



南京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊 (25)



南京大学数学学院
2024 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 50 分)

1. 计算题。

$$\begin{aligned}(1) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right). \\(2) & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x. \\(3) & \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx. \\(4) & \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2 y^2)^{3/2}} dx dy.\end{aligned}$$

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 敛散性 (包括绝对收敛和条件收敛)。

3. 设有界函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足 $|f'(x)| < 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)。

(1) 证明: 方程 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一解 x_0 。

(2) 设初始值 $a_0 \in \mathbb{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 由递推关系 $a_n = f(a_{n-1})$ 生成, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ 。

4. 设函数 $f(x), g(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} f(x), g(x) \in C[0, 1]; \\ f(0) = 1, f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1. \end{cases}$$

证明: 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$ 。

高等代数 (满分 50 分)

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 \\ \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 & \cos 5 \\ \cos 5 & \cos 6 & \cos 7 & \cos 8 \\ \cos 9 & \cos 10 & \cos 11 & \cos 12 \end{vmatrix}$$

的值。

2. 设 $V = \mathbb{R}^n$ 为 n 维实向量空间, A 是 $n \times n$ 实对称矩阵, 其特征值按升序排列为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. 设 W 是 V 的任意 k 维子空间, 证明: 存在单位向量 $x \in W$, 使得二次型满足

$$x^T A x \geq \lambda_k.$$

3. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ 的符号差。

4. 设 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $F_\alpha = \mathbb{Q}(\alpha)$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上包含 α 的最小扩域。定义线性变换 $L_\alpha : F_\alpha \rightarrow F_\alpha$, 其作用为 $L_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ ($\forall \beta \in F_\alpha$)。求 L_α 的特征多项式。

5. 设 m 阶矩阵 A 与 n 阶矩阵 B 没有公共的特征值, 又 C 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似。



南京大学数学学院
2023 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 50 分)

1. (16 分) 计算下列各题。

$$(1) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos^2 x)}{\ln(\sin x)}.$$

2. (10 分) 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^{n^2}}{n^2}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}.$$

3. (8 分) 计算曲线积分

$$I = \oint_C \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \cos y + y \sin x) dx + (x \sin y + y \cos x) dy],$$

其中 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 积分沿逆时针方向进行。

4. (8 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件:

(1) $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$;

(2) $f(0) = 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立;

(3) f 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ 在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处正定。

证明:

(a) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上仅有一个零点, 且存在常数 $c > 0$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $f(x) \geq c\|x\|$ 。

(b) 梯度映射 $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 即 $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ 是单射。

5. (8 分) 设函数列 $f_n(x) = x^n + 2023x$ 。

(a) 证明: 方程 $f_n(x) = 2023$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一的实根 x_n 。

(b) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

(c) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^n}{\ln n}$ 。

高等代数 (满分 50 分)

1. (20 分) 设 c 是有理系数多项式的根, 定义集合 $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(c) = 0\}$ 。

(1) (10 分) 证明: 存在唯一的首一多项式 $p(x)$, 使得对任意 $f(x) \in I$, 均有 $p(x) \mid f(x)$ 。

(2) (5 分) 证明: $p(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

(3) (5 分) 若 $c = \sqrt{2} + i$, 求 $p(x)$ 。



2. (10 分) 设矩阵 $A \in M_7(\mathbb{C})$ 的最小多项式为 $\lambda^2(\lambda - 1)^3$, 求 A 所有可能的 Jordan 标准型。
3. (10 分) 定义 n 阶幻方 $V \subset M_n(\mathbb{C})$ 是所有满足每行、每列以及两个对角线元素和相等的矩阵全体构成的集合, 即对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 矩阵 $A = (a_{ij}) \in V$ 满足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{n+1-j,j} = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

证明:

- (1) V 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间。
- (2) 求 $\dim V$ 。
4. (10 分) 设 V 是区间 $[-1, 1]$ 上所有次数不超过 n 的实系数多项式构成的线性空间, 在 V 中定义二元函数:

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x), g(x) \in V.$$

- (1) 验证上述定义是 V 的一个内积, 从而 V 是一个欧氏空间。
- (2) 求 V 的一组标准正交基 (由基 $1, x, x^2, x^3$ 出发作正交化)。

概率论 (仅限应用统计专业, 满分 50 分)

1. (10 分) 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求 $Z = X - Y$ 的密度函数。

2. (10 分) 设在区间 $(0, a)$ 上随机地取 n 个点, 求相距最近的两点间距离的数学期望。
3. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U(0, 1)$ 。证明:

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{2/n} \xrightarrow{P} c,$$

其中 c 为常数, 并求出 c 。

4. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且满足 $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$, 证明:

$$\frac{\max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0.$$



南京大学数学学院

2022 年夏令营招生考试试题

注：数学分析和高等代数必做，其余科目可选一。

数学分析（满分 50 分）

1. (10 分) 设 $a_1 > 2$, 且当 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$ 。讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。
2. (10 分) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{k} = O(\sqrt{n}), n \rightarrow \infty$ 。
3. (15 分) 设 $f(x) \in C^2(\mathbb{R}), f(x) \geq 0, f''(x) \leq 1$ 。证明: $|f'(x)|^2 \leq 2f(x)$ 。
4. (15 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 处处可微, 且 $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ 。证明:

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

高等代数（满分 50 分）

1. (10 分) 求由三维空间中四点

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (8, 4, 2), \quad C = (27, 9, 3), \quad D = (64, 16, 4)$$

组成的三棱锥的体积。

2. (10 分) 已知 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$$

的特征值。

3. (10 分) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

4. (10 分) 假设 A, B 是两个具有相同的秩和极小多项式的 6 阶幂零矩阵, 证明: A, B 相似。
5. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 令 $C = AB - BA$, 如果 $AC = CA$, 证明: 存在正整数 m , 使得 $C^m = O$ 。

实变函数（满分 50 分）

1. (15 分) 设 $f(x), f_n(x), x \in [0, 1], (n = 1, 2, 3, \dots)$ 是定义在闭区间 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 可积函数。试分别给出 $f_n(x)$ 几乎处处收敛、依测度收敛和在 $L^1([0, 1])$ 中收敛于 $f(x)$ 的定义, 并讨论这三种收敛性之间的关系。
2. (10 分) 试构造闭区间 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 使得下面两个条件成立:

(a) $f_n(x)$ 是 $L^1([0, 1])$ 意义下的 Cauchy 列, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $m, n > N$ 有

$$\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon.$$



(b) 不存在 Riemann 可积函数 $f(x)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ 。

3. (10 分) 设 $f(x)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的有界变差函数, 证明: $f(x)$ 是绝对连续函数当且仅当对任意满足 $g(0) = 0, g(1) = 0$ 的连续可微函数 $g(x)$, 下述分部积分公式成立

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = - \int_0^1 f'(x)g(x)dx.$$

4. (15 分) 设 $L^2([0, 1])$ 为定义在区间 $[0, 1]$ 上的平方可积函数空间, 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L^2([0, 1])$ 弱收敛于 $f(x) \in L^2([0, 1])$, 若对任意 $g(x) \in L^2([0, 1])$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

证明下列命题:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ 当且仅当 $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 和 $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx$ 收敛于 $\int_0^1 |f(x)|^2 dx$ 同时成立。

(b) $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 当且仅当对任意的 $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x)dx = \int_0^t f(x)dx$ 。

近世代数 (满分 50 分)

1. (14 分) 设 P 是有限群 G 的一个 Sylow p -子群。

(a) (7 分) 证明: $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$, 其中 $N_G(\cdot)$ 表示群的正规化子。

(b) (7 分) 设 H 是 G 的一个子群且 $H \supseteq N_G(P)$, 证明: $N_G(H) = H$ 。

2. (6 分) 证明: $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 是无理数。

3. (15 分) 令 F 是一个域, 定义集合

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

(a) (5 分) 证明: 在矩阵加法和乘法下, R 是一个含么交换环。

(b) (10 分) 当 F 分别为 $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$ 时判断 R 是否构成域。

4. (15 分) 设 K 是一个域, $F \subseteq K$ 为子域, 且 F 包含集合 $\{a^2 \mid a \in K\}$ 。

(a) (5 分) 证明: 当 K 的特征不为 2 时, $F = K$ 。

(b) (5 分) 证明: 若 K 的特征为 2 且 K 是有限域, 仍有 $F = K$ 。

(c) (5 分) 若 K 的特征为 2 但 K 不是有限域, 判断是否仍有 $F = K$ 并说明理由。

概率论 (满分 50 分)

1. (15 分) 设 X, Y 为独立同分布的随机变量, 且 X 服从参数为 1 的指数分布, 求 $U = \frac{X}{X+Y}$ 的密度函数。

2. (10 分) 设 ξ 为取自然数值的随机变量, $\varphi(t)$ 为其特征函数, 证明:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



3. (10 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的 Poisson 分布, 对 X 独立重复观察 n 次, Y 表示观察值大于 1 的次数, 求 $\mathbb{E}(Y^2)$ 。
4. (15 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为独立同分布的随机变量, 其概率密度函数均为 $p(x)$ 。证明:
- (a) $\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} = X_1) = \frac{1}{n}$ 。
- (b) 随机变量 $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 与 $I\{X_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}\}$ 相互独立。

数值分析 (满分 50 分)

1. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 试构造三次多项式 $H_3(x)$ 满足插值条件:

$$H_3(a) = f(a), \quad H_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad H_3(b) = f(b), \quad H_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

并求余项 $f(x) - H_3(x)$ 的表达式。

2. (10 分) 确定常数 A, B, C 及正数 a , 使得如下求积公式

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx Af(-a) + Bf(0) + Cf(a)$$

具有尽可能高的代数精度, 并判断该公式是否为 Gauss 型求积公式。

3. 求二级二阶隐式 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 = f(t_n, y_n), \\ K_2 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)\right) \end{cases}$$

的绝对稳定区间。

4. (10 分) 设线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

已知其精确解为 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。回答以下问题:

- (a) 计算矩阵 A 基于无穷范数的条件数 $\text{Cond}_\infty(A)$ 。
- (b) 当右端向量 b 有微小扰动 $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时, 方程组变为 $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, 求新的解 $x + \Delta x$ 。
- (c) 计算相对误差 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和 $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 并解释这两个值的差异反映了矩阵 A 的何种性质。
5. (10 分) 设初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

对区间 $[a, b]$ 进行等距划分, 步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 节点为 $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 变形 Euler 方法定义为

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right).$$

- (a) 证明: 该方法具有二阶精度。
- (b) 求出其局部截断误差主项。



南京大学数学学院
2021 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 设 $a_0 \in \mathbb{R}$, 当 $n \geq 0$ 时, $a_{n+1} = \arctan a_n$, 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。

2. 计算定积分

(a) $\int_0^1 x^2 \ln x \, dx$ 。

(b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$ 。

3. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 可微且恒有

$$\|f(x, y) - f(0, 0)\| \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

证明: f 在原点的 Jacobi 矩阵非退化。

4. 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上定义的正值连续函数, 且无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛。

(a) 判断是否必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 并说明理由。

(b) 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)^{1-\frac{1}{x}} \, dx$ 是否收敛并说明理由。

高等代数

1. 设 3 阶正定矩阵 A 的三个特征值为 6, 3, 3。又 $x = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 6 的特征向量。

(a) 求 A 的属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量。

(b) 求 A 。

2. 设 $\alpha = (1, 2, 3), \beta = (0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$, 求

$$\{\gamma \in \mathbb{R}^3 \mid \exists A \in M_3(\mathbb{R}), \text{ s.t. } |A| = 0, \alpha A = \beta, \beta A = \gamma, \gamma A = \alpha\}.$$

3. 判断多项式

$$f(x) = 2021 + \prod_{i=1}^{2020} (x - i)^2$$

在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约, 并说明理由。(提示: $2021 = 43 \times 47$)

实变函数

1. 证明: 存在闭集 $C \subset (0, 1)$, 使得 C 不含任何有理数且其测度等于 $\frac{1}{2}$ 。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 处处可导, 判断 $f'(x)$ 是否为 Lebesgue 可测函数。

3. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 记

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \arctan y \, dy.$$

证明: $g(x)$ 二阶可导, 且 $g''(x)$ 为有界函数。

4. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上且满足 $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ 。

(a) 若 $f(x)$ 在任何闭区间都可积, 证明: $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ 。

(b) 当 $f(x)$ 是可测函数时, 上述结论是否成立? 请给出理由。