t, 1) \in l_1$, $Q(s) = (s, -s, -1) \in l_2$, 直线 PQ 上的点为

$$P + \lambda(Q - P) = (t + \lambda(s - t), t - \lambda(s + t), 1 - 2\lambda).$$

若此直线与 l_3 相交, 则存在 λ 使 $y = 0$ 、 $z = 0$ 。由 $z = 0$ 得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 此时

$$x = \frac{s+t}{2}, \quad y = \frac{t-s}{2}.$$

由 $y = 0$ 得 $s = t$ 。故与三条直线都相交的直线恰为: 过 $P(t) \in l_1$ 与 $Q(t) \in l_2$ 的直线。其参数方程为

$$(t, t, 1) + \mu(0, -2t, -2) = (t, t(1 - 2\mu), 1 - 2\mu),$$

即 $(x, y, z) = (t, tz, z)$ 。消去参数得

$$y = xz.$$

所以所求曲面为双曲抛物面

$$y - xz = 0.$$

(验证: $z = 1$ 时 $y = x$, 含 l_1 ; $z = -1$ 时 $y = -x$, 含 l_2 ; $z = 0$ 时 $y = 0$, 含 l_3 。且曲面上的任一点 (x_0, y_0, z_0) ($y_0 = x_0 z_0$) 落在直线 $(t, t\mu, \mu)$ 上, 其中 $t = x_0$, $\mu = z_0$ 。) □

13. (20 分) 设给出的仿射变换为

$$\begin{cases} x' = x + y + 3z, \\ y' = x + 5y + z, \\ z' = 3x + y + z. \end{cases}$$

求 3 个互相正交的向量, 使得在此变换下, 它们仍变为 3 个互相正交的向量。并将所给的仿射变换表示成一个正交变换和分别对 3 个互相正交的方向施行的伸缩变换的乘积。

解答 变换的线性部分为对称矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



若单位正交基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 经 M 作用后仍互相正交, 则 $(Me_i)^T(Me_j) = e_i^T M^T Me_j = 0$ ($i \neq j$), 即 $\{e_i\}$ 应使 $M^T M (= M^2)$ 对角化, 也就是 M 的特征向量方向。计算特征多项式:

$$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda - 5 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda + 2).$$

对应特征向量:

$$\lambda_1 = 3: v_1 = (1, -1, 1); \quad \lambda_2 = 6: v_2 = (1, 2, 1); \quad \lambda_3 = -2: v_3 = (1, 0, -1).$$

它们两两正交 (直接验证 $v_i \cdot v_j = 0$, $i \neq j$)。故所求的三个互相正交的向量可取为

$$(1, -1, 1), \quad (1, 2, 1), \quad (1, 0, -1),$$

它们在变换下分别变为 $3(1, -1, 1)$, $6(1, 2, 1)$, $-2(1, 0, -1)$, 仍两两正交。

单位化得标准正交基

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1).$$

令 $P = (e_1, e_2, e_3)$ (正交矩阵), $D = \text{diag}(3, 6, -2)$, 则 $M = PDP^T$ 。于是仿射变换 (线性变换)

$$x \mapsto Mx = PDP^T x$$

即: 先作正交变换 P^T , 再沿三个互相正交的方向 e_1, e_2, e_3 分别作伸缩 $3, 6, -2$ 倍 (即 D), 最后作正交变换 P 。□

14. (15 分) 证明: 分别属于双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 上两族互相垂直的直母线交点的轨迹是原双曲抛物面与平面 $2z = b^2 - a^2$ 的交线, 并且是一条双曲线。

解答 双曲抛物面方程可写为

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

由此得两族直母线:

$$l_u: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = u, \\ u\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z, \end{cases} \quad L_v: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v, \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z. \end{cases}$$

l_u 的方向向量为 $d_1 = (a, b, u)$ (由 $\frac{dx}{a} - \frac{dy}{b} = 0$ 、 $u\left(\frac{dx}{a} + \frac{dy}{b}\right) = 2dz$ 解出), L_v 的方向向量为 $d_2 = (a, -b, v)$ 。 l_u 与 L_v 的交点为

$$P(u, v) = \left(\frac{a(u+v)}{2}, \frac{b(v-u)}{2}, \frac{uv}{2}\right)$$

(此时 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = u$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v$, $2z = uv$)。

两直母线垂直当且仅当

$$d_1 \cdot d_2 = a^2 - b^2 + uv = 0 \iff uv = b^2 - a^2 \iff 2z = b^2 - a^2.$$

故两族互相垂直的直母线交点的轨迹为双曲抛物面与平面 $2z = b^2 - a^2$ 的交线:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = b^2 - a^2.$$

设 $a \neq b$, 则 $b^2 - a^2 \neq 0$, 该交线是平面 $z = \frac{b^2 - a^2}{2}$ 上的实双曲线 (当 $a = b$ 时退化为两条直线 $x = \pm y$)。证毕。□



北京大学数学科学学院
2013 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (20 分) 设 f 是 $[0, 2]$ 上的上凸可导函数, 过 $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$ 点, 问 f 与 x 轴围成面积的下确界是多少? 该下确界能达到吗?

解答 上凸(凹)函数的图像位于任意两点间弦的上方。因 $f(0) = f(2) = 0$, $f \geq 0$ 于 $[0, 2]$ 。取弦 $(0, 0)-(1, 1)$ 与 $(1, 1)-(2, 0)$, 得

$$f(x) \geq g(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

故面积

$$S(f) = \int_0^2 f(x) dx \geq \int_0^2 g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

下确界为 1, 且不能达到。若 $S(f) = 1$, 则 $\int_0^2 (f - g) = 0$, 而 $f - g$ 连续非负, 故 $f \equiv g$, 但 g 在 $x = 1$ 处不可导(左导数 1、右导数 -1), 与 f 可导矛盾。故对任何满足条件的 f 均有 $S(f) > 1$ 。

另一方面, $S(f)$ 可任意接近 1: 例如取一列凹的可导函数 f_ε , 它们在 $[0, 1-\varepsilon] \cup [1+\varepsilon, 2]$ 上与 g 重合, 而在 $x = 1$ 附近用一段与两侧直线光滑衔接、下凸的小弧(凹弧)连接 $(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)$ 与 $(1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ 并经过 $(1, 1)$ (如 $f_\varepsilon(x) = 1 - \frac{(x-1)^2}{\varepsilon}$ 在 $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ 上, 再在端点处适当磨光以保证可导)。则 $f_\varepsilon \rightarrow g$, 且

$$\int_0^2 f_\varepsilon \rightarrow \int_0^2 g = 1.$$

综上, 面积下确界为 1, 不可达到。 □

2. (20 分) 设有方程 $y + \sin y = x$ 。

(1) 证明: 该方程在 $x = 0$ 附近可以唯一确定 $y = f(x)$ 。

(2) 将 y 表示为 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ 。

解答 (1) 设 $\Phi(y) = y + \sin y$, 则 $\Phi'(y) = 1 + \cos y > 0$ 对 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 成立, 故 Φ 在该区间上严格递增, 且 $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm(\frac{\pi}{2} + 1)$ 。于是 Φ 把 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 一一地映到 $(-\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1)$ 。故对每个 $x \in (-\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1)$, 方程 $y + \sin y = x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内有唯一解 $y = \Phi^{-1}(x)$, 特别地在 $x = 0$ 附近唯一确定 $y = f(x) = \Phi^{-1}(x)$, 且 $f(0) = 0$ 。(因 $\Phi' \neq 0$, f 还是 C^∞ 的。)

(2) 设 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ 。由 $x = y + \sin y$ 及 Taylor 展开 $\sin y = \sin a_0 + \cos a_0(y - a_0) + O((y - a_0)^2)$ (注意 $y - a_0 = O(x)$), 得

$$\begin{aligned} x &= y + \sin y \\ &= (a_0 + \sin a_0) + (1 + \cos a_0)(a_1x + a_2x^2) + o(x^2). \end{aligned}$$

比较系数:

$$a_0 + \sin a_0 = 0 \implies a_0 = 0 \quad (\text{因 } \Phi \text{ 严格递增});$$

$$(1 + \cos a_0) a_1 = 2a_1 = 1 \implies a_1 = \frac{1}{2};$$

$$(1 + \cos a_0) a_2 = 2a_2 = 0 \implies a_2 = 0.$$

故

$$y = \frac{1}{2}x + o(x^2), \quad \text{即 } a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 0.$$

□



3. (20 分) 构造定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 f , 满足 f 只在其中一点可导, 在其它各点都不连续。

解答 取

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1], \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

验证: 在 $x = 0$ 处, $f(0) = 0$, 且对任意 $h \neq 0$,

$$0 \leq \frac{|f(h) - f(0)|}{|h|} = \frac{|f(h)|}{|h|} \leq \frac{h^2}{|h|} = |h| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

故 $f'(0) = 0$, 即 f 在 0 点可导 (且 f 在 0 点连续)。

任取 $x_0 \neq 0$:

- 若 $x_0 \in \mathbb{Q}$, 则 $f(x_0) = x_0^2 \neq 0$ 。取无理数列 $y_n \rightarrow x_0$, 则 $f(y_n) = 0 \nrightarrow x_0^2 = f(x_0)$, 故 f 在 x_0 不连续;
- 若 $x_0 \notin \mathbb{Q}$, 则 $f(x_0) = 0$ 。取有理数列 $y_n \rightarrow x_0$, 则 $f(y_n) = y_n^2 \rightarrow x_0^2 \neq 0 = f(x_0)$, 故 f 在 x_0 不连续。

所以 f 只在 0 点可导, 其余各点均不连续。 □

4. (20 分) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的收敛性。

解答 $n = 1$ 时分母为 $1 + (-1) = 0$, 无意义, 故级数从 $n = 2$ 起考虑。对 $n \geq 2$, 有理化:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}} = \frac{(-1)^n (\sqrt{n} - (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})}{n - 1} = \underbrace{\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n - 1}}_{(A)} - \underbrace{\frac{(-1)^{n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n - 1}}_{(B)}.$$

级数 (A): $\frac{\sqrt{n}}{n-1} \downarrow 0$, 由 Leibniz 判别法, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 收敛 (且绝对收敛, 因 $\frac{\sqrt{n}}{n-1} = O(n^{-3/2})$)。

级数 (B): 将 $n \geq 2$ 的指标按块分组: 第 k 块 ($k \geq 2$) 为 $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$ 。块内 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \equiv k$, 故块内各项符号为 $(-1)^{n+k}$, 随 n 严格交错, 且绝对值 $\frac{1}{n-1}$ 单调递减。故第 k 块的部分和有界:

$$\left| \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{n+k}}{n-1} \right| \leq \frac{1}{k^2-1} = O(k^{-2}).$$

于是块和绝对收敛: $\sum_{k=2}^{\infty} O(k^{-2}) < +\infty$; 而任一部分和与“完整块和”之差为块内交错级数的一段尾和, 其绝对值不超过该块首项的绝对值 $O(k^{-2}) \rightarrow 0$ 。故级数 (B) 收敛 (它不绝对收敛, 因 $\sum \frac{1}{n-1}$ 发散)。

综上, 原级数收敛, 且为条件收敛: 因

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \right| = \frac{1}{|\sqrt{n} \pm 1|} \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

而 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故不绝对收敛。 □



5. (35 分) 函数 $f_n(x)$ 定义在 $[0, 2]$ 上, 满足

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \left(x - \frac{2k-1}{n}\right)^2}, \quad x \in \left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

- (1) 求 f_n 的弧长 l_n 。
- (2) 求证: f_n 一致收敛于某 f 。
- (3) 求 f 的弧长 l 。
- (4) l_n 收敛于 l 吗? 解释原因。

解答 (1) 在区间 $\left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right)$ 上, f_n 的图象是圆心 $\left(\frac{2k-1}{n}, 0\right)$ 、半径 $\frac{1}{n}$ 的上半圆, 其弧长为 $\frac{\pi}{n}$ 。共有 n 段, 故

$$l_n = n \cdot \frac{\pi}{n} = \pi.$$

(2) 对一切 $x \in [0, 2]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

故 f_n 在 $[0, 2]$ 上一致收敛于 $f \equiv 0$ 。

(3) $f \equiv 0$ 的图象是 x 轴上的线段 $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 2\}$, 其弧长

$$l = 2.$$

(4) **不收敛**。 $l_n = \pi \nrightarrow 2 = l$ 。原因是弧长 (曲线的长度) 不是一致收敛意义下的连续泛函: 函数值的一致逼近并不蕴含导数 (切方向) 的逼近。此处 $f_n \rightarrow f$, 但 f'_n 在每段的端点附近无界 (半圆在端点处切线竖直), 弧长集中在这些 “竖直” 部分, 极限过程中弧长并未收敛于极限曲线 (平直线段) 的长度。 $\square$

6. (35 分) 定义函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 如下:

$$f(x) = 0.0a_1a_2a_3\cdots, \quad x = 0.a_1a_2a_3\cdots.$$

这里 $x \in [0, 1]$ 都表示无限小数 (比如 $0.1 = 0.09$)。请自由探索 f 的性质。

解答 按题面字面理解, f 是在 x 的十进制小数的小数点后第一位插入一个 0。

(i) **良定性**。由于规定 x 一律用无限小数表示 (如 $0.1 = 0.0999\cdots$), 每个 x 的小数表示唯一, 故 f 定义无歧义。例如 $f(0.1) = f(0.0999\cdots) = 0.00999\cdots = 0.01$ 。

(ii) **显式表达式**。 $f(x) = 0.0a_1a_2a_3\cdots = \frac{0.a_1a_2a_3\cdots}{10}$, 即

$$f(x) = \frac{x}{10}.$$

(iii) **基本性质**。由 $f(x) = \frac{x}{10}$ 立得:

- f 连续 (事实上 C^∞), 严格单调递增, $f'(x) = \frac{1}{10}$;
- f 是单射, 值域为 $\left[0, \frac{1}{10}\right]$;
- f 是压缩映射: $|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{10}$, 有唯一不动点 $x = 0$ (Banach 不动点定理);
- 迭代: $f^{\circ n}(x) = \frac{x}{10^n} \rightarrow 0$, 且一致收敛;
- 对 Lebesgue 测度 m : $m(f(E)) = \frac{m(E)}{10}$; 图象 $\{(x, f(x))\}$ 是斜率为 $\frac{1}{10}$ 的线段。



注：若按另一常见版本理解——“在每一位数字后都插入一个 0”，即

$$f(x) = 0.0a_10a_20a_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{2k}},$$

则该映射严格单调递增、单射，值域为十进制小数中“奇数位全为 0”的数全体（一个与 Cantor 集同胚的自相似紧集），且 f 处处不连续（单调函数仅在跳跃点间断， f 的跳跃点恰为十进制有限小数对应的点）。两种理解都以“无限小数表示”保证良性。□

7. (25 分)

(1) $x^6 + x^3 + 1$ 在有理数域上是否可约，给出详细理由。

(2) 如果 α 是 $x^6 + x^3 + 1 = 0$ 的根，求多项式 $f(x)$ ，满足 $\deg(f) < 6$ ，且 $\alpha^8 + \alpha^5 = f(\alpha)$ 。

(3) (2) 中所求 $f(x)$ 唯一吗？为什么？

(4) 求多项式 $g(x)$ ，满足 $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^8 + \alpha^5}$ ，其中 $g(x)$ 是有理多项式。

解答 (1) 不可约。注意到

$$x^6 + x^3 + 1 = \frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} = \Phi_9(x),$$

即 9 次分圆多项式（其根为全部 6 个本原 9 次单位根）。作平移 $x \mapsto x + 1$ ：

$$\Phi_9(x+1) = \frac{(x+1)^9 - 1}{(x+1)^3 - 1} = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 21x^3 + 18x^2 + 9x + 3.$$

除首项外各项系数 6, 15, 21, 18, 9, 3 均被 3 整除，常数项 3 不被 $3^2 = 9$ 整除，由 Eisenstein 判别法（素数 $p = 3$ ）， $\Phi_9(x+1)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约，故 $x^6 + x^3 + 1 = \Phi_9(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

(2) 由 $\alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0$ 得 $\alpha^6 = -\alpha^3 - 1$ 。于是

$$\alpha^7 = \alpha \cdot \alpha^6 = -\alpha^4 - \alpha, \quad \alpha^8 = \alpha^2 \cdot \alpha^6 = -\alpha^5 - \alpha^2,$$

故

$$\alpha^8 + \alpha^5 = -\alpha^2.$$

取 $f(x) = -x^2$ ($\deg f = 2 < 6$) 即满足要求。

(3) 唯一。若 $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ 且 $\deg(f_1 - f_2) < 6$ ，则由 (1)， $\Phi_9(x)$ 是 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式，次数为 6。若 $f_1 - f_2 \neq 0$ ，则 $(f_1 - f_2)(\alpha) = 0$ 与极小多项式的定义（次数最低）矛盾。故 $f_1 = f_2$ ，即 (2) 中 f 唯一。

(4) 由 (2)， $\alpha^8 + \alpha^5 = -\alpha^2$ ，故

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^8 + \alpha^5} = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

由 $\alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0$ 两边除以 α^2 ($\alpha \neq 0$)：

$$\alpha^4 + \alpha + \alpha^{-2} = 0 \implies \alpha^{-2} = -\alpha^4 - \alpha \implies -\frac{1}{\alpha^2} = \alpha^4 + \alpha.$$

取

$$g(x) = x^4 + x$$

即可。验证： $g(\alpha)(\alpha^8 + \alpha^5) = (\alpha^4 + \alpha)(-\alpha^2) = -\alpha^6 - \alpha^3 = 1$ 。□

8. (25 分)

(1) 设 A, B 是半正定矩阵。证明：

$$|A + B| \geq |A|, \quad |A + B| \geq |B|.$$



(2) 设 A 是正定矩阵, D 是由 A 第 $i_1, \dots, i_s$ 行和第 $i_1, \dots, i_s$ 列构成的子式, M 是 D 的代数余子式。证明: $|A| \leq DM$ 。

解答 (1) 因 $B \succeq 0$, 对任意 x , $x^T B x \geq 0$, 故

$$x^T(A+B)x = x^T A x + x^T B x \geq x^T A x,$$

即 $A+B \succeq A \succeq 0$ 。由 Courant–Fischer 极小极大原理, 特征值逐项单调:

$$\lambda_i(A+B) \geq \lambda_i(A) \geq 0 \quad (i=1, \dots, n),$$

故

$$|A+B| = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A+B) \geq \prod_{i=1}^n \lambda_i(A) = |A|.$$

同理 $(A+B \succeq B)$ 得 $|A+B| \geq |B|$ 。

(2) 对行列作同步置换 (即对行、列按同一置换重排), D 成为左上角主子块, 且 A 的正定性、 $|A|$ 、 D 、 M 均不变。故不妨设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 为 s 阶, $D = |A_{11}|$ 。由于 $i_1 + \dots + i_s$ 在行列式中出现两次, 代数余子式的符号为 $(+1)$, 故 $M = |A_{22}|$ 。 A 正定 $\implies A_{11}$ 正定可逆。对 A 作 Schur 分解:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{12}^T A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix},$$

取行列式得

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}| = D \cdot S,$$

其中 $S = |A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}|$ 为 Schur 补的行列式。又 Schur 补半正定 (它是正定矩阵 A 的一个主子块消去后的剩余部分, 仍半正定), 且

$$A_{22} - (A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}) = A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \succeq 0 \implies A_{22} \succeq A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \succeq 0,$$

故由 (1) 的单调性, $S \leq |A_{22}| = M$ 。于是

$$|A| = D \cdot S \leq DM.$$

□

9. (25 分) n 维空间至多有多少个两两成钝角的向量?

解答 最多 $n+1$ 个 (这里指非零向量)。

先证上界 $n+1$: 设 $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ 为非零向量且两两成钝角, 即 $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ ($i \neq j$)。对 n 归纳。 $n=1$ 时显然 $m \leq 2 = n+1$ 。设结论对 $n-1$ 成立。固定 v_m , 将 v_i ($i < m$) 正交分解:

$$v_i = \alpha_i \frac{v_m}{|v_m|} + w_i, \quad w_i \perp v_m.$$

由 $\langle v_i, v_m \rangle < 0$ 得 $\alpha_i < 0$ 。对 $i \neq j < m$,

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle - \alpha_i \alpha_j < 0$$

(因 $\alpha_i \alpha_j > 0$ 且 $\langle v_i, v_j \rangle < 0$), 即 $w_1, \dots, w_{m-1}$ 是 $v_m^\perp$ ($n-1$ 维) 中两两成钝角的向量。由归纳假设 $m-1 \leq n$, 即 $m \leq n+1$ 。(注意 $w_i \neq 0$: 若 $w_i = 0$, 则 $v_i = \alpha_i \frac{v_m}{|v_m|}$, 于是 $\langle v_i, v_j \rangle = \frac{\alpha_i}{|v_m|} \langle v_m, v_j \rangle > 0$ ($\alpha_i < 0$, $\langle v_m, v_j \rangle < 0$), 与两两成钝角矛盾。)



再构造 $n+1$ 个: 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的超平面 $\{x: \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$ (同构于 $\mathbb{R}^n$) 上取标准基向量 $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{n+1}$ (正则单形的 $n+1$ 个顶点), 其重心为 $c = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \hat{e}_i$ 。令

$$u_i = \hat{e}_i - c \quad (i = 1, \dots, n+1),$$

则 u_i 落在超平面 $\{\sum x_i = 0\} \cong \mathbb{R}^n$ 内, 且对 $i \neq j$,

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} < 0,$$

即 $u_1, \dots, u_{n+1}$ 两两成钝角。故最大个数为 $n+1$ 。□

10. (25 分) 设 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, 证明: $e^{|A|} = e^{\text{tr}(A)}$ 。

解答 (这里 $|A|$ 表示 A 的行列式, 即证明 $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$ 。) 设 A 的 Jordan 标准形为

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s),$$

其中 J_i 是特征值为 λ_i 的 Jordan 块 ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值, 计重数)。因 $A^n = PJ^nP^{-1}$, 故

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = P \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \right) P^{-1} = Pe^JP^{-1},$$

于是

$$\det(e^A) = \det(e^J) = \prod_{i=1}^s \det(e^{J_i}).$$

对 Jordan 块 $J_i = \lambda_i I + N$ (N 为幂零矩阵),

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} e^N = e^{\lambda_i} \left(I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots \right),$$

它是上三角矩阵且对角元全为 e^{λ_i} , 故 $\det(e^{J_i}) = e^{\lambda_i \dim J_i}$ 。从而

$$\det(e^A) = \prod_{i=1}^s e^{\lambda_i \dim J_i} = \exp \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = e^{\text{tr}(A)}.$$

□

11. (30 分) 已知双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的一支 $z > 0$, M 是与该双曲面相交于封闭曲线的任意平面, M_0 是与 M 平行的一族平面, 证明 M_0 与 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ($z > 0$) 的交线都是椭圆, 且椭圆的中心在 xOy 平面上的投影都在 x 轴上。

解答 设平面族为 $M_t: ax + by + cz = t$ ($t \in \mathbb{R}$), 法向量 $n = (a, b, c)$ 。把 M_t 的方程代入曲面方程。

由对称性先处理 $c \neq 0$ 的情形: 由 $z = \frac{t - ax - by}{c}$ 得截面二次曲线方程

$$x^2 + y^2 - \frac{(t - ax - by)^2}{c^2} = -1.$$

其二次部分对应的矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{c^2} & -\frac{ab}{c^2} \\ -\frac{ab}{c^2} & 1 - \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix}.$$

题设 M (即某个 t) 与曲面交于封闭曲线, 故该二次型正定, 这等价于

$$\det Q = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2} > 0 \iff c^2 > a^2 + b^2.$$



该条件只依赖平面的方向 n , 与 t 无关, 故一切平行平面 M_t (只要与 $z > 0$ 一支相交非空) 的截线都是椭圆。

再求椭圆中心的轨迹。曲面 $q(x) = x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ 关于方向 n 的共轭直径面 (平行于 n 的弦的中点轨迹所在平面) 为

$$n \cdot \frac{1}{2} \nabla q = 0, \quad \text{即 } ax + by - cz = 0.$$

截线 M_t 的椭圆中心 C_t 是平面 M_t 与该共轭直径面的交点:

$$\begin{cases} ax + by + cz = t, \\ ax + by - cz = 0, \end{cases} \implies C_t = \left(\frac{ta}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{tb}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{-tc}{c^2 - a^2 - b^2} \right).$$

(等价地: C_t 满足 $\nabla q(C_t) \parallel n$ 。) 故各椭圆的中心都落在过原点的定直线

$$L: (x, y, z) = \lambda(a, b, -c)$$

上; 它们在 xOy 平面上的投影落在过原点、方向为 (a, b) 的定直线上。

特别地, 曲面关于 z 轴旋转对称, 故可绕 z 轴旋转坐标系使 $b = 0$ (这保持曲面方程、 $z > 0$ 分支及 xOy 平面不变), 此时平面族为 $ax + cz = t$, 各椭圆中心

$$C_t = \left(\frac{ta}{c^2 - a^2}, 0, \frac{-tc}{c^2 - a^2} \right),$$

其投影为 $\left(\frac{ta}{c^2 - a^2}, 0 \right)$, 全部落在 x 轴上。这就是命题的结论。(注: 命题中“投影都在 x 轴上”应理解为在如上适当选取坐标 (绕 z 轴旋转) 之后成立; 一般地投影落在过原点的一条定直线上。) $\square$

12. (20 分) 平面上直线 AA', BB', CC' 平行, AB 和 $A'B'$ 交于点 D , BC 与 $B'C'$ 交于点 E , CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明: D, E, F 共线。

解答 (Desargues 定理的平行情形, 视 AA', BB', CC' 交于无穷远点。) 设三条平行线的公共方向为 w , 记

$$A' = A + aw, \quad B' = B + bw, \quad C' = C + cw.$$

先求 $D = AB \cap A'B'$ 。设 $D = A + t(B - A) = A' + t'(B' - A')$, 即

$$A + t(B - A) = A + aw + t'[(B - A) + (b - a)w].$$

由 $B - A$ 与 w 线性无关, 比较系数得 $t = t'$ 且 $a + t(b - a) = 0$, 故 $t = \frac{a}{a - b}$ (设 $a \neq b$),

$$D = \frac{bA - aB}{b - a}.$$

同理

$$E = \frac{cB - bC}{c - b}, \quad F = \frac{aC - cA}{a - c}.$$

于是

$$(b - a)D + (c - b)E + (a - c)F = 0,$$

且 $(b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$ 。故 D, E, F 仿射相关, 三点共线。若出现 $a = b$ 等退化情形 (相应交点在无穷远处), 可对参数作小扰动取极限, 结论仍成立。 $\square$



北京大学数学科学学院
2015 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (90 分) 设 $y = f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, 对任意正数 $k \geq 0$, 记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|,$$

设 m 和 n 为两整数, $0 \leq m < n$, 试分别就下列情况, 给出你的结论和证明。

- (1) 如果 M_m 和 M_n 均有界, 那么对哪些正数 k , M_k 有界? 对哪些整数 k , M_k 可以无界?
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 存在有限极限, 而 M_n 有界, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?
- (3) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(n)}(x)|$ 都存在有限极限, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?

解答 先建立基本引理 (Landau-Kolmogorov 型插值不等式)。

引理 设 $0 \leq m < k < n$ 。若 $M_m, M_n < +\infty$, 则存在仅依赖于 m, k, n 的常数 C , 使

$$M_k \leq C M_m^{\frac{n-k}{n-m}} M_n^{\frac{k-m}{n-m}}.$$

证明 (有限差分法) 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 、 $h > 0$, 用 $f^{(m)}$ 在 $x, x+h, \dots, x+(k-m)h$ 处值的 $(k-m)$ 阶差分逼近 $f^{(k)}(x)$:

$$\sum_{j=0}^{k-m} (-1)^{k-m-j} \binom{k-m}{j} f^{(m)}(x+jh) = h^{k-m} f^{(k)}(x) + R,$$

其中余项满足 $|R| \leq C_1 h^{n-m} M_n$ (差商公式的标准余项估计, 因 $f^{(m)}$ 有 $n-m$ 阶导数且 $|f^{(n)}| \leq M_n$)。于是

$$|f^{(k)}(x)| \leq C_2 h^{-(k-m)} M_m + C_1 h^{n-k} M_n.$$

取 $h = \left(\frac{M_m}{M_n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$ (若 $M_n = 0$ 则 f 是次数 $< n$ 的多项式, 结论显然), 得

$$|f^{(k)}(x)| \leq (C_1 + C_2) M_m^{\frac{n-k}{n-m}} M_n^{\frac{k-m}{n-m}},$$

对 x 取上确界即得引理。

(1) **结论**: 当 $m \leq k \leq n$ 时 M_k 必有界; 当 $k < m$ 或 $k > n$ 时 M_k 可以无界 (也可以有界)。

当 $m < k < n$ 时由引理得 $M_k < +\infty$; $k = m, n$ 由假设。下面构造反例说明其余情形可以无界。

$k < m$ 的情形 (设 $m \geq 1$): 取 $f(x) = x^m$, 则 $f^{(m)}(x) = m!$, $f^{(n)} \equiv 0$ ($n > m$), 故 M_m, M_n 有界; 但对 $0 \leq k \leq m-1$,

$$f^{(k)}(x) = m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k},$$

无界, 即 $M_k = +\infty$ 。

$k > n$ 的情形: 取 $f(x) = e^{-nx} \sin(e^x)$ 。由 Faà di Bruno 公式,

$(\sin e^x)^{(r)} = \sum_{s \leq r} \pm S(r, s) e^{sx} (\sin \text{ 或 } \cos)(e^x)$, 其中 $S(r, s)$ 为第二类 Stirling 数, 故 $|(\sin e^x)^{(r)}| \leq C_r e^{rx}$ ($x \geq 0$)。于是当 $j \leq n$ 时

$$|f^{(j)}(x)| = \left| \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-n)^i e^{-nx} (\sin e^x)^{(j-i)} \right| \leq \sum_{i=0}^j C_{j,i} e^{(j-i-n)x} \leq C,$$



故 $M_0, \dots, M_n$ 均有界 (从而 M_m, M_n 有界); 而

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-nx}(\sin e^x)^{(n+1)} + (\text{有界项}) = \pm e^x \sin(e^x) + O(1),$$

沿 $x_k = \ln(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 有 $|f^{(n+1)}(x_k)| = e^{x_k} + O(1) \rightarrow +\infty$, 故 $M_{n+1} = +\infty$ 。

(2) **结论:** 当 $m \leq k \leq n-1$ 时极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 必存在; 当 $k \geq n$ 或 $k < m$ 时不一定存在。

证明: 由 $|f^{(m)}(x)|$ 有有限极限且 $f^{(m)}$ 连续, 知 $f^{(m)}$ 最终保号, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(m)}(x) =: L$ 存在, 且 $M_m < +\infty$ 。对 $m < k < n$ 及任意 x, y , 用引理证明中的差分公式:

$$f^{(k)}(x) = h^{-(k-m)} \sum_{j=0}^{k-m} (-1)^{k-m-j} \binom{k-m}{j} f^{(m)}(x+jh) + O(M_n h^{n-k}),$$

(O 常数一致), 于是

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq h^{-(k-m)} \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k-m}{j} |f^{(m)}(x+jh) - f^{(m)}(y+jh)| + C_3 M_n h^{n-k}.$$

因 $f^{(m)}$ 在 $+\infty$ 处有极限, 故 $x, y \rightarrow +\infty$ 时上式第一项 $\rightarrow 0$, 从而

$$\limsup_{x, y \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq C_3 M_n h^{n-k}.$$

令 $h \rightarrow 0^+$, 得 $f^{(k)}$ 在 $+\infty$ 处满足 Cauchy 条件, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x)$ 存在, $\lim |f^{(k)}(x)|$ 亦存在。
 $k = m$ 由假设。

$k = n$ **不一定:** 取 $m = 1, n = 2, f(x) = \int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim \frac{\sin x^2}{x} = 0$ 存在, 且

$$f''(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

有界 ($M_2 < +\infty$), 但 $|f''(x)|$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时振荡, 无极限。 $k < m$ 的情形用 $f(x) = x^m$ 即可 ($|f^{(k)}| \rightarrow +\infty$)。

(3) **结论:** 当 $m \leq k \leq n$ 时 $\lim |f^{(k)}|$ 必存在; 当 $k < m$ 或 $k > n$ 时不一定存在。

证明: 由 (2) (此时 M_n 亦自动有界, 因 $|f^{(n)}|$ 有极限), $m \leq k \leq n-1$ 时极限存在; $k = n$ 由假设。

$k > n$ **不一定:** 构造 $f \in C^\infty$ 使 $f^{(n)}(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ (在 $x = 0$ 处补充定义 0), 且 $f^{(m)}$ ($m < n$) 由反复的尾部积分定义:

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{n-j} \int_x^{+\infty} f^{(j+1)}(t) dt \quad (j = n-1, n-2, \dots, m).$$

因 $\int_x^\infty \frac{\sin t^2}{t} dt$ 收敛 (Dirichlet), 且由分部积分 $\int_x^\infty \frac{\sin t^2}{t} dt = O(x^{-2})$, 故这些积分都收敛, 且 $f^{(j)}(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty, m \leq j \leq n$), 即 $\lim |f^{(j)}|$ 都存在。但

$$f^{(n+1)}(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

在 $x \rightarrow +\infty$ 时振荡, $\lim |f^{(n+1)}(x)|$ 不存在。

$k < m$ **不一定:** 仍取 $f(x) = x^m$, 则 $\lim |f^{(m)}| = m!, \lim |f^{(n)}| = 0$ 均存在, 而 $|f^{(k)}(x)| \rightarrow +\infty$ ($k < m$)。□

2. (30 分) 判断级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的敛散性, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的取整。



解答 (同 2013 年第 4 题。) 对 $n \geq 2$ 有理化:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n-1}.$$

第一项级数 $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 收敛: $\frac{\sqrt{n}}{n-1} \downarrow 0$, 由 Leibniz 判别法 (事实上绝对收敛)。

第二项按块 $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$ ($k \geq 2$) 分组。块内 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \equiv k$, 各项符号 $(-1)^{n+k}$ 严格交错, 绝对值 $\frac{1}{n-1}$ 递减, 故块内部分和的绝对值不超过块首项 $O(k^{-2})$; 块和绝对收敛, 块内尾和的绝对值不超过块首项, 趋于 0。故第二项级数收敛 (不绝对收敛)。

因此原级数收敛; 又通项绝对值 $\frac{1}{|\sqrt{n} \pm 1|} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ 不绝对可和, 故为条件收敛。 $\square$

3. (30 分) 证明:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(xy)^{xy}} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

解答 (题中第二项应为 $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx$, 即 “Sophomore’s dream” 恒等式。)

先证第三个等号: $\frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}$, 且在 $[0, 1]$ 上 $\left| \frac{1}{x^x} \right| \leq e^{1/e}$ (因 $x |\ln x| \leq \frac{1}{e}$), 级数被可积函数控制, 可逐项积分 (注意被积函数在 $x=0$ 处取极限值 1)。利用

$$\int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

(令 $x = e^{-t/(n+1)}$ 化为 Γ 积分) 得

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

再证第一个等号。作变量替换 $u = xy$, $v = x$ (即 $x = v$, $y = \frac{u}{v}$), Jacobi 行列式为 $\frac{1}{v}$, 积分区域 $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 变为 $\{0 < u < v < 1\}$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(xy)^{xy}} dx dy = \int_0^1 \int_u^1 u^{-u} \frac{1}{v} dv du = \int_0^1 u^{-u} \left(\int_u^1 \frac{dv}{v} \right) du = - \int_0^1 u^{-u} \ln u du.$$

与上面同样展开 $u^{-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u \ln u)^n}{n!}$ 并逐项积分, 利用

$$\int_0^1 u^n (-\ln u)^{n+1} du = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}}$$

得

$$- \int_0^1 u^{-u} \ln u du = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n (-\ln u)^{n+1} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

故两式均等于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 。 $\square$

4. (25 分) 设 A 是一个 n 阶方阵, 且 $n \geq 3$, A^* 是 A 的伴随矩阵 (即 A 的代数余子式所组成的矩阵)。试证明: 若 $(A^*)^* \neq 0$ (零矩阵), 则 A 可逆, 且此时 $(A^*)^*$ 是 A 的一个纯量倍。

解答 先证 A 可逆。反设 A 不可逆, 则 $\text{rank } A \leq n-1$ 。由伴随矩阵的秩的基本结论:

$$\text{rank } A^* = \begin{cases} n, & \text{rank } A = n, \\ 1, & \text{rank } A = n-1, \\ 0, & \text{rank } A \leq n-2, \end{cases}$$



故 $\text{rank } A^* \leq 1$ 。因 $n \geq 3$, $\text{rank } A^* \leq 1 < n-1$, A^* 的每个 $n-1$ 阶子式均为 0, 于是 $(A^*)^* = O$, 与题设矛盾。故 A 可逆。

现在设 A 可逆。由 $A^* = |A|A^{-1}$, 得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \cdot (|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2}A.$$

(其中用到 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。) 故 $(A^*)^*$ 是 A 的纯量倍: $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ 。□

5. (25 分) 设 A 是一个 3 阶实方阵, 考虑 A 所定义的线性变换 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha \mapsto A\alpha$ (α 是列向量)。试证明: 若 $AA^T = A^TA$ (其中 A^T 是指 A 的转置矩阵), 则上述线性变换必有一个 2 维不变子空间。

解答 A 是正规矩阵。实三次多项式 $|\lambda I - A|$ 必有实根 $\lambda \in \mathbb{R}$, 取对应的实特征向量 $v \neq 0$: $Av = \lambda v$ 。

先证 $A^Tv = \lambda v$ 。因 $AA^T = A^TA$, 故 $(A - \lambda I)(A^T - \lambda I) = (A^T - \lambda I)(A - \lambda I)$ (λ 为实数)。于是

$$|(A^T - \lambda I)v|^2 = \langle (A^T - \lambda I)v, (A^T - \lambda I)v \rangle = \langle v, (A - \lambda I)(A^T - \lambda I)v \rangle = \langle v, (A^T - \lambda I)(A - \lambda I)v \rangle = 0,$$

故 $A^Tv = \lambda v$ 。

令 $W = \text{span}\{v\}^\perp$ (二维子空间)。对任意 $w \in W$,

$$\langle Aw, v \rangle = \langle w, A^Tv \rangle = \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = 0,$$

故 $Aw \in W$ 。因此 W 是 A 的 2 维不变子空间。□

6. (25 分) 设 A 和 B 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的两个 n 阶方阵, 并且 A 有 n 个特征值 $1, 2, \dots, n$, B 也有 n 个特征值 $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$, 其中 $p_1, \dots, p_n$ 是前 n 个素数 (比如 $p_1 = 2, p_2 = 3$ 等)。试证明: $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $X \mapsto AXB$ 是可以对角化的。

解答 因 A 有 n 个互异特征值 $1, \dots, n$, B 有 n 个互异特征值 $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$, 故 A, B 均可对角化: 存在可逆矩阵 P, Q 使

$$P^{-1}AP = D_1 = \text{diag}(1, 2, \dots, n), \quad Q^{-1}BQ = D_2 = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}).$$

考虑 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换

$$\Phi: X \mapsto AXB.$$

作可逆线性变换 $\Psi: X \mapsto P^{-1}XQ$, 则

$$\Psi\Phi\Psi^{-1}(Y) = \Psi(APYQ^{-1}B) = P^{-1}APYQ^{-1}BQ = D_1YD_2,$$

即 Φ 相似于变换 $Y \mapsto D_1YD_2$ 。对矩阵单位 E_{ij} (仅 (i, j) 元为 1),

$$D_1E_{ij}D_2 = i\sqrt{p_j}E_{ij},$$

即矩阵单位 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) 是 $Y \mapsto D_1YD_2$ 的一组特征向量, 构成 $M_n(\mathbb{C})$ 的一组基。故 $Y \mapsto D_1YD_2$ 可对角化, 从而 Φ 可对角化 (其特征值为 $\{i\sqrt{p_j}\}$, 计重数)。□

7. (25 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

试找出两个没有常数项的多项式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 使得下列三个条件同时成立:



- (1) $f(A)$ 可对角化;
- (2) $\varphi(A)$ 是幂零矩阵;
- (3) $A = f(A) + \varphi(A)$ 。

解答 求 A 的特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -3 \\ 2 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

特征值 1 (二重)、-1。对 $\lambda = 1$, $A - I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 故 $\lambda = 1$ 的特征子空间为 1 维, 即 A 的 Jordan 标准形为 $J_2(1) \oplus J_1(-1)$; 直接计算得

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \quad (A - I)^2(A + I) = O,$$

故 A 的极小多项式为 $(x - 1)^2(x + 1)$ 。

作 Jordan-Chevalley 分解: $A = D + N$, 其中 $D = f(A)$ 为可对角化部分, $N = \varphi(A)$ 为幂零部分, D, N 均为 A 的多项式。要求 $f(A)$ 在 $\lambda = 1$ 的根子空间上等于 I , 在 $\lambda = -1$ 的根子空间上等于 $-I$, 即

$$f(x) \equiv 1 \pmod{(x - 1)^2}, \quad f(x) \equiv -1 \pmod{(x + 1)},$$

且 f 无常数项。设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (三次以内可解出)。条件化为

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(-1) = -1.$$

即

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 3a + 2b + c = 0, \\ -a + b - c = -1, \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{3}{2}$ 。故

$$f(x) = \frac{3x - x^3}{2}, \quad \varphi(x) = x - f(x) = \frac{x^3 - x}{2}.$$

两者都无常数项。验证:

- $f(A) = \frac{3A - A^3}{2}$: 在 $V_1 = \ker(A - I)^2$ 上 $f(A) = I$, 在 $V_{-1} = \ker(A + I)$ 上 $f(A) = -I$, 故 $f(A)$ 可对角化;
- $\varphi(A) = A - f(A) = \frac{A^3 - A}{2}$: 在 V_1 上等于 $A - I$ (其平方为 O), 在 V_{-1} 上等于 O , 故 $\varphi(A)$ 幂零;
- $A = f(A) + \varphi(A)$ 显然成立 ($f(x) + \varphi(x) = x$)。

□

8. (几何部分, 共 5 小题, 每题 10 分)

- (1) 三维欧氏空间中取定直角坐标系。有一直线 l 过点 $(1, 0, 0)$ 且方向向量为 $(0, 1, 1)$ 。绕 z 轴旋转生成一个二次曲面 S 。试写出此二次曲面的代数方程 (形如 $f(x, y, z) = 0$)。



- (2) 设有一固定平面 Σ , 具有以下性质: 上述直线 l 在绕 z 轴旋转过程中总是与 Σ 相交。考虑与 Σ 平行的平面族 Σ_t , $t \in \mathbb{R}$, $\Sigma_0 = \Sigma$ 。试证明 $\Sigma_t \cap S$ 总是椭圆。
- (3) 试证明 t 值变化过程中, 上述各椭圆中的中心总落在一个过原点的空间定直线 L 上。
- (4) 固定 L 上任一点 p , 试证明: 由 p 向曲面 S 作的各条切线的切点都落在一条椭圆 Γ_p 上, 且椭圆 Γ_p 所在平面是 Σ_t 之一。
- (5) S 把它在空间的补集分成内外两个连通分支, 其中外部区域不包含原点。取上一小题所述椭圆 Γ_p 所在平面落在 S 外部的一点 $\hat{p}$ 。试证明: 从 $\hat{p}$ 向 S 所作的各条切线之切点落在一条双曲线 Γ 上, 且 Γ 所在平面过 p 点。

解答 (1) l 上的点为 $(1, s, s)$ ($s \in \mathbb{R}$)。绕 z 轴旋转后, $z = s$ 不变, 而 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1 + s^2 = 1 + z^2$ 。故

$$S: x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

即单叶双曲面。

(2) 设平面族为 $\Sigma_t: ax + by + cz = t$, 法向量 $n = (a, b, c)$ 。 l 绕 z 轴转过角度 θ 后的直线 l_θ 的方向向量为 $d(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 1)$ 。 l_θ 与 Σ 平行当且仅当

$$n \cdot d(\theta) = -a \sin\theta + b \cos\theta + c = 0.$$

函数 $-a \sin\theta + b \cos\theta + c$ 的取值范围是 $[c - \sqrt{a^2 + b^2}, c + \sqrt{a^2 + b^2}]$ 。由题设, l 在旋转过程中总与 Σ 相交, 故 l_θ 对任何 θ 都不与 Σ 平行 (否则平行又不相交), 即上式对一切 θ 均非零, 故

$$|c| > \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{即 } c^2 > a^2 + b^2.$$

特别地 $c \neq 0$ 。将 $z = \frac{t - ax - by}{c}$ 代入 S 的方程, 得 $\Sigma_t \cap S$ 在 (x, y) 坐标下的方程, 其二次部分矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{c^2} & -\frac{ab}{c^2} \\ -\frac{ab}{c^2} & 1 - \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix}, \quad \det Q = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2} > 0, \quad \text{tr } Q = 2 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} > 0,$$

故 Q 正定。所以每个 $\Sigma_t \cap S$ (非空, 事实上对一切 t 均非空) 都是椭圆。

(3) 曲面 S 关于方向 n 的共轭直径面为 $n \cdot \nabla q = 0$ ($q = x^2 + y^2 - z^2 - 1$), 即 $ax + by - cz = 0$ 。椭圆 $\Sigma_t \cap S$ 的中心 C_t 是 Σ_t 与共轭直径面的交点:

$$C_t = \left(\frac{ta}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{tb}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{-tc}{c^2 - a^2 - b^2} \right),$$

故所有中心落在过原点的定直线

$$L: (x, y, z) = \lambda(a, b, -c)$$

上。

(4) 对二次曲面 $S: q(x) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, 点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ 的极平面为

$$p_1x + p_2y - p_3z = 1.$$

(极平面理论的基本事实: q 上一点 u 处的切平面是 $p_1x + p_2y - p_3z = 1$ 的形式当且仅当切平面过 p , 即“从 p 引的切线的切点全体 = 极平面与 S 的交”。) 因 $p \in L$, 设 $p = \lambda(a, b, -c)$, 则极平面为

$$\lambda(ax + by + cz) = 1 \iff ax + by + cz = \frac{1}{\lambda},$$

即 $\Sigma_{1/\lambda}$ 。故切点全体 = $S \cap \Sigma_{1/\lambda}$, 由 (2) 这是椭圆, 记作 Γ_p ; 其所在平面为 $\Sigma_{1/\lambda}$, 是 Σ_t 之一。



(5) 设 $\Gamma_p \subset \Sigma_{t_0}$ ($t_0 = \frac{1}{\lambda}$), 取 $\hat{p} \in \Sigma_{t_0}$ 位于 S 的外部区域 (即 $\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 > 1$)。从 $\hat{p}$ 引 S 的切线, 切点全体为 S 与 $\hat{p}$ 的极平面

$$\Pi: \hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y - \hat{p}_3 z = 1$$

的交。其法向量 $m = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, -\hat{p}_3)$ 满足

$$m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 = \hat{p}_3^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 < 0$$

(由 $\hat{p}$ 在外部区域), 与 (2) 中的计算相对照 (椭圆条件 $c^2 > a^2 + b^2$ 恰为法向量满足 $m_3^2 > m_1^2 + m_2^2$), 知 $S \cap \Pi$ 是双曲线 (当 $m_3 = 0$ 时亦为双曲线: 截面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 与竖直平面的交线是双曲线), 记作 Γ 。

再证 Π 过 p 。极平面关系是对称的: $p \in \Pi \iff p_1 \hat{p}_1 + p_2 \hat{p}_2 - p_3 \hat{p}_3 = 1 \iff \hat{p} \in (p \text{ 的极平面}) = \Sigma_{t_0}$, 而 $\hat{p} \in \Sigma_{t_0}$ 由选取保证。故 Π 过 p , 即双曲线 Γ 所在平面过 p 。证毕。 $\square$



北京大学数学科学学院
2016 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (证明题, 共 30 分, 每小题 15 分)

(1) 若 $f(x)$ 在实轴上可导且 $f'(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有一个零点。

(2) 若 $f(x)$ 处处二阶可导且 $f''(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有两个零点。

解答 (1) 令 $g(x) = e^{-x}f(x)$, 则

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0,$$

故 g 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增, 至多有一个零点, 从而 f 至多有一个零点。

(2) 反设 f 有三个零点 $a < b < c$ 。

先证 f 在 $[a, b]$ 上没有正的最大值。若 f 在 (a, b) 内某点取正的局部极大值 ξ ($f(\xi) > 0$), 则 $f'(\xi) = 0$ 且 $f''(\xi) \leq 0$, 与 $f''(\xi) > f(\xi) > 0$ 矛盾。故 $f \leq 0$ 于 $[a, b]$ 。同理 $f \leq 0$ 于 $[b, c]$ 。

于是 $f \leq 0$ 于 $[a, c]$ 而 $f(b) = 0$, 即 b 是 f 在 (a, c) 内的 (局部) 最大值点, 故 $f'(b) = 0, f''(b) \leq 0$ 。但由条件 $f''(b) > f(b) = 0$, 矛盾。故 f 至多有两个零点。 $\square$

2. (30 分) 假设 $\varphi(x, y, z)$ 是原点 O 某个邻域上 C^∞ 函数, 且 $\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}$ 在 O 点为 0, $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}$ 在 O 点为 1, $\varphi_{xy}(O) = \frac{1}{2}, \varphi_z(O) = -\frac{1}{2}, \varphi(x, y, z) = 0$ 的隐函数记为 $z = z(x, y)$ (已知 $z(0, 0) = 0$)。请讨论 $z = z(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点附近的极值问题。

解答 因 $\varphi_z(O) = -\frac{1}{2} \neq 0$, 由隐函数定理, 方程 $\varphi = 0$ 在 O 附近唯一确定 C^∞ 函数 $z = z(x, y)$, $z(0, 0) = 0$, 且

$$z_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}, \quad z_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z},$$

故 $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$, $(0, 0)$ 是驻点。

在 O 点将 φ Taylor 展开 (注意到 $\varphi_{xz}(O) = \varphi_{yz}(O) = 0$):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{2}\varphi_{xx}(O)x^2 + \varphi_{xy}(O)xy + \frac{1}{2}\varphi_{yy}(O)y^2 + \varphi_z(O)z + o(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2) - \frac{1}{2}z + o(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

令 $\varphi = 0$, 得

$$z = x^2 + xy + y^2 + o(x^2 + y^2 + z^2).$$

又由隐函数定理 $z = O(x^2 + y^2)$ (z 的梯度在原点为零), 故 $z^2 = O((x^2 + y^2)^2) = o(x^2 + y^2)$, 从而

$$z(x, y) = x^2 + xy + y^2 + o(x^2 + y^2).$$

二次型 $x^2 + xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 正定 (特征值 $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$)。故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ 时

$$z(x, y) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) > 0 = z(0, 0),$$

即 z 在 $(0, 0)$ 处取得严格极小值 0。 $\square$



3. (40 分) 设 $z = z(x, y)$ 是题 2 中的隐函数, Ω_δ 是 $(0, 0)$ 点的 δ 邻域, 当 δ 充分小时, 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy.$$

解答 作伸缩替换 $u = \sqrt{t}x$, $v = \sqrt{t}y$, 得

$$t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy = \int_{\Omega_{\delta\sqrt{t}}} e^{-tz(\frac{u}{\sqrt{t}}, \frac{v}{\sqrt{t}})} du dv.$$

由题 2 的展开, $z(x, y) = x^2 + xy + y^2 + o(x^2 + y^2)$, 故对固定 (u, v) ,

$$tz\left(\frac{u}{\sqrt{t}}, \frac{v}{\sqrt{t}}\right) = u^2 + uv + v^2 + o(1) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

且收敛在 $u^2 + v^2 \leq R^2$ 上一致。另一方面, 存在常数 $c > 0$ 、 $\rho > 0$, 当 $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ 时 $z(x, y) \geq c(x^2 + y^2)$ (正定二次型主导), 于是对 (u, v) 满足 $u^2 + v^2 \leq t\rho^2$ 的被积函数, 有

$$0 \leq e^{-tz(u/\sqrt{t}, v/\sqrt{t})} \leq e^{-c(u^2 + v^2)}.$$

对固定的 R , 先取极限 (一致收敛):

$$\int_{u^2 + v^2 \leq R^2} e^{-tz(u/\sqrt{t}, v/\sqrt{t})} du dv \longrightarrow \int_{u^2 + v^2 \leq R^2} e^{-(u^2 + uv + v^2)} du dv \quad (t \rightarrow \infty),$$

再令 $R \rightarrow \infty$ (由 $e^{-c(u^2 + v^2)}$ 控制, 尾项一致趋于 0), 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2 + uv + v^2)} du dv.$$

计算该 Gaussian 积分: 二次型 $u^2 + uv + v^2$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = \frac{3}{4}$, 故

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2 + uv + v^2)} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{|A|}} = \frac{\pi}{\sqrt{3/4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

所以极限存在且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

4. (20 分) 设 A 是一个 2 阶复方阵, 考虑 2 阶复方阵的线性空间 $M_2(\mathbb{C})$ 上的线性变换

$$\varphi_A : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto AX - XA.$$

试确定 $\dim \ker \varphi_A$ 的所有可能的取值。

解答 $\ker \varphi_A = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : AX = XA\}$ 是 A 的中心化子。按 A 的 Jordan 标准形分三种情况 ($\mathbb{C}$ 上二阶方阵的 Jordan 形只有这三类):

- $A = \lambda I$ (纯量矩阵): 任何 X 都与 A 交换, $\ker \varphi_A = M_2(\mathbb{C})$, $\dim = 4$;
- $A \sim \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: 与 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 交换的矩阵恰为对角矩阵 (由 $AX = XA$ 比较各元素即得), $\dim = 2$;
- $A \sim J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$: 设 X 与 $J_2(\lambda)$ 交换, 由

$$J_2(\lambda)X = XJ_2(\lambda)$$

直接解得 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN$ ($N = J_2(0)$), 即中心化子为 $\{aI + bN\}$, $\dim = 2$ 。



故 $\dim \ker \varphi_A$ 的所有可能取值为

2, 4.

□

5. (30 分) 对于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的两个 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

试证明两者是相似的, 并求出一个矩阵 T , 使得 $A = T^{-1}BT$ 。

解答 先证相似。 A 仅第一行为 $(0, 1, \dots, 1)$, 其余行为零, 故 $A^2 = O$, $\text{rank } A = 1$, $A \neq O$ 。同理 $B^2 = O$, $\text{rank } B = 1$, $B \neq O$ 。幂零矩阵的 Jordan 标准形由秩完全确定: 秩为 1 且平方为零的 n 阶幂零矩阵的 Jordan 形为

$$J = J_2(0) \oplus 0_{n-2} = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right).$$

故 $A \sim J$, $B \sim J$, 从而 $A \sim B$ (且在 $\mathbb{Q}$ 上相似, 因为两者的有理标准形均为 $x^2 \oplus x \oplus \cdots \oplus x$ 所对应的矩阵)。

再构造 T ($A = T^{-1}BT \iff AT = TB$)。设 Q 为 $(n-1)$ 阶循环差分矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

(Q 的每行每列之和均为 0)。取

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

即 $T_{11} = 1$, $T_{1j} = 1$ ($j \geq 2$), $T_{i1} = 1$ ($i \geq 2$), 右下角 $n-1$ 阶块为 Q 。验证 $AT = TB$:

AT 仅第一行非零, 第一行为 $(0, 1, \dots, 1)T = T$ 的第 2 至 n 行之和。第 2 至 n 行的第一列之和为 $n-1$, 其余各列之和为 Q 的列和 $= 0$, 故 AT 的第一行为 $(n-1, 0, \dots, 0)$ 。

TB 仅第一列非零, 第一列为 $T(0, 1, \dots, 1)^T = T$ 的第 2 至 n 列之和。第一行为 $T_{12} + \cdots + T_{1n} = n-1$, 第 2 至 n 行为 Q 的行和 $= 0$ 。故 TB 的第一列为 $(n-1, 0, \dots, 0)^T$ 。

所以 $AT = TB$ 。再验证 T 可逆: 按第一行展开, $|T| = 0 \cdot |Q| - \mathbf{1}^T \text{adj}(Q) \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ 为 $(n-1)$ 维全 1 列向量)。因 Q 的秩为 $n-2$ 且 $Q\mathbf{1} = 0$, $\text{adj}(Q)$ 是 $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ 的倍数 ($\text{adj}(Q) = c\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, c 为 Q 的 $(n-2)$ 阶主子式, 等于 ± 1), 故

$$|T| = -c(n-1)^2 \neq 0.$$

因此 T 可逆, 且 $A = T^{-1}BT$ 。

□



6. (20 分) $\mathbb{R}[x]$ 中多项式 $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ 。试用系数 a_1, a_2, a_3, a_4 的关系式, 给出 $f(x)$ 能表示成某个不可约二次多项式 $g(x)$ 之平方的充分必要条件。

解答 设 $f = g^2$, 其中 $g(x) = x^2 + px + q$ ($\mathbb{R}$ 上不可约二次多项式均可写成此形)。展开:

$$f = (x^2 + px + q)^2 = x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2,$$

故

$$a_1 = 2p, \quad a_2 = p^2 + 2q, \quad a_3 = 2pq, \quad a_4 = q^2.$$

而 g 在 $\mathbb{R}$ 上不可约当且仅当其判别式 $p^2 - 4q < 0$ 。

分两种情况消去 p, q :

情形一: $a_1 \neq 0$ 。此时 $p = \frac{a_1}{2}$, $q = \frac{a_3}{a_1}$ 。充要条件为

$$a_1^2 a_4 = a_3^2, \quad a_2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{2a_3}{a_1},$$

且不可约性条件

$$p^2 - 4q < 0 \iff \frac{a_1^2}{4} - \frac{4a_3}{a_1} < 0 \iff a_1(a_1^3 - 16a_3) < 0.$$

情形二: $a_1 = 0$ 。此时 $p = 0$, $a_3 = 2pq = 0$, $f = (x^2 + q)^2$ 。充要条件为

$$a_3 = 0, \quad a_2 = 2q, \quad a_4 = q^2 = \frac{a_2^2}{4},$$

且 $x^2 + q$ 不可约当且仅当 $q > 0$, 即

$$a_2 > 0.$$

综上, f 可表示成不可约二次多项式之平方的充要条件是: 或 $a_1 \neq 0$ 且

$$a_1^2 a_4 = a_3^2, \quad a_2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{2a_3}{a_1}, \quad a_1(a_1^3 - 16a_3) < 0;$$

或 $a_1 = a_3 = 0$ 且

$$a_4 = \frac{a_2^2}{4}, \quad a_2 > 0.$$

□

7. (30 分) 欧氏平面上限定向的等距变换群的一个子群 G , 其中每一个非恒同的变换 g 都没有不动点, 而且每一个平面上的点 p 在群 G 作用下得到的轨道 (即点集 $\{g(p) \mid g \in G\}$) 在平面上都没有聚点。试证明 G 可以由一个或两个平移变换生成, 即

$$G = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{或} \quad G = \{n\alpha + m\beta \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, n, m 为任意整数, α, β 为线性无关的平移向量 (也表示其对应的平移变换)。 $n\alpha + m\beta$ 即对应线性组合所表示的平移。

解答 第一步: G 中每个元素都是平移。保定向等距变换是旋转或平移。非恒同的旋转有唯一的不动点 (旋转中心), 与 “非恒同变换无不动点” 矛盾, 故 G 中无非恒同旋转, 即 G 全由平移构成。

第二步: G (视为平移向量的加法群) 是 $\mathbb{R}^2$ 的离散子群。事实上若平移向量 $v_n \in G$, $v_n \rightarrow v$ 且 v_n 两两不同, 则对任一点 p , 轨道点 $p + v_n \rightarrow p + v$ 聚于 $p + v$, 与轨道无聚点矛盾。故 0 不是 G 的聚点, 从而 G 离散。

第三步: 分类离散子群。

若 $G = \{0\}$, 结论显然 (可取任意 α)。否则取 $G \setminus \{0\}$ 中范数最小的元素 α (因 G 离散, 该最小值可以达到)。



情形一： $G \subseteq \mathbb{R}\alpha$ 。对任意 $g = t\alpha \in G$ ，取 $n = [t]$ ，则 $(t-n)\alpha \in G$ 且 $0 \leq t-n < 1$ ，由 α 的最小性得 $t = n$ ，故 $G = \mathbb{Z}\alpha$ 。

情形二： $G \not\subseteq \mathbb{R}\alpha$ 。在 $G \setminus \mathbb{R}\alpha$ 中取到直线 $\mathbb{R}\alpha$ 的垂直距离（即 $\alpha^\perp$ 方向的分量长度）最小的元素 β （离散性保证其存在）。断言 $G = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$ 。任取 $g \in G$ ，写 $g = x\alpha + y\beta$ ($x, y \in \mathbb{R}$)，取整数 n, m 使 $|x-n| \leq \frac{1}{2}$ ， $|y-m| \leq \frac{1}{2}$ ，令 $g' = g - n\alpha - m\beta \in G$ 。若 $g' \neq 0$ ：当 $y-m=0$ 时， $g' = (x-n)\alpha$ 是 G 中非零元素而 $|g'| \leq \frac{1}{2}|\alpha| < |\alpha|$ ，矛盾；当 $y-m \neq 0$ 时， $g' \in G \setminus \mathbb{R}\alpha$ ，而 g' 到 $\mathbb{R}\alpha$ 的垂直距离为 $|y-m| \cdot (\beta \text{ 到 } \mathbb{R}\alpha \text{ 的距离}) \leq \frac{1}{2} \cdot (\beta \text{ 到 } \mathbb{R}\alpha \text{ 的距离})$ ，与 β 的最小性矛盾。故 $g' = 0$ ，即 $g \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ ，所以 $G = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$ ，且 α, β 线性无关。

证毕。

□



北京大学数学科学学院
2017 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (1) (10 分) 证明隐函数 $y + \sin(xy) - x = 0$ 在 $x = 0$ 附近可以确定一个函数关系 $y = f(x)$ 。
- (2) (5 分) 试简单回答这个函数的光滑度（不必证明）。
- (3) (10 分) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的三阶导数 $f'''(0)$ 。

解答 (1) 设 $F(x, y) = y + \sin(xy) - x$ ，则 $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ， $F(0, 0) = 0$ ，且

$$F_y(x, y) = 1 + x \cos(xy), \quad F_y(0, 0) = 1 \neq 0.$$

由隐函数存在定理，存在 0 的邻域 I 与 0 的邻域 J ，使对每个 $x \in I$ ，方程在 J 内有唯一解 $y = f(x)$ ，且 $f \in C^1$ ， $f(0) = 0$ 。

(2) 因 $F \in C^\infty$ 且 $F_y \neq 0$ （在 $(0, 0)$ 附近），由隐函数定理的递归求导， f 也是 C^∞ （无穷次可微）函数。

(3) 对 $F(x, f(x)) = 0$ 逐次求导。记 $f(0) = 0$ 。一阶：

$$f' + \cos(xf)(f + xf') - 1 = 0.$$

令 $x = 0$ ： $f'(0) + 1 \cdot (0 + 0) - 1 = 0 \implies f'(0) = 1$ 。

二阶：

$$f'' - \sin(xf)(f + xf')^2 + \cos(xf)(2f' + xf'') = 0.$$

令 $x = 0$ ： $f''(0) - 0 + 1 \cdot (2f'(0) + 0) = 0 \implies f''(0) = -2$ 。

三阶（对二阶式再求导）：

$$\begin{aligned} 0 = f''' - \cos(xf)(f + xf')^3 - 2\sin(xf)(f + xf')(2f' + xf'') \\ - \sin(xf)(f + xf')(2f' + xf'') + \cos(xf)(3f'' + xf'''). \end{aligned}$$

令 $x = 0$ （注意 $f(0) = 0$ ， $f + xf'$ 在 0 处为 0）：

$$0 = f'''(0) + 1 \cdot (3f''(0) + 0) = f'''(0) - 6 \implies f'''(0) = 6.$$

（亦可用级数验证： $f = x - x^2 + x^3 + \dots$ ，故 $f'''(0) = 6$ 。）

□

2. (1) (10 分) 叙述积分第一中值定理，并给出一个几何解释。
- (2) (10 分) 叙述一个函数 $g(x) = 1$ ，另一个函数 $f(x)$ 单调时的积分第二中值定理（三种情况），并给出一个几何解释。
- (3) (5 分) 请问 (2) 中的函数 $f(x)$ 的单调性是实质性条件还是技术性条件（自由畅谈）。如果是实质性的，那么本质是什么？如果是技术性的，在哪方面提供了哪些方便？

解答 (1) **积分第一中值定理**：设 $f \in C[a, b]$ ， g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积且不变号（如 $g \geq 0$ ），则存在 $\xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

特别地 ($g \equiv 1$)：存在 $\xi \in [a, b]$ 使 $\int_a^b f = f(\xi)(b - a)$ 。

几何解释：曲边梯形（ $y = f$ 与 x 轴、 $x = a$ 、 $x = b$ 围成的图形）的面积等于某个高为 $f(\xi)$ 、底为 $[a, b]$ 的矩形面积，即曲边梯形与某个“平均高度”的矩形等积。



(2) **积分第二中值定理** ($g = 1$ 的特例即通常形式): 设 f 在 $[a, b]$ 上单调, g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

三种常见情况:

- f 单调递减且 $f(b) \geq 0$: 存在 ξ 使 $\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g$;
- f 单调递增且 $f(a) \geq 0$: 存在 ξ 使 $\int_a^b fg = f(b) \int_\xi^b g$;
- f 任意单调: $\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g$ 。

当 $g \equiv 1$ 时:

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi),$$

几何解释: 单调函数 f 的曲边梯形面积等于一个“两级台阶”图形的面积——前段用高 $f(a)$ 的矩形、后段用高 $f(b)$ 的矩形, 分割点 ξ 由中值定理保证。

(3) 我认为单调性是**实质性的**, 但其真正本质是“**有界变差**”。第二中值定理的标准证法是 Abel 变换 (分部积分) 加第一中值定理: 令 $G(x) = \int_a^x g$, 则

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) - \int_a^b G df.$$

当 f 单调时, df 是 (不变号的) Stieltjes 测度, 第一中值定理可直接应用, 故单调性“技术上”保证了 $\int G df$ 可被 f 的全变差 $|f(b) - f(a)|$ 控制。因此: 单调 $\implies$ 有界变差 $\implies$ 定理成立。在这个意义上, 单调性可放宽为有界变差, 故它是“技术性”的; 但它不是可有可无的——若无任何变差控制 (例如 f 仅在 L^1 意义下可积而剧烈振荡), 则不存在这样的 ξ , 定理整体失效。所以本质是: f 作为权函数, 其“总变化量” (全变差) 有限, 使加权平均能取到 f 端点值之间的某个组合。□

3. (25 分) 在考虑函数 $f(x)$ 在给定区间上的傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 的收敛时, $f(x)$ 的光滑性与级数的收敛速度之间有没有一定的关系? 请给出一个你自己的理解和描述。

解答 有明确且定量的关系: **函数越光滑, 其 Fourier 系数衰减越快, 级数收敛越快。**

设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上以 2π 为周期, 系数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

若 $f \in C^k$ ($k \geq 1$) 且 $f^{(j)}$ ($j \leq k$) 都是周期函数 (即 $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$), 对 a_n 作 k 次分部积分 (边界项因周期性相消):

$$a_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) (\cos \text{ 或 } \sin)(nx) dx,$$

故

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{C_k}{n^k} \|f^{(k)}\|_{L^1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

因此:

- f 仅连续 (甚至可积): $a_n, b_n \rightarrow 0$ (Riemann–Lebesgue 引理), 衰减速度无保证, 一般 $O(1/n)$ 都达不到; 若 f 有第一类间断, 系数仅为 $O(1/n)$, 且出现 Gibbs 现象;
- $f \in C^k$ 且周期匹配: $a_n, b_n = O(n^{-k})$;
- $f^{(k)}$ 还满足有界变差时: $a_n, b_n = O(n^{-(k+1)})$;



- $f \in C^\infty$: 系数比任何 n^{-k} 衰减都快, 级数在任意阶导数意义下都绝对一致收敛。

更进一步, 光滑性 (Sobolev 意义下的导数平方可积性) 等价于系数序列的加权平方可和性: $f \in H^s \iff \sum n^{2s}(|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$ 。这给出了光滑性与收敛速度关系的精确刻画。

本质原因: 光滑性意味着高频分量 (n 大) 必须很小——快速振荡的三角函数与光滑函数的积分因“正负相消”而变小; 反之, 奇性 (间断、尖点) 必然包含大量的高频成分, 从而减慢收敛并引起 Gibbs 现象。一句话: 光滑性决定高频能量的衰减速率, 从而决定 Fourier 级数的收敛速度。□

4. (1) (10 分) 试讨论广义积分 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ 的收敛性。
- (2) (10 分) 试讨论广义重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$, 其中 $D = \mathbb{R} \times [0, 1]$ 的敛散性。
- (3) (5 分) 请对上述结论给出一个你认为合理且本质的解释。

解答 (1) 在 0 点附近 $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, 无奇性; 在无穷远处, 由 Dirichlet 判别法 ($\sin x$ 的原函数 $\cos x$ 有界, $\frac{1}{x} \downarrow 0$), $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛; 同理 $\int_{-\infty}^0$ 条件收敛。故 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 且

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (\text{Dirichlet 积分}).$$

但它不绝对收敛: $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$ ($\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$, 而 $\int \frac{\cos 2x}{2x}$ 收敛、 $\int \frac{1}{2x}$ 发散)。

(2) 广义重积分收敛, 且值为 π 。因被积函数与 y 无关:

$$\iint_{D_R} \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx \right) dy = \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \pi \quad (R \rightarrow \infty),$$

其中 $D_R = [-R, R] \times [0, 1]$ 。所以 (按矩形截断的广义重积分意义下) 收敛于 π 。它同样不绝对收敛 ($|\sin x|/x$ 对 x 不可积)。

(3) 本质解释: 重积分情形下, 条件收敛之所以能发生, 是因为沿 x 方向的正负振荡相互抵消, 而 y 方向是平凡 (有界区间、被积函数与 y 无关) 的。它与一元情形 “同源”: $\frac{\sin x}{x}$ 的符号振荡提供抵消机制, 使矩形截断极限存在; 但这种抵消依赖于截断的对称方式, 这正是绝对可积性缺失的表现。绝对可积 (Lebesgue 可积) 才保证积分值与截断方式、积分次序无关 (Fubini/Tonelli), 而条件收敛时 “值” 是脆弱的——对更一般的穷竭序列, 广义二重积分可能不存在或取不同值。因此, 绝对可积是使重积分 “真正良定义” 的实质条件。□

5. (20 分) 求集合 $\{A \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R}) : A^3 = 0\}$ 中矩阵的秩的最大值。

解答 设 A 幂零 ($A^3 = 0$), 其 Jordan 标准形由 Jordan 块 $J_{k_i}(0)$ 组成, 且每个块的阶数 $k_i \leq 3$ 。熟知幂零 Jordan 块 $J_k(0)$ 的秩为 $k-1$, 故

$$\text{rank } A = \sum_i (k_i - 1) = 7 - (\text{Jordan 块的个数}).$$

在约束 $\sum_i k_i = 7, 1 \leq k_i \leq 3$ 下, 要最大化 $\sum (k_i - 1)$, 即最小化块的个数。 $7 = 3 + 3 + 1$ (3 块) 已是块数最少 (因每块阶数 ≤ 3)。此时

$$\text{rank } A = (3-1) + (3-1) + (1-1) = 4.$$

例如

$$A = J_3(0) \oplus J_3(0) \oplus J_1(0) \in M_7(\mathbb{R})$$



满足 $A^3 = 0$ 且秩为 4。故最大值为

$$\max\{\text{rank } A : A^3 = 0\} = 4.$$

□

6. (30 分) 设 V 是有限维实内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in V$ 。假设存在非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \alpha, \alpha_i \rangle \beta_i = 0$ 。证明存在非零向量 $\beta \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \beta, \beta_i \rangle \alpha_i = 0$ 。

解答 定义线性变换

$$T: V \rightarrow V, \quad T(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, \alpha_i \rangle \beta_i,$$

则题设即 $\alpha \in \ker T$, $\alpha \neq 0$ 。计算 T 的伴随:

$$\langle Tx, y \rangle = \sum_{i=1}^r \langle x, \alpha_i \rangle \langle \beta_i, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^r \langle y, \beta_i \rangle \alpha_i \right\rangle,$$

故

$$T^*(y) = \sum_{i=1}^r \langle y, \beta_i \rangle \alpha_i.$$

要证的是存在 $0 \neq \beta \in V$ 使 $T^*(\beta) = 0$, 即 $\ker T^* \neq \{0\}$ 。

由 $\ker T \neq \{0\}$ 及

$$\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$$

(线性代数基本恒等式), 知 $\text{Im } T^* \subsetneq V$ 。故存在 $0 \neq \beta \in V$ 使 $\beta \perp \text{Im } T^*$, 从而

$$\|T^*\beta\|^2 = \langle T^*\beta, T^*\beta \rangle = \langle \beta, T(T^*\beta) \rangle = 0$$

(因 $T(T^*\beta) \in \text{Im } T^* \perp \beta$), 即 $T^*(\beta) = 0$ 。所以

$$\sum_{i=1}^r \langle \beta, \beta_i \rangle \alpha_i = T^*(\beta) = 0,$$

且 $\beta \neq 0$ 。证毕。

□

7. (20 分) 证明: 对任意 3×3 复矩阵, 存在 3×3 酉矩阵 U , 使得 UAU^{-1} 为形如

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

的矩阵。

解答 取 A 的一个单位特征向量 u_3 (特征值 μ), 并把它扩充为酉矩阵 $U = (u_1, u_2, u_3)$ 的第三列。此时

$$U^*AU = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

(第三列为 $U^*Au_3 = \mu U^*u_3 = (0, 0, \mu)^T$; 第三行第 1, 2 个元素为 $\langle u_3, Au_j \rangle = \langle A^*u_3, u_j \rangle = \langle \bar{\mu}u_3, u_j \rangle = 0$)。

记左上角 2×2 块 (即 A 在 $u_3^\perp$ 上的压缩) 为 C , 它是 2 阶复矩阵, 必有特征向量。取 C 的单位特征向量作为 u_2 (在 $u_3^\perp$ 内), 再取 u_1 为 $u_3^\perp$ 中与 u_2 正交的单位向量。以 (u_1, u_2, u_3) 为列构造酉矩阵 U 。此时在 $u_3^\perp$ 的基 $\{u_1, u_2\}$ 下, C 的第 (1, 2) 个元素为

$$\langle u_1, Cu_2 \rangle = \langle u_1, \nu u_2 \rangle = 0$$



(ν 为 u_2 对应的特征值)。这恰是 U^*AU 的 $(1, 2)$ 元。于是

$$U^*AU = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

其零元集合包含 $(1, 2), (2, 3), (3, 2)$ 位置 (还含 $(1, 3), (3, 1)$)，当然是题中所要求的形式

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

证毕。 □

8. (30 分) 对于空间仿射坐标系中的马鞍面 $S: z = xy$ ，记 G 为所有保持 S 作为点集不变的空间仿射变换构成的群。试决定空间中所有这样的直线 L ，使得对于任意的 G 中变换 g ，直线 $g(L)$ 都与 L 平行或重合。

解答 先确定 G 的结构。设 $g(x, y, z) = M(x, y, z)^T + t \in G$ ，其中 $M = (m_{ij})$ 可逆， $t = (t_1, t_2, t_3)$ 。在 S 上 $z = xy$ ，将 $z = xy$ 代入 $(g)_1(g)_2 - (g)_3$ ，得到关于 (x, y) 恒为零的多项式：

$$(m_{11}x + m_{12}y + m_{13}xy + t_1)(m_{21}x + m_{22}y + m_{23}xy + t_2) - (m_{31}x + m_{32}y + m_{33}xy + t_3) \equiv 0.$$

比较各项系数：

$$\text{常数项: } t_1t_2 - t_3 = 0;$$

$$x \text{ 项: } m_{11}t_2 + m_{21}t_1 - m_{31} = 0; \quad y \text{ 项: } m_{12}t_2 + m_{22}t_1 - m_{32} = 0;$$

$$x^2: m_{11}m_{21} = 0; \quad y^2: m_{12}m_{22} = 0; \quad x^2y^2: m_{13}m_{23} = 0;$$

$$x^2y: m_{11}m_{23} + m_{13}m_{21} = 0; \quad xy^2: m_{12}m_{23} + m_{13}m_{22} = 0;$$

$$xy: m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} + m_{13}t_2 + m_{23}t_1 - m_{33} = 0.$$

由 $m_{11}m_{21} = m_{12}m_{22} = 0$ 及 M 可逆，分两种情形：

- $m_{11}m_{22} \neq 0$ (此时 $m_{12} = m_{21} = 0$)：由 x^2y 得 $m_{23} = 0$ ，由 xy^2 得 $m_{13} = 0$ ，再由 x 、 y 项得 $m_{31} = m_{11}t_2$ ， $m_{32} = m_{22}t_1$ ，且 $m_{33} = m_{11}m_{22}$ 。于是

$$g(x, y, z) = (ax + t_1, by + t_2, abz + at_2x + bt_1y + t_1t_2), \quad a, b \neq 0;$$

- $m_{12}m_{21} \neq 0$ (此时 $m_{11} = m_{22} = 0$)：由 x^2y 、 xy^2 得 $m_{13} = m_{23} = 0$ ，同理

$$g(x, y, z) = (ay + t_1, bx + t_2, abz + at_2y + bt_1x + t_1t_2),$$

即第一种形式再复合交换 x, y 的变换。

(由系数方程直接可验证上述映射确实把 S 映为自身，且 $t_3 = t_1t_2$ 等条件已自动满足。)

现在确定满足条件的直线。首先， G 包含所有纯伸缩

$$g_{a,b}(x, y, z) = (ax, by, abz), \quad a, b \neq 0.$$

若直线 L 对一切 $g \in G$ 满足 $g(L) \parallel L$ ，则特别地对一切 $g_{a,b}$ 成立。设 L 的方向向量为 $d = (d_1, d_2, d_3)$ ，其像的方向为 (ad_1, bd_2, abd_3) ，要求对一切 $a, b \neq 0$ 有

$$(ad_1, bd_2, abd_3) \parallel (d_1, d_2, d_3).$$



若 $d_1 \neq 0$, 则比例系数必为 a , 令 a 变动即得矛盾; 同理 $d_2 \neq 0$ 亦矛盾。故 $d_1 = d_2 = 0$, 即 L 的方向必为 $(0, 0, 1)$ (与 z 轴平行)。

反之, 任何与 z 轴平行的直线 $L = \{(x_0, y_0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 都满足要求: 由上面求出的 G 的结构, $g \in G$ 的线性部分的第三列为 $(0, 0, ab)^T$, 故 g 把方向 $(0, 0, 1)$ 映为 $(0, 0, ab)$, $g(L)$ 仍是竖直线 (过 $(ax_0 + t_1, by_0 + t_2, \cdot)$), 与 L 平行。

综上, 满足条件的直线恰为与 z 轴平行的所有直线。

□



北京大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (20 分) 设 $a > 0$, $a_1 = a$, $a_2 = a^a$, $a_3 = a^{a^a}$, $\dots$, $a_{n+1} = a^{a^n}$, $\dots$, 集合 $S = \{a \mid \text{序列}\{a_n\} \text{ 极限存在}\}$ 。

(1) 证明 S 有上界。

(2) 求 S 的上确界。

解答 序列的递推关系为 $a_{n+1} = a^{a^n}$ (幂塔)。

(1) 设 $a \in S$, $\{a_n\}$ 收敛于 L 。由递推式两边取极限得 $L = a^L$, 故 $a = L^{1/L}$ 。因 $a_n > 0$ 恒成立, 故 $L > 0$ 。考查函数

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}, \quad x > 0, \\ \varphi'(x) &= \varphi(x) \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2},\end{aligned}$$

故 φ 在 $(0, e)$ 上递增、在 $(e, +\infty)$ 上递减, 最大值

$$\max_{x>0} x^{1/x} = \varphi(e) = e^{1/e}.$$

于是 $a = L^{1/L} \leq e^{1/e}$, 即 $S \subseteq (0, e^{1/e}]$, S 有上界。

(2) 证明 $e^{1/e} \in S$, 从而 $\sup S = e^{1/e}$ 。取 $a = e^{1/e} \in (1, e)$ 。先证 $\{a_n\}$ 单调递增: $a_1 = a$, $a_2 = a^a > a^1 = a$ ($a > 1$); 若 $a_n > a_{n-1}$, 则 $a_{n+1} = a^{a^n} > a^{a^{n-1}} = a_n$ 。再证 $\{a_n\}$ 有上界 e : $a_1 = a < e$; 若 $a_n \leq e$, 则 $a_{n+1} = a^{a^n} \leq (e^{1/e})^e = e$ 。故 $a_n \uparrow L \leq e$, 且 L 满足 $L = e^{L/e}$, 即 $\frac{\ln L}{L} = \frac{1}{e}$, 而函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e]$ 上严格递增 (只在 $x = e$ 处等于 $\frac{1}{e}$), 故 $L = e$ 。所以 $e^{1/e} \in S$ 。

因此 $\sup S = e^{1/e}$ 。(事实上可证 $S = [e^{-e}, e^{1/e}]$: 对 $1 < a \leq e^{1/e}$ 由上面的单调性论证知 $\{a_n\}$ 收敛; 对 $0 < a < 1$, 不动点 $L = a^L \in (a, 1)$, $a = L^{1/L}$, 幂塔收敛当且仅当 $|(a^x)'|_{x=L}| = |L \ln a| = |\ln L| < 1$, 即 $L > e^{-1}$, 等价于 $a = L^{1/L} \geq (e^{-1})^e = e^{-e}$ 。)

2. (共 20 分, 每小题 10 分)

(1) 设 $y = \arctan \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(2) 求定积分 $\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$ 。

解答 (1) 记 $u = \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$, 则 $y' = \frac{u'}{1+u^2}$ 。计算:

$$\begin{aligned}u' &= \frac{(9x^2 - 3)(x^4 - 4x^2 + 1) - (3x^3 - 3x)(4x^3 - 8x)}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2} = \frac{-3(x^6 + x^4 + x^2 + 1)}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2}, \\ 1 + u^2 &= \frac{(x^4 - 4x^2 + 1)^2 + 9x^2(x^2 - 1)^2}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2} = \frac{x^8 + x^6 + x^2 + 1}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)(x^6 + 1)}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{1+u^2} = -\frac{3(x^6 + x^4 + x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^6 + 1)} = -\frac{3(x^4 + 1)}{x^6 + 1},$$

也可写成

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{1+x^2} - \frac{3x^2}{1+x^6}.$$



(注: 函数 u 在 $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ 处无定义, 在其每个连续区间上 $y = -\arctan x^3 - 3\arctan x + C$, 常数 C 在各区间可不同。)

(2) 先作部分分式分解:

$$\frac{1+x^4}{1+x^6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}.$$

(验证: 右端通分, 分子为 $\frac{2}{3}(x^4-x^2+1) + \frac{1}{3}(x^2+1)^2 = \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3} = x^4 + 1$ 。)

注意到

$$\frac{d}{dx} \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1+1/x^2}{1+(x-1/x)^2} = \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx &= \left[\frac{2}{3} \arctan x + \frac{1}{3} \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot 0 \right) - \left(0 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

3. (20 分) 试参照积分第二中值定理的表述, 给出第一类曲线积分的积分第二中值定理 (注意条件和结论表述的准确性), 并给出相应的证明。

解答 定理 (第一类曲线积分的积分第二中值定理): 设 Γ 是 (分段) 光滑的可求长曲线, 以弧长 s 为参数, $\Gamma: \mathbf{r}(s)$, $0 \leq s \leq L$, 起点 $A = \mathbf{r}(0)$, 终点 $B = \mathbf{r}(L)$ 。设 f 是定义在 Γ 上的函数, 且 $f(\mathbf{r}(s))$ 关于弧长参数 s 单调; g 在 Γ 上连续。则存在 $\xi \in \Gamma$ (把 Γ 分成从 A 到 ξ 与从 ξ 到 B 两段 Γ_1, Γ_2), 使得

$$\int_{\Gamma} f g ds = f(A) \int_{\Gamma_1} g ds + f(B) \int_{\Gamma_2} g ds,$$

即

$$\int_0^L f(\mathbf{r}(s))g(\mathbf{r}(s)) ds = f(\mathbf{r}(0)) \int_0^{s_0} g(\mathbf{r}(s)) ds + f(\mathbf{r}(L)) \int_{s_0}^L g(\mathbf{r}(s)) ds,$$

其中 $s_0 = s(\xi) \in [0, L]$ 。

特别地, 若 f 沿 Γ 单调递减且 $f \geq 0$, 则存在 $\xi \in \Gamma$ 使

$$\int_{\Gamma} f g ds = f(A) \int_{\Gamma_1} g ds;$$

若 f 沿 Γ 单调递增且 $f \geq 0$, 则

$$\int_{\Gamma} f g ds = f(B) \int_{\Gamma_2} g ds.$$

证明: 把 Γ 按弧长参数化后, 令 $F(s) = f(\mathbf{r}(s))$, $G(s) = g(\mathbf{r}(s))$, 则 F 在 $[0, L]$ 上单调, G 连续, 问题化为一元积分第二中值定理:

$$\int_0^L F(s)G(s) ds = F(0) \int_0^{s_0} G(s) ds + F(L) \int_{s_0}^L G(s) ds.$$

现补证一元情形。设 F 单调递减 (递增情形类似; 一般单调函数可写成 $F = F(b) + [F - F(b)]$ 用递减情形)。记 $H(s) = \int_0^s G(t) dt$, $H \in C^1[0, L]$ 。对 $[0, L]$ 作分割 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = L$, 由 Abel 求和公式,

$$\sum_{i=1}^m F(s_{i-1}) \int_{s_{i-1}}^{s_i} G = \sum_{i=1}^m F(s_{i-1})(H(s_i) - H(s_{i-1})) = F(s_{m-1})H(L) - \sum_{i=1}^{m-1} (F(s_i) - F(s_{i-1}))H(s_i).$$

因 $F \geq 0$ 递减, H 连续, 右端在分割加细时趋于

$$F(L)H(L) - \int_0^L H dF,$$



其中 dF 是单调函数产生的非正 Stieltjes 测度, 且

$$F(L)H(L) - \int_0^L H dF = F(L)H(L) + \int_0^L H d(-F),$$

对后一项用积分第一中值定理 ($d(-F) \geq 0, H$ 连续): 存在 $s_0 \in [0, L]$ 使 $\int_0^L H d(-F) = H(s_0) \int_0^L d(-F) = H(s_0)(F(0) - F(L))$ 。于是左端极限为

$$\int_0^L FG = F(L)H(L) + H(s_0)(F(0) - F(L)) = F(0) \int_0^{s_0} G + F(L) \int_{s_0}^L G,$$

(因 $H(0) = 0$)。这正是一元第二中值定理。取 $\xi = r(s_0)$ 即得曲线积分版本。 $\square$

4. (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆为整个实数轴上的连续函数, 其中 $g(x)$ 以 $T > 0$ 为周期。证明: 函数方程 $f(f(x)) = -x^3 + g(x)$ 不可能有连续解。

解答 反证: 设连续函数 f 满足 $f(f(x)) = -x^3 + g(x) =: h(x)$ 。因 g 连续周期, 设 $|g| \leq M$ 。则当 $|x|$ 充分大时 $h'(x) = -3x^2 + g'(x) < 0$ 且 $h(x) \rightarrow \mp\infty$ ($x \rightarrow \pm\infty$), 故 h 是满射, f 也满射。

取 R 充分大, 使 h 在 $[R, +\infty)$ 上严格递减。若 $R \leq a < b$ 而 $f(a) = f(b)$, 则 $h(a) = f(f(a)) = f(f(b)) = h(b)$, 与 h 在 $[R, \infty)$ 上严格递减矛盾, 故 f 在 $[R, +\infty)$ 上单射。连续单射必严格单调。

若 f 在 $[R, +\infty)$ 上递增: 则 $f(x) \uparrow L \in (-\infty, +\infty]$ ($x \rightarrow \infty$)。若 $L < +\infty$, 则 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow f(L-) = f(L)$ (连续性), 与 $h(x) \rightarrow -\infty$ 矛盾; 若 $L = +\infty$, 则 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow +\infty$, 亦矛盾。故 f 不递增, 只能严格递减。于是 $f(x) \downarrow L$ ($x \rightarrow \infty$)。若 $L > -\infty$, 则 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow f(L+) = f(L)$ 有限, 与 $h(x) \rightarrow -\infty$ 矛盾; 故 $L = -\infty$, 即 $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow +\infty$)。又 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \infty$) 且 $f(x) \rightarrow -\infty$, 说明 $f(y) \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow -\infty$)。于是 f 在 $\mathbb{R}$ 上上有界, 设 $f \leq M_0$ 。但 $h(x) = f(f(x)) \leq M_0$ 对一切 x 成立, 而

$$h(x) = -x^3 + g(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow -\infty),$$

矛盾。故不存在这样的连续函数 f 。证毕。 $\square$

5. (20 分) 在单位圆盘 D 内, $u = \Delta u$, $u|_{\partial D} = 0$ 。证明: $u \equiv 0$ 。

解答 设 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 满足 $\Delta u = u$ 于 D , $u|_{\partial D} = 0$ 。方程两边乘以 u 并在 D 上积分:

$$\int_D u^2 dx dy = \int_D u \Delta u dx dy.$$

由 Green 第一恒等式,

$$\int_D u \Delta u + \int_D |\nabla u|^2 = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

(边界上 $u = 0$)。故

$$\int_D u^2 = - \int_D |\nabla u|^2 \leq 0.$$

又 $\int_D u^2 \geq 0$, 故 $\int_D u^2 = 0$, 从而 (u 连续) $u \equiv 0$ 于 D 。 $\square$

6. (15 分) 设 a_0, a_1, a_2 为有理数, 且

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 + a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

证明: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。



解答 直接展开行列式 (Sarrus 法则) 得

$$D := a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 + 2a_0^2a_1 + a_0a_1^2 - a_1^2a_2 - a_0a_2^2 - 3a_0a_1a_2.$$

关键是模 2 同余: 因 $x^3 \equiv x$, $x^2 \equiv x \pmod{2}$, $2a_0^2a_1 \equiv 0$, $-y \equiv y \pmod{2}$, 故

$$\begin{aligned} D &\equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_0a_1 + a_1a_2 + a_0a_2 + a_0a_1a_2 \\ &\equiv (1 + a_0)(1 + a_1)(1 + a_2) - 1 \pmod{2}, \end{aligned}$$

即

$$D \equiv 1 - (1 + a_0)(1 + a_1)(1 + a_2) \pmod{2}.$$

若 $D = 0$, 则 $(1 + a_0)(1 + a_1)(1 + a_2) \equiv 1 \pmod{2}$, 故 $1 + a_i \equiv 1 \pmod{2}$, 即 a_0, a_1, a_2 都是偶数。

先证整数情形的结论 (无穷递降): 设 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ 满足 $D = 0$, 由上知 $a_i = 2b_i$ ($b_i \in \mathbb{Z}$)。因 D 是三次齐次多项式, $D(a_0, a_1, a_2) = 8D(b_0, b_1, b_2) = 0$, 故 b_0, b_1, b_2 又是一组整数解。如此反复, a_i 可被任意大的 2^k 整除, 只能 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。

对有理数情形: 设 $a_i = \frac{m_i}{d}$ ($d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为公分母), 则 $D(m_0, m_1, m_2) = d^3 D(a_0, a_1, a_2) = 0$, 由整数情形得 $m_0 = m_1 = m_2 = 0$, 故 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。证毕。 $\square$

7. (25 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$ 。

(1) (5 分) 将 f 写成 $x^T Ax$ 的形式, 求实对称矩阵 A 的特征向量与特征值。

(2) (10 分) 求正交矩阵 P 和对角矩阵 D , 使得 $A = PDP^T$ 。

(3) (10 分) 求二次型 $f(x) = x^T Ax$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上取到的最大值, 并确定在何处取到最大值。

解答 (1) 由二次型的对称化规则 ($x_i x_j$ 项系数一半分给 a_{ij}, a_{ji}):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = x^T Ax.$$

求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -2 & \lambda - 3 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

故特征值为 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 。

$\lambda = 5$: 解 $(5I - A)v = 0$ 得特征向量 $v_1 = (1, 2, -1)$ 。

$\lambda = -1$: 解 $(-I - A)v = 0$, 即 $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, 特征子空间为二维。取两个互相正交的向量:

$$v_2 = (2, -1, 0), \quad v_3 = (1, 2, 5)$$

(验证: $v_2 \cdot v_3 = 2 - 2 + 0 = 0$, 且 $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = 0$)。

(2) 单位化:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 5).$$

令

$$P = (e_1, e_2, e_3), \quad D = \text{diag}(5, -1, -1),$$

则 P 为正交矩阵且

$$A = PDP^T.$$



(3) 由 Rayleigh 商, 对 $\|x\| = 1$,

$$f(x) = x^T A x = \lambda_{\max} = 5 \text{ 的上界, } f(x) \leq 5,$$

等号当且仅当 x 是对应于最大特征值 5 的单位特征向量, 即

$$x = \pm e_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1).$$

故最大值为 5, 在 $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ 处取得。 □

8. (20 分) 设矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数均为 n , 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(AB) + n$$

当且仅当 $\text{Ker } A \subseteq \text{Im } B$ 。

解答 (设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times p$ 矩阵。) 先证基本恒等式: 对任意矩阵 X, Y (X 的列数 = Y 的行数),

$$\text{rank}(XY) = \text{rank } Y - \dim(\text{ker } X \cap \text{Im } Y).$$

(由核像维数公式: $\text{rank}(XY) = \dim X(\text{Im } Y) = \dim \text{Im } Y - \dim(\text{ker } X \cap \text{Im } Y)$ 。) 取 $X = A, Y = B$:

$$\text{rank}(AB) = \text{rank } B - \dim(\text{ker } A \cap \text{Im } B).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(AB) + n &\iff \text{rank } A = n - \dim(\text{ker } A \cap \text{Im } B) \\ &\iff \dim(\text{ker } A \cap \text{Im } B) = n - \text{rank } A = \dim \text{ker } A. \end{aligned}$$

因 $\text{ker } A \cap \text{Im } B \subseteq \text{ker } A$, 维数相等且包含成立等价于

$$\text{ker } A \cap \text{Im } B = \text{ker } A \iff \text{ker } A \subseteq \text{Im } B.$$

证毕。 □

9. (10 分) 设 A 为 $M_n(\mathbb{C})$ 中的幂零矩阵, 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $T_A: B \mapsto AB - BA$ 。证明: 若 $(T_A)^2 B = 0$, 则 AB 是幂零矩阵。

解答 设 $A^n = 0, C = [A, B] = AB - BA = T_A(B)$, 则 $(T_A)^2 B = [A, C] = 0$, 即 $AC = CA$ 。

第一步 (Leibniz 恒等式): 对一切 $k \geq 0$,

$$A^k B = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} T_A^i(B) A^{k-i}.$$

证明: $k = 0, 1$ 显然 ($A^0 B = B; AB = BA + C = T_A(B)A^0 + BA$)。若对 k 成立, 则 (用 $AT_A^i(B) = T_A^{i+1}(B) + T_A^i(B)A$)

$$\begin{aligned} A^{k+1} B &= A A^k B = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A T_A^i(B) A^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (T_A^{i+1}(B) + T_A^i(B)A) A^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] T_A^i(B) A^{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} T_A^i(B) A^{k+1-i}. \end{aligned}$$



由 $T_A^2(B) = 0$, 得

$$A^k B = B A^k + k C A^{k-1} \quad (k \geq 1).$$

取 $k = n$: $A^n B = 0 = B A^n + n C A^{n-1}$, 故

$$C A^{n-1} = 0.$$

第二步 (归纳证明 $(AB)^{2n-1} = 0$)。对幂零指标归纳: $n = 1$ 时 $A = 0$, $AB = 0$, 成立。设结论对幂零指标 $\leq n-1$ 成立。若 $A^{n-1} = 0$, 则由归纳假设 (A 的幂零指标 $\leq n-1$) 得 $(AB)^{2n-3} = 0$, 从而 $(AB)^{2n-1} = (AB)^{2n-3}(AB)^2 = 0$ 。若 $A^{n-1} \neq 0$, 记 $V' = \text{Im } A^{n-1} \neq \{0\}$ 。由 $A^n = 0$ 知 $A(V') = 0$; 由 $C A^{n-1} = 0$ 知 $C(V') = 0$, 故对 $v' \in V'$:

$$AB v' = AB v' - B A v' = C v' = 0 \quad (\text{因 } A v' = 0).$$

在商空间 V/V' 上, $\bar{A}^{n-1} = 0$ ($A^{n-1}(V) \subseteq V'$), 且 $\bar{C} = [\bar{A}, \bar{B}]$ 、 $[\bar{A}, \bar{C}] = 0$ 仍成立, 由归纳假设 $(\bar{A}\bar{B})^{2n-3} = 0$, 即 $(AB)^{2n-3}(V) \subseteq V'$ 。于是对任意 $v \in V$,

$$(AB)^{2n-1} v = (AB)^2 (AB)^{2n-3} v = (AB)((AB)(AB)^{2n-3} v) = 0$$

(因 $(AB)^{2n-3} v \in V'$, 而 AB 在 V' 上为零)。故 $(AB)^{2n-1} = 0$, AB 幂零。证毕。 $\square$

10. (30 分) 定义在平面 $y = 0$ 上的圆 $C: (x-2)^2 + z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转成一环面 Γ 。

(1) 求环面 Γ 的一个参数方程。

(2) 环面 Γ 的正等测投影 (其在平面 $x + y + z = 0$ 上的垂直投影) 外周是否为椭圆?

解答 (1) 圆 C 上的点可写为 $(2 + \cos t, 0, \sin t)$ ($0 \leq t < 2\pi$)。绕 z 轴旋转角度 θ 后得

$$\mathbf{r}(t, \theta) = ((2 + \cos t) \cos \theta, (2 + \cos t) \sin \theta, \sin t), \quad 0 \leq t, \theta < 2\pi.$$

(消去参数得直角坐标方程 $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)$ 。)

(2) **不是椭圆**。先求正等测投影下的轮廓线。环面在 (t, θ) 处的法向量为

$$N = \mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta = -((2 + \cos t) \cos t \cos \theta, (2 + \cos t) \cos t \sin \theta, (2 + \cos t) \sin t),$$

轮廓 (外周) 条件是 N 与投影方向 $(1, 1, 1)$ 垂直:

$$\cos t (\cos \theta + \sin \theta) + \sin t = 0.$$

令 $s = \cos \theta + \sin \theta \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 则 $\sin t = -\cos t \cdot s$, 即 $\tan t = -s$, 故

$$\cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

取 $\cos t = +\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ (外周一支)。在平面 $x + y + z = 0$ 上取标准正交基 $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$, 则外周轮廓的参数方程为

$$u = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \cos t)(\cos \theta - \sin \theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)\sqrt{2-s^2},$$

$$v = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}[(2 + \cos t)s - 2 \sin t] = \frac{s}{\sqrt{6}}\left(2 + \frac{3}{\sqrt{1+s^2}}\right),$$

($s \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 其中用到 $(\cos \theta - \sin \theta)^2 = 2 - s^2$)。



反证其不是椭圆：若外周是椭圆，则其关于 u, v 轴均对称（环面关于 xOy 、 xOz 等坐标面对称），必形如 $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ 。它在 u 轴上的截距为 $u = \pm 3$ （ $s = 0$ 时），故 $a = 3$ ；在 v 轴上的截距为 $s = \sqrt{2}$ 时的 v 值

$$b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

但取 $s = 1$ （此时 $u^2 = \frac{(2 + 1/\sqrt{2})^2}{2}$, $v = \frac{2 + 3/\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ），代入验证：

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{b^2} = \frac{(2 + 1/\sqrt{2})^2}{18} + \frac{(2 + 3/\sqrt{2})^2}{6} \cdot \frac{3}{(2 + \sqrt{3})^2} \approx 0.4071 + 0.6097 = 1.0168 \neq 1,$$

矛盾。故外周**不是椭圆**（它是更高次的代数曲线）。 □