



南京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊 (25)



南京大学数学学院
2024 年夏令营招生考试试题
数学分析（满分 50 分）

1. 计算题。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx.$$

$$(4) \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)^{3/2}} dx dy.$$

解答. (1) 由

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + O(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

得

$$\frac{1}{\tan^2 x} = \cot^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} + O(x^2),$$

故极限为 $\frac{2}{3}$.

(2) 令 $x = 1/t$, 则 $t \rightarrow +\infty$,

$$x \ln x = -\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0.$$

(3) 对 $x > 0$,

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \sum_{k=0}^{\infty} xe^{-(2k+1)x}.$$

逐项积分得

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(4) 固定 y , 有

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+y^2x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+y^2x^2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

故原积分为

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \operatorname{arsinh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 敛散性（包括绝对收敛和条件收敛）。

解答. 因为

$$\sum_{k=1}^N \cos k = \frac{\sin(N/2) \cos((N+1)/2)}{\sin(1/2)}$$

有界, 而 $1/n$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, $\sum \frac{\cos n}{n}$ 收敛。

它不绝对收敛。事实上, 由 $\{n \bmod 2\pi : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $[0, 2\pi]$ 中稠密且更强地等分分布可知, 满足 $|\cos n| \geq 1/2$ 的整数 n 有正下密度, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n} = \infty.$$

所以原级数条件收敛。



3. 设有界函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足 $|f'(x)| < 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)。

(1) 证明：方程 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一解 x_0 。

(2) 设初始值 $a_0 \in \mathbb{R}$ ，数列 $\{a_n\}$ 由递推关系 $a_n = f(a_{n-1})$ 生成，证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ 。

解答. (1) 令 $F(x) = f(x) - x$ 。由于 f 有界， $x \rightarrow +\infty$ 时 $F(x) \rightarrow -\infty$ ， $x \rightarrow -\infty$ 时 $F(x) \rightarrow +\infty$ ，由介值定理存在零点。

若 $x_1 < x_2$ 都是零点，则

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1.$$

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1,$$

与 $|f'(\xi)| < 1$ 矛盾。因此零点唯一，记为 x_0 。

(2) 由中值定理，若 $a_{n-1} \neq x_0$ ，则

$$|a_n - x_0| = |f(a_{n-1}) - f(x_0)| < |a_{n-1} - x_0|.$$

因而 $d_n = |a_n - x_0|$ 单调下降，有极限 $d \geq 0$ 。若 $d > 0$ ，则从某项起 a_n 落在紧集

$$K = \{x : d/2 \leq |x - x_0| \leq d_0\}.$$

在 K 上连续函数 $|f'|$ 取得最大值 $q < 1$ ，于是充分大 n 有

$$d_n \leq qd_{n-1},$$

这与 $d_n \rightarrow d > 0$ 矛盾。故 $d = 0$ ，即 $a_n \rightarrow x_0$ 。

4. 设函数 $f(x), g(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} f(x), g(x) \in C[0, 1]; \\ f(0) = 1, f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1. \end{cases}$$

证明：存在 $x_0 \in (0, 1)$ ，使得 $f(x_0) = g(x_0)$ 。

解答. 令

$$h(x) = f(x) - g(x),$$

则由 f, g 在 $[0, 1]$ 上连续，知 h 在 $[0, 1]$ 上连续。又

$$h(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1 > 0,$$

$$h(1) = f(1) - g(1) = 0 - 1 = -1 < 0.$$

由介值定理，存在 $x_0 \in (0, 1)$ ，使得 $h(x_0) = 0$ ，即

$$f(x_0) = g(x_0).$$

高等代数（满分 50 分）

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 \\ \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 & \cos 5 \\ \cos 5 & \cos 6 & \cos 7 & \cos 8 \\ \cos 9 & \cos 10 & \cos 11 & \cos 12 \end{vmatrix}$$

的值。



解答. 对固定列 j , 第 i 行元素为 $\cos(4(i-1) + j)$ 。由和角公式:

$$\cos(4(i-1) + j + 1) = \cos((4(i-1) + j) + 1) = \cos(4(i-1) + j) \cos 1 - \sin(4(i-1) + j) \sin 1.$$

因此每一列都属于由向量

$$(\cos 0, \cos 4, \cos 8, \cos 12)^T, \quad (\sin 0, \sin 4, \sin 8, \sin 12)^T$$

张成的二维空间。矩阵列向量组的秩不超过 2, 而行列式是 4 阶行列式, 故

$$D = 0.$$

2. 设 $V = \mathbb{R}^n$ 为 n 维实向量空间, A 是 $n \times n$ 实对称矩阵, 其特征值按升序排列为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. 设 W 是 V 的任意 k 维子空间, 证明: 存在单位向量 $x \in W$, 使得二次型满足

$$x^T A x \geq \lambda_k.$$

解答. 取 A 的一组标准正交特征向量 $u_1, \dots, u_n$, 对应特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。令

$$E = \text{span}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}.$$

则 $\dim E = k - 1$ 。由于 $\dim W = k$, 有

$$W \cap E^\perp \neq \{0\}.$$

取 $0 \neq x \in W \cap E^\perp$, 则 x 在 $u_1, \dots, u_{k-1}$ 方向上的分量均为 0。写

$$x = \sum_{i=k}^n c_i u_i,$$

得

$$x^T A x = \sum_{i=k}^n \lambda_i |c_i|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n |c_i|^2 = \lambda_k x^T x.$$

3. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ 的符号差。

解答. 该二次型对应的对称矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(J - I),$$

其中 J 为全 1 矩阵。 J 的特征值为 3, 0, 0, 所以 A 的特征值为

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 故符号差为

$$1 - 2 = -1.$$

4. 设 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $F_\alpha = \mathbb{Q}(\alpha)$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上包含 α 的最小扩域。定义线性变换 $L_\alpha: F_\alpha \rightarrow F_\alpha$, 其作用为 $L_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ ($\forall \beta \in F_\alpha$)。求 L_α 的特征多项式。



解答. 有

$$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad (\alpha^2 - 5)^2 = 24.$$

因而 α 满足

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

该多项式在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 所以 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$, 且 $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ 为一组基. 乘法变换 L_α 的特征多项式等于 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式, 即

$$\chi_{L_\alpha}(t) = t^4 - 10t^2 + 1.$$

5. 设 m 阶矩阵 A 与 n 阶矩阵 B 没有公共的特征值, 又 C 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似。

解答. 考虑 Sylvester 线性方程

$$AX - XB = C.$$

线性算子 $T: X \mapsto AX - XB$ 的特征值形如 $\alpha - \beta$, 其中 $\alpha \in \sigma(A)$, $\beta \in \sigma(B)$ 。由于 A, B 无公共特征值, 0 不是 T 的特征值, 故 T 可逆, 所以存在唯一矩阵 X 满足 $AX - XB = C$ 。

令

$$P = \begin{pmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{pmatrix}.$$

则

$$P^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

因此二者相似。



南京大学数学学院
2023 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 50 分)

1. (16 分) 计算下列各题。

$$(1) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos^2 x)}{\ln(\sin x)}.$$

解答. (1) 因为

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1),$$

所以

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

(2) 标准正态分布四阶矩为 3, 故

$$\int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} Z^4 = 3\sqrt{2\pi}, \quad Z \sim N(0, 1).$$

(3) 由 Riemann 和,

$$\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

(4) 令 $h = x - \pi/2$ 。当 $h \rightarrow 0$ 时, $\cos x = -\sin h \sim -h$,

$$\sin(\cos^2 x) \sim h^2, \quad \ln(\sin x) = \ln(\cos h) \sim -\frac{h^2}{2}.$$

故极限为 -2 。

2. (10 分) 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^{n^2}}{n^2}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}.$$

解答.

(1) 因为

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp(-n + O(1)),$$

通项被指数衰减项控制, 所以级数收敛。

(2) 有

$$(-1)^n \sin n = \sin(n(\pi + 1)).$$



因为 $\pi + 1$ 不是 2π 的整数倍, $\sum_{k=1}^N \sin(k(\pi + 1))$ 有界, 故由 Dirichlet 判别法, 原级数收敛。另一方面, $|\sin n|$ 在正比例的整数上大于某个正常数, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n \sin n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} = \infty.$$

因此该级数条件收敛。

3. (8 分) 计算曲线积分

$$I = \oint_C \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \cos y + y \sin x)dx + (x \sin y + y \cos x)dy],$$

其中 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 积分沿逆时针方向进行。

解答. 按题面原式, 直接作参数化

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

可得

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2 \cos t}}{4 \cos^2 t + \sin^2 t} \left[-2 \sin t (2 \cos t \cos(\sin t) + \sin t \sin(2 \cos t)) \right. \\ \left. + \cos t (2 \cos t \sin(\sin t) + \sin t \cos(2 \cos t)) \right] dt.$$

该积分按原式并不化为通常的留数型简单常数; 数值为

$$I \approx -2.6760156311.$$

这里保留题面原式。若原题中三角函数的自变量存在排版误差, 应按修正后的题面重新计算。

4. (8 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件:

- (1) $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$;
- (2) $f(0) = 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立;
- (3) f 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ 在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处正定。

证明:

- (a) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上仅有一个零点, 且存在常数 $c > 0$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $f(x) \geq c\|x\|$ 。
- (b) 梯度映射 $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 即 $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ 是单射。

解答. 按题面, 第 (1) 中的线性下界 $f(x) \geq c\|x\|$ 对所有 x 成立是不正确的。反例取 $n = 1$, $f(x) = x^2$ 。它满足 $f \in C^2$ 、 $f(0) = 0$ 、 $f \geq 0$ 、 $f'' = 2 > 0$, 但任意 $c > 0$ 下, 当 $0 < |x| < c$ 时都有 $x^2 < c|x|$ 。

正确可证的部分如下。由于 $f \geq 0$ 且 $f(0) = 0$, 0 是全局极小点, 所以 $\nabla f(0) = 0$ 。对任意 $x \neq 0$, 设 $\varphi(t) = f(tx)$, 则

$$\varphi''(t) = x^T \nabla^2 f(tx) x > 0.$$

因而 φ' 严格递增, 且 $\varphi'(0) = \nabla f(0) \cdot x = 0$, 于是

$$f(x) = \varphi(1) > \varphi(0) = 0.$$

所以零点唯一为 0 。



对第 (2), 若 $\nabla f(x) = \nabla f(y)$, 令 $h = x - y$ 。若 $h \neq 0$, 则

$$0 = (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot h = \int_0^1 h^T \nabla^2 f(y + th) h \, dt > 0,$$

矛盾。故 $h = 0$, 即 $x = y$, 所以 ∇f 单射。

5. (8 分) 设函数列 $f_n(x) = x^n + 2023x$ 。

(a) 证明: 方程 $f_n(x) = 2023$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一的实根 x_n 。

(b) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

(c) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^n}{\ln n}$ 。

解答.

(a) $f'_n(x) = nx^{n-1} + 2023 > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立, 故 f_n 严格递增。又 $f_n(0) = 0 < 2023$, $f_n(1) = 2024 > 2023$, 故存在唯一根 $x_n \in (0, 1)$ 。

(b) 根方程为

$$x_n^n = 2023(1 - x_n).$$

因 $0 < x_n < 1$, 任取收敛子列 $x_{n_j} \rightarrow L$, 则 $0 \leq L \leq 1$ 。若 $L < 1$, 则左端 $x_{n_j}^{n_j} \rightarrow 0$, 右端 $2023(1 - x_{n_j}) \rightarrow 2023(1 - L) > 0$, 矛盾。故所有收敛子列极限都是 1, 从而 $x_n \rightarrow 1$ 。

(c) 令 $\delta_n = 1 - x_n$ 。方程化为

$$(1 - \delta_n)^n = 2023\delta_n.$$

由上一问 $\delta_n \rightarrow 0$ 。取对数得

$$n \ln(1 - \delta_n) = \ln 2023 + \ln \delta_n.$$

标准估计给出 $n\delta_n / \ln n \rightarrow 1$; 例如由

$$-\frac{\delta_n}{1 - \delta_n} \leq \ln(1 - \delta_n) \leq -\delta_n$$

可先推出 $n\delta_n \rightarrow \infty$ 且 $n\delta_n = O(\ln n)$, 再代回上式得到 $n\delta_n \sim \ln n$ 。于是

$$\frac{nx_n^n}{\ln n} = \frac{2023n\delta_n}{\ln n} \rightarrow 2023.$$

高等代数 (满分 50 分)

1. (20 分) 设 c 是有理系数多项式的根, 定义集合 $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(c) = 0\}$ 。

(1) (10 分) 证明: 存在唯一的首一多项式 $p(x)$, 使得对任意 $f(x) \in I$, 均有 $p(x) \mid f(x)$ 。

(2) (5 分) 证明: $p(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

(3) (5 分) 若 $c = \sqrt{2} + i$, 求 $p(x)$ 。

解答.

(1) I 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的理想, 且 $I \neq \{0\}$ 。由于 $\mathbb{Q}[x]$ 是主理想整环, 存在首一多项式 $p(x)$ 使 $I = (p(x))$ 。于是任意 $f \in I$ 均被 p 整除。若另有首一多项式 q 也满足同样性质, 则 $p \mid q$ 且 $q \mid p$, 故 $p = q$ 。

(2) 若 $p = uv$, 其中 $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ 且次数均小于 $\deg p$, 则 $p(c) = 0$ 蕴含 $u(c)v(c) = 0$ 。于是 $u(c) = 0$ 或 $v(c) = 0$, 即 $u \in I$ 或 $v \in I$, 与 p 是 I 中最低次数首一多项式矛盾。故 p 不可约。



(3) $c = \sqrt{2} + i$ 的共轭为 $\pm\sqrt{2} \pm i$ 。因此

$$p(x) = ((x-i)^2 - 2)((x+i)^2 - 2) = (x^2 - 2ix - 3)(x^2 + 2ix - 3) = x^4 - 2x^2 + 9.$$

2. (10 分) 设矩阵 $A \in M_7(\mathbb{C})$ 的最小多项式为 $\lambda^2(\lambda-1)^3$, 求 A 所有可能的 Jordan 标准型。解答. 最小多项式说明 0 对应的最大 Jordan 块大小为 2, 且至少有一个 $J_2(0)$; 1 对应的最大 Jordan 块大小为 3, 且至少有一个 $J_3(1)$ 。总维数为 7。

因而所有可能 Jordan 型为

$$\begin{aligned} J_2(0) \oplus J_3(1) \oplus J_2(1), & \quad J_2(0) \oplus J_3(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1), \\ J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_3(1) \oplus J_1(1), & \\ J_2(0) \oplus J_2(0) \oplus J_3(1), & \quad J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_3(1). \end{aligned}$$

3. (10 分) 定义 n 阶幻方 $V \subset M_n(\mathbb{C})$ 是所有满足每行、每列以及两个对角线元素和相等的矩阵全体构成的集合, 即对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 矩阵 $A = (a_{ij}) \in V$ 满足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{n+1-j,j} = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

证明:

(1) V 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间。

(2) 求 $\dim V$ 。

解答.

- (1) 条件都是关于矩阵元素的齐次线性方程, 因此满足这些条件的矩阵全体对加法和数乘封闭, 故 V 是子空间。
- (2) 引入公共和 s 。方程为 n 个行和等于 s 、 n 个列和等于 s 、两个对角线和等于 s 。在变量 a_{ij} 与 s 中共有 $n^2 + 1$ 个变量。对 $n \geq 3$, 这些 $2n + 2$ 个方程只有一个显然的线性相关关系: 所有行和之和等于所有列和之和, 因此秩为 $2n + 1$ 。故

$$\dim V = (n^2 + 1) - (2n + 1) = n^2 - 2n, \quad n \geq 3.$$

特殊地, $n = 1$ 时 $\dim V = 1$; $n = 2$ 时直接解得所有元素相等, 故 $\dim V = 1$ 。

4. (10 分) 设 V 是区间 $[-1, 1]$ 上所有次数不超过 n 的实系数多项式构成的线性空间, 在 V 中定义二元函数:

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x), g(x) \in V.$$

(1) 验证上述定义是 V 的一个内积, 从而 V 是一个欧氏空间。

(2) 求 V 的一组标准正交基 (由基 $1, x, x^2, x^3$ 出发作正交化)。

解答.

- (1) 双线性与对称性显然。若 $f \neq 0$, 则多项式 f^2 非负且不恒为 0, 故

$$(f, f) = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx > 0.$$

因此它是内积。



(2) 从 $1, x, x^2, x^3$ 出发 Gram-Schmidt 正交化, 得到 Legendre 多项式的前四项。标准正交基可取

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1), \quad \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x).$$

概率论 (仅限应用统计专业, 满分 50 分)

1. (10 分) 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求 $Z = X - Y$ 的密度函数。

解答. 当 $z = x - y$ 时, $0 < y < x < 1$ 等价于 $0 < z < 1$ 且 $z < x < 1$ 。故

$$f_Z(z) = \int_z^1 3x \, dx = \frac{3}{2}(1 - z^2), \quad 0 < z < 1.$$

其他 z 处密度为 0, 即

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - z^2), & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

2. (10 分) 设在区间 $(0, a)$ 上随机地取 n 个点, 求相距最近的两点间距离的数学期望。

解答. 设次序统计量为 $0 < X_{(1)} < \cdots < X_{(n)} < a$, 并令内部间距

$$D_i = X_{(i+1)} - X_{(i)}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

连同边界间距

$$S_0 = X_{(1)}, \quad S_i = D_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad S_n = a - X_{(n)},$$

向量 $(S_0, \dots, S_n)/a$ 服从 $n+1$ 维均匀单纯形分布。令 $D = \min_{1 \leq i \leq n-1} D_i$, 则当 $0 \leq t \leq a/(n-1)$ 时,

$$\mathbb{P}(D > t) = \left(1 - \frac{(n-1)t}{a}\right)^n.$$

因而

$$\mathbb{E}D = \int_0^{a/(n-1)} \left(1 - \frac{(n-1)t}{a}\right)^n dt = \frac{a}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n^2 - 1}.$$

3. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U(0, 1)$ 。证明:

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{2/n} \xrightarrow{P} c,$$

其中 c 为常数, 并求出 c 。

解答. 取对数, 令 $Y_i = \ln X_i$ 。则 Y_i 独立同分布且

$$\mathbb{E}Y_i = \int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

由大数定律,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \xrightarrow{P} -1.$$

因此

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{2/n} = \exp\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i\right) \xrightarrow{P} e^{-2}.$$

故 $c = e^{-2}$ 。



4. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且满足 $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$, 证明:

$$\frac{\max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

解答. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由并集界,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \leq n\mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}).$$

若 $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, 则

$$t^2\mathbb{P}(|X_1| > t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

取 $t = \varepsilon\sqrt{n}$, 得

$$n\mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}) = \frac{1}{\varepsilon^2}t^2\mathbb{P}(|X_1| > t) \rightarrow 0.$$

因此该最大值除以 $\sqrt{n}$ 依概率收敛到 0, 从而也依分布收敛到 0。



南京大学数学学院

2022 年夏令营招生考试试题

注：数学分析和高等代数必做，其余科目可选一。

数学分析（满分 50 分）

1. (10 分) 设 $a_1 > 2$, 且当 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$ 。讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。

解答. 令 $b_n = a_n - 1$, 则 $b_1 > 1$, 且

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2 - 2(a_n - 1)}{2(a_n - 1)} = \frac{b_n^2 + 1}{2b_n} = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{1}{b_n} \right).$$

若 $b_n > 1$, 则 $b_{n+1} > 1$ 且

$$b_{n+1} < b_n.$$

因此 b_n 单调下降且有下界 1, 存在极限 $L \geq 1$ 。令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{L} \right),$$

从而 $L = 1$ 。故 $a_n = b_n + 1 \rightarrow 2$ 。

2. (10 分) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{k} = O(\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$ 。

解答. 令 $g(x) = \sin \sqrt{x}$ 。由 Euler 求和的简单估计,

$$\sum_{k=1}^n g(k) = \int_1^n g(x) dx + O \left(1 + \int_1^n |g'(x)| dx \right).$$

其中

$$\int_1^n \sin \sqrt{x} dx = \int_1^{\sqrt{n}} 2u \sin u du = O(\sqrt{n}),$$

且

$$\int_1^n |g'(x)| dx \leq \int_1^n \frac{dx}{2\sqrt{x}} = O(\sqrt{n}).$$

故 $\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{k} = O(\sqrt{n})$ 。

3. (15 分) 设 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 1$ 。证明: $|f'(x)|^2 \leq 2f(x)$ 。

解答. 固定 $x \in \mathbb{R}$ 。由 Taylor 公式及 $f'' \leq 1$, 对任意 $h \in \mathbb{R}$ 有

$$f(x+h) \leq f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}h^2.$$

又 $f(x+h) \geq 0$, 因此二次函数

$$q(h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}h^2$$

必对所有 h 非负; 否则若 $q(h_0) < 0$, 则 $0 \leq f(x+h_0) \leq q(h_0) < 0$, 矛盾。于是判别式非正,

$$(f'(x))^2 - 2f(x) \leq 0.$$

即 $|f'(x)|^2 \leq 2f(x)$ 。

4. (15 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 处处可微, 且 $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ 。证明:

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$



解答. 令 $h = y - x$ 。由一元函数 $\phi(t) = f(x + th)$ 的微积分基本定理,

$$f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot h = \int_0^1 (\nabla f(x + th) - \nabla f(x)) \cdot h \, dt.$$

因而

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot h| \leq \int_0^1 t \|h\|^2 \, dt = \frac{1}{2} \|h\|^2.$$

高等代数 (满分 50 分)

1. (10 分) 求由三维空间中四点

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (8, 4, 2), \quad C = (27, 9, 3), \quad D = (64, 16, 4)$$

组成的三棱锥的体积。

解答. 体积为

$$V = \frac{1}{6} |\det(B - A, C - A, D - A)|.$$

其中

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 26 & 63 \\ 3 & 8 & 15 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -12.$$

故 $V = |-12|/6 = 2$ 。

2. (10 分) 已知 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$$

的特征值。

解答. 若 $Av = \lambda v$, 则

$$B \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = (\lambda + 1) \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix}.$$

取 A 的一组特征向量基, 得 B 的全部特征值为

$$\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1, \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1.$$

3. (10 分) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

解答. 取单位特征向量

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \quad u_2 = (0, 1, 0)^T, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T.$$

对应特征值分别为 12, 6, -6。令

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$



则 T 正交, 且

$$T^{-1}AT = T^T AT = \text{diag}(12, 6, -6).$$

4. (10 分) 假设 A, B 是两个具有相同的秩和极小多项式的 6 阶幂零矩阵, 证明: A, B 相似。

解答. 幂零矩阵的相似类型由 Jordan 块大小构成的分拆决定。极小多项式给出最大 Jordan 块大小, 秩给出 Jordan 块个数: 若 Jordan 块个数为 r , 则

$$\text{rank } A = 6 - r.$$

对 6 的分拆逐一观察, 最大块大小与块个数唯一决定分拆:

$$\begin{aligned} &6; \quad 5+1; \quad 4+2, 4+1+1; \quad 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1; \\ &2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1; \quad 1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

因此 A, B 有相同 Jordan 型, 从而相似。

5. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 令 $C = AB - BA$, 如果 $AC = CA$, 证明: 存在正整数 m , 使得 $C^m = O$ 。

解答. 因为 $AC = CA$, 故 A 与 C^k 也可交换。对任意 $k \geq 1$,

$$\text{tr}(C^k) = \text{tr}((AB - BA)C^{k-1}) = \text{tr}(ABC^{k-1}) - \text{tr}(BAC^{k-1}).$$

利用迹的循环不变性及 $AC^{k-1} = C^{k-1}A$, 有

$$\text{tr}(ABC^{k-1}) = \text{tr}(BC^{k-1}A) = \text{tr}(BAC^{k-1}),$$

故 $\text{tr}(C^k) = 0$ 对所有 $k \geq 1$ 成立。特别地, $\text{tr}(C), \dots, \text{tr}(C^n)$ 均为 0。由 Newton 恒等式, C 的特征多项式为 t^n , 故 C 幂零。取 $m = n$ 即得 $C^m = O$ 。

实变函数 (满分 50 分)

1. (15 分) 设 $f(x), f_n(x), x \in [0, 1]$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) 是定义在闭区间 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 可积函数。试分别给出 $f_n(x)$ 几乎处处收敛、依测度收敛和在 $L^1([0, 1])$ 中收敛于 $f(x)$ 的定义, 并讨论这三种收敛性之间的关系。

解答. 定义如下。

(1) f_n 几乎处处收敛于 f : 存在零测集 N , 使得对任意 $x \in [0, 1] \setminus N$, 有 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 。

(2) f_n 依测度收敛于 f : 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$m\{x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

(3) f_n 在 L^1 中收敛于 f :

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0.$$

在有限测度空间上, 几乎处处收敛推出依测度收敛; L^1 收敛推出依测度收敛。依测度收敛可推出存在子列几乎处处收敛。反向一般不成立: 依测度收敛不必整列几乎处处收敛, 也不必 L^1 收敛; 几乎处处收敛也不必 L^1 收敛, 除非有支配收敛、均匀可积等附加条件。

2. (10 分) 试构造闭区间 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 使得下面两个条件成立:



(a) $f_n(x)$ 是 $L^1([0, 1])$ 意义下的 Cauchy 列, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $m, n > N$ 有

$$\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon.$$

(b) 不存在 Riemann 可积函数 $f(x)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ 。

解答. 取 Smith–Volterra 集 $S \subset [0, 1]$, 它是闭集、无内点, 且 $m(S) = 1/2$ 。函数 1_S Lebesgue 可积, 但不是 Riemann 可积, 因为它在 S 的每一点都不连续, 而 $m(S) > 0$ 。

由 Lebesgue 积分的正则性, 可取一系列 Riemann 可积的阶梯函数 f_n , 使

$$\int_0^1 |f_n - 1_S| dx \rightarrow 0.$$

于是 $\{f_n\}$ 在 L^1 中是 Cauchy 列。若存在 Riemann 可积 f 使 $f_n \rightarrow f$ 于 L^1 , 则由 L^1 极限的几乎处处唯一性, $f = 1_S$ 几乎处处成立。但任何与 1_S 几乎处处相等的函数都在 S 的几乎每个密度点处具有不可去掉的振荡, 不能是 Riemann 可积函数。这与假设矛盾。

3. (10 分) 设 $f(x)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的有界变差函数, 证明: $f(x)$ 是绝对连续函数当且仅当对任意满足 $g(0) = 0, g(1) = 0$ 的连续可微函数 $g(x)$, 下述分部积分公式成立

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = - \int_0^1 f'(x)g(x)dx.$$

解答. 若 f 绝对连续, 则 f' Lebesgue 可积, 且

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

对 $g \in C^1[0, 1]$ 且 $g(0) = g(1) = 0$, 通常的分部积分给出结论。

反过来, 若 f 有界变差, 则它诱导一个有限 signed measure $\mu = df$, 且 Riemann–Stieltjes 分部积分给出

$$\int_0^1 fg' dx = - \int_0^1 g d\mu.$$

题设又说明对所有 $g \in C_0^1(0, 1)$,

$$\int_0^1 g d\mu = \int_0^1 f'(x)g(x)dx.$$

因此测度 μ 等于绝对连续测度 $f'(x)dx$ 。于是

$$f(x) - f(0) = \mu([0, x]) = \int_0^x f'(t)dt,$$

从而 f 绝对连续。

4. (15 分) 设 $L^2([0, 1])$ 为定义在区间 $[0, 1]$ 上的平方可积函数空间, 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L^2([0, 1])$ 弱收敛于 $f(x) \in L^2([0, 1])$, 若对任意 $g(x) \in L^2([0, 1])$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

证明下列命题:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ 当且仅当 $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 和 $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx$ 收敛于 $\int_0^1 |f(x)|^2 dx$ 同时成立。

(b) $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 当且仅当对任意的 $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x)dx = \int_0^t f(x)dx$ 。



解答. (1) 若 $f_n \rightarrow f$ 于 L^2 , 则由 Cauchy-Schwarz 不等式立即得到弱收敛, 且范数收敛。反之, 若 $f_n \rightharpoonup f$ 且 $\|f_n\|_2^2 \rightarrow \|f\|_2^2$, 则

$$\|f_n - f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\langle f_n, f \rangle \rightarrow \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\|f\|_2^2 = 0.$$

(2) 按题面原句, 反向命题缺少有界性条件, 并不成立。反例取 $f = 0$, $f_n(x) = n \sin(n^2 x)$ 。则对每个固定 t ,

$$\int_0^t f_n(x) dx = \frac{1 - \cos(n^2 t)}{n} \rightarrow 0,$$

但 $\|f_n\|_2 \rightarrow \infty$, 弱收敛序列必有界, 故 f_n 不弱收敛。

若补充条件 $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$, 则结论成立: 因为指标函数 $1_{[0,t]}$ 的线性张成在 $L^2([0,1])$ 中稠密, 先由题设得到对阶梯函数测试的积分收敛, 再用一致有界性推广到任意 $g \in L^2$ 。

近世代数 (满分 50 分)

1. (14 分) 设 P 是有限群 G 的一个 Sylow p -子群。

(a) (7 分) 证明: $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$, 其中 $N_G(\cdot)$ 表示群的正规化子。

(b) (7 分) 设 H 是 G 的一个子群且 $H \supseteq N_G(P)$, 证明: $N_G(H) = H$ 。

解答. (1) 记 $N = N_G(P)$ 。显然 $N \subseteq N_G(N)$ 。若 $g \in N_G(N)$, 则 $gPg^{-1} \subseteq N$ 且是 N 的 Sylow p -子群。由于 $P \triangleleft N$, P 是 N 中唯一的 Sylow p -子群, 故 $gPg^{-1} = P$, 即 $g \in N_G(P) = N$ 。因此 $N_G(N) = N$ 。

(2) 显然 $H \subseteq N_G(H)$ 。若 $g \in N_G(H)$, 则 gPg^{-1} 是 H 的 Sylow p -子群。由 Sylow 定理, 存在 $h \in H$ 使

$$h(gPg^{-1})h^{-1} = P.$$

于是 $hg \in N_G(P) \subseteq H$ 。又 $h \in H$, 故 $g \in H$ 。所以 $N_G(H) = H$ 。

2. (6 分) 证明: $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 是无理数。

解答. 反设 $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$ 。则 $\sqrt[3]{3} = r - \sqrt{2}$ 。两边立方得

$$3 = r^3 + 6r - (3r^2 + 2)\sqrt{2}.$$

因此

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2} \in \mathbb{Q},$$

矛盾。故 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 无理。

3. (15 分) 令 F 是一个域, 定义集合

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

(a) (5 分) 证明: 在矩阵加法和乘法下, R 是一个含么交换环。

(b) (10 分) 当 F 分别为 $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$ 时判断 R 是否构成域。

解答. (1) 映射

$$F[t]/(t^2 + 1) \rightarrow R, \quad a + bt \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

是环同构。因此 R 是含么交换环。



(2) R 是域当且仅当 $t^2 + 1$ 在 F 上不可约。于是:

F	$t^2 + 1$ 是否不可约	R 是否为域
$\mathbb{Q}$	不可约	是
$\mathbb{C}$	可约	否
$\mathbb{F}_5$	$-1 = 4 = 2^2$, 可约	否
$\mathbb{F}_7$	$-1 = 6$ 不是平方, 不可约	是

4. (15 分) 设 K 是一个域, $F \subseteq K$ 为子域, 且 F 包含集合 $\{a^2 \mid a \in K\}$ 。

(a) (5 分) 证明: 当 K 的特征不为 2 时, $F = K$ 。

(b) (5 分) 证明: 若 K 的特征为 2 且 K 是有限域, 仍有 $F = K$ 。

(c) (5 分) 若 K 的特征为 2 但 K 不是有限域, 判断是否仍有 $F = K$ 并说明理由。

解答. (1) 任取 $a \in K$ 。因 $a^2, (a+1)^2, 1 \in F$ 且 $2 \neq 0$, 有

$$a = \frac{(a+1)^2 - a^2 - 1}{2} \in F.$$

故 $K \subseteq F$, 从而 $F = K$ 。

(2) 若 K 是特征 2 的有限域, 则 Frobenius 映射 $\varphi(a) = a^2$ 是 K 到自身的单射, 从而是满射。因此任意 $a \in K$ 都是某个元素的平方, 故 $a \in F$, 即 $F = K$ 。

(3) 不一定。取 $K = \mathbb{F}_2(t)$, $F = \mathbb{F}_2(t^2)$ 。任意 $r(t) \in \mathbb{F}_2(t)$ 的平方都属于 $\mathbb{F}_2(t^2)$, 故 F 包含 K 中所有平方; 但 $t \notin \mathbb{F}_2(t^2)$, 所以 $F \neq K$ 。

概率论 (满分 50 分)

1. (15 分) 设 X, Y 为独立同分布的随机变量, 且 X 服从参数为 1 的指数分布, 求 $U = \frac{X}{X+Y}$ 的密度函数。

解答. 令

$$S = X + Y, \quad U = \frac{X}{X+Y}.$$

则 $x = us$, $y = (1-u)s$, Jacobi 行列式为 s , 其中 $s > 0$, $0 < u < 1$ 。由于 X, Y 独立且密度为 $e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$,

$$f_{S,U}(s, u) = e^{-s}s, \quad s > 0, 0 < u < 1.$$

积去 s , 得

$$f_U(u) = \int_0^\infty se^{-s}ds = 1, \quad 0 < u < 1.$$

因而 $U \sim U(0, 1)$ 。

2. (10 分) 设 ξ 为取自然数值的随机变量, $\varphi(t)$ 为其特征函数, 证明:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

解答. 设 $p_j = \mathbb{P}(\xi = j)$ 。则

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j e^{ijt}.$$

因 $\sum p_j = 1$, 可逐项积分:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = p_k.$$



3. (10 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的 Poisson 分布, 对 X 独立重复观察 n 次, Y 表示观察值大于 1 的次数, 求 $\mathbb{E}(Y^2)$ 。

解答. 单次观察大于 1 的概率为

$$p = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

因此 $Y \sim B(n, p)$ 。于是

$$\mathbb{E}(Y^2) = \text{Var}(Y) + (\mathbb{E}Y)^2 = np(1-p) + n^2p^2, \quad p = 1 - \frac{2}{e}.$$

4. (15 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为独立同分布的随机变量, 其概率密度函数均为 $p(x)$ 。证明:

(a) $\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} = X_1) = \frac{1}{n}$ 。

(b) 随机变量 $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 与 $I\{X_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}\}$ 相互独立。

解答. 因 X_i 有共同密度, 几乎必然不存在并列最大值。

(1) 由对称性, 每个 X_i 成为唯一最大值的概率相等, 且这些事件互不相交并覆盖全概率, 故概率均为 $1/n$ 。

(2) 设分布函数为 F , $M = \max_i X_i$, $A = \{X_1 = M\}$ 。则

$$\mathbb{P}(M \leq t, A) = \int_{-\infty}^t p(x) F(x)^{n-1} dx = \frac{F(t)^n}{n}.$$

又 $\mathbb{P}(M \leq t) = F(t)^n$, $\mathbb{P}(A) = 1/n$, 故

$$\mathbb{P}(M \leq t, A) = \mathbb{P}(M \leq t)\mathbb{P}(A).$$

由此 M 与 I_A 独立。

数值分析 (满分 50 分)

1. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 试构造三次多项式 $H_3(x)$ 满足插值条件:

$$H_3(a) = f(a), \quad H_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad H_3(b) = f(b), \quad H_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

并求余项 $f(x) - H_3(x)$ 的表达式。

解答. 记 $m = (a+b)/2$ 。这是含节点 a, m, b 且 m 为一阶 Hermite 节点的插值问题。 H_3 是满足上述四个线性条件的唯一三次多项式。余项为

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)(x-m)^2(x-b),$$

其中 ξ_x 位于 a, b, x 之间。该公式由 Hermite 插值余项直接得到。

2. (10 分) 确定常数 A, B, C 及正数 a , 使得如下求积公式

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx Af(-a) + Bf(0) + Cf(a)$$

具有尽可能高的代数精度, 并判断该公式是否为 Gauss 型求积公式。

解答. 由区间和节点对称性, 取 $A = C$ 。令公式对 $1, x^2, x^4$ 精确:

$$2A + B = 4, \quad 2Aa^2 = \frac{16}{3}, \quad 2Aa^4 = \frac{64}{5}.$$



由后两式得 $a^2 = 12/5$, 进而 $A = C = 10/9$, $B = 16/9$ 。因此

$$a = \sqrt{\frac{12}{5}}, \quad A = C = \frac{10}{9}, \quad B = \frac{16}{9}.$$

由于该三节点公式对所有次数不超过 5 的多项式精确, 达到三节点求积公式的最高代数精度, 故它是 $[-2, 2]$ 上的三点 Gauss-Legendre 求积公式。

3. 求二级二阶隐式 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 = f(t_n, y_n), \\ K_2 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)\right) \end{cases}$$

的绝对稳定区间。

解答. 对测试方程 $y' = \lambda y$, 记 $z = h\lambda$ 。有 $K_1 = \lambda y_n$, 且

$$K_2 = \lambda \left(y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \right).$$

解得

$$K_2 = \lambda y_n \frac{1 + z/2}{1 - z/2}.$$

因而稳定函数为

$$R(z) = \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \right) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}.$$

在实轴上绝对稳定要求 $|R(z)| \leq 1$, 即

$$\left| \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \right| \leq 1.$$

对实 z 化简得 $z \leq 0$ 。故绝对稳定区间为

$$(-\infty, 0].$$

4. (10 分) 设线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

已知其精确解为 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。回答以下问题:

(a) 计算矩阵 A 基于无穷范数的条件数 $\text{Cond}_\infty(A)$ 。

(b) 当右端向量 b 有微小扰动 $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时, 方程组变为 $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, 求新的解 $x + \Delta x$ 。

(c) 计算相对误差 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和 $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 并解释这两个值的差异反映了矩阵 A 的何种性质。

解答. (1)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10000 & 10001 \\ 10000 & -10000 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\|A\|_\infty = 2.0001, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 20001,$$



故

$$\text{Cond}_{\infty}(A) = 2.0001 \times 20001 = 40004.0001.$$

(2) 新右端为 $(2.0001, 2)^T$ 。方程组

$$\begin{cases} x_1 + 1.0001x_2 = 2.0001, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

相减得 $0.0001x_2 = 0.0001$, 故 $x_2 = 1$, $x_1 = 1$ 。新的解为

$$x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\frac{\|\Delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \frac{0.0001}{2} = 5 \times 10^{-5}, \quad \Delta x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\|\Delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{1}{2}.$$

很小的右端扰动造成了很大的解扰动, 反映出矩阵 A 条件数很大, 是病态矩阵。

5. (10 分) 设初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

对区间 $[a, b]$ 进行等距划分, 步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 节点为 $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 变形 Euler 方法定义为

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right).$$

(a) 证明: 该方法具有二阶精度。

(b) 求出其局部截断误差主项。

解答. 这是显式中点法。设在一步中从精确值 $y = y(x)$ 出发, 记 $f = f(x, y)$ 。精确解展开为

$$y(x+h) = y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + O(h^4).$$

方法右端中的函数值展开为

$$f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f\right) = f + \frac{h}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^2}{8}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2f_{yy}) + O(h^3).$$

又 $y' = f$, $y'' = f_x + f_y f$, 所以方法展开与精确解在 h^2 项前完全一致, 故为二阶方法。

若把局部截断误差定义为

$$\tau_{i+1} = y(x+h) - y(x) - hf\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2}f(x, y(x))\right),$$

则主项为

$$h^3 \left\{ \frac{1}{24}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2f_{yy}) + \frac{1}{6}f_y(f_x + f_y f) \right\},$$

其中各偏导数均在 $(x, y(x))$ 处取值。若采用除以 h 的局部截断误差定义, 则主项相应除以 h 。



南京大学数学学院
2021 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 设 $a_0 \in \mathbb{R}$, 当 $n \geq 0$ 时, $a_{n+1} = \arctan a_n$, 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。

解答. 对任意 $x \neq 0$, 有 $|\arctan x| < |x|$, 且 $\arctan 0 = 0$ 。因此

$$|a_{n+1}| = |\arctan a_n| \leq |a_n|,$$

且若 $a_n \neq 0$ 则严格小于。故 $|a_n|$ 单调下降, 有极限 $L \geq 0$ 。若取极限点 ℓ , 则 $\ell = \arctan \ell$, 唯一解为 $\ell = 0$ 。因此 $L = 0$, 即

$$a_n \rightarrow 0.$$

2. 计算定积分

(a) $\int_0^1 x^2 \ln x \, dx$ 。

(b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$ 。

解答. (1) 分部积分得

$$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \ln x \right|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 \, dx = -\frac{1}{9}.$$

(2) 令 $x = \sin \theta$, 则

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

3. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 可微且恒有

$$\|f(x, y) - f(0, 0)\| \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

证明: f 在原点的 Jacobi 矩阵非退化。

解答. 记 $J = Df(0, 0)$ 。若 J 退化, 则存在单位向量 $v \in \mathbb{R}^2$ 使 $Jv = 0$ 。由可微性,

$$f(tv) - f(0) = tJv + o(t) = o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

因而

$$\|f(tv) - f(0)\| = o(|t|),$$

这与题设要求 $\|f(tv) - f(0)\| \geq |t|$ 矛盾。故 J 非退化。

4. 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上定义的正值连续函数, 且无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛。

(a) 判断是否必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 并说明理由。

(b) 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)^{1-\frac{1}{x}} \, dx$ 是否收敛并说明理由。



解答. (1) 不一定。可在整数点附近构造高度为 1、宽度为 2^{-n} 的连续三角尖峰, 并令其他地方为很小的正连续值。这样 $\int_1^\infty f < \infty$, 但沿尖峰顶点有 $f(n) = 1$, 故极限不为 0。

(2) 必收敛。将区间分为 $[n, n+1]$ 。在 $\{f \geq 1\}$ 上, $f^{1-1/x} \leq f$ 。在 $\{0 < f < 1\}$ 上, 当 $x \in [n, n+1]$ 时, $1 - \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{n}$, 故

$$f(x)^{1-1/x} \leq f(x)^{1-1/n}.$$

设 $A_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ 。由 Jensen 不等式,

$$\int_n^{n+1} f(x)^{1-1/n} dx \leq A_n^{1-1/n}.$$

又 $\sum A_n < \infty$ 。对任意 $\varepsilon > 0$, 若 $A_n \geq e^{-\varepsilon n}$, 则 $A_n^{1-1/n} \leq e^\varepsilon A_n$; 若 $A_n < e^{-\varepsilon n}$, 则 $A_n^{1-1/n} \leq e^{-\varepsilon(n-1)}$ 。故 $\sum A_n^{1-1/n}$ 收敛, 从而题中积分收敛。

高等代数

1. 设 3 阶正定矩阵 A 的三个特征值为 6, 3, 3。又 $x = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 6 的特征向量。

(a) 求 A 的属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量。

(b) 求 A 。

解答. (1) 由于正定矩阵按通常定义为实对称正定矩阵, 不同特征值的特征向量正交。故特征值 3 的特征子空间为

$$\{(u, v, w)^T : u + v + w = 0\}.$$

可取

$$(1, -1, 0)^T, \quad (1, 0, -1)^T.$$

(2) 令 $u = (1, 1, 1)^T$ 。在 u 方向上特征值为 6, 在 $u^\perp$ 上特征值为 3, 故

$$A = 3I + 3 \frac{uu^T}{u^T u} = 3I + uu^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $\alpha = (1, 2, 3), \beta = (0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$, 求

$$\{\gamma \in \mathbb{R}^3 \mid \exists A \in M_3(\mathbb{R}), \text{ s.t. } |A| = 0, \alpha A = \beta, \beta A = \gamma, \gamma A = \alpha\}.$$

解答. α, β 线性无关。若 α, β, γ 线性无关, 则它们构成一组基, 而线性变换 $v \mapsto vA$ 在该基上循环置换

$$\alpha \mapsto \beta \mapsto \gamma \mapsto \alpha,$$

因此可逆, 与 $|A| = 0$ 矛盾。故 $\gamma = p\alpha + q\beta$ 。

在基 α, β 下, 变换矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix},$$

因为 $\alpha M = \beta$, $\beta M = p\alpha + q\beta$ 。条件 $\gamma A = \alpha$ 等价于

$$(p, q)M = (1, 0),$$

即

$$pq = 1, \quad p + q^2 = 0.$$



解得 $q = -1, p = -1$ 。故

$$\gamma = -\alpha - \beta = (-1, -3, -5).$$

反过来, 可以把上述二维循环变换在 $\text{span}\{\alpha, \beta\}$ 外的一个方向上映到该二维子空间中, 从而得到奇异矩阵 A , 故所求集合为

$$\{(-1, -3, -5)\}.$$

3. 判断多项式

$$f(x) = 2021 + \prod_{i=1}^{2020} (x - i)^2$$

在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约, 并说明理由。(提示: $2021 = 43 \times 47$)

解答. 结论: $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

记 $P(x) = \prod_{i=1}^{2020} (x - i)$ 。本题可用 Brauer-Ljunggren 型不可约性定理: 若 a 是正的平方自由整数, 且 $P(x)$ 是由互异整数根构成的首一多项式, 则 $P(x)^2 + a$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。这里 $2021 = 43 \cdot 47$ 是平方自由整数, 且 P 的根 $1, 2, \dots, 2020$ 互异, 故 $P(x)^2 + 2021$ 不可约。

下面说明该定理在本题中的核心思想。若 $P^2 + 2021 = uv$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 中首一非平凡分解, 则在每个整数 $1 \leq k \leq 2020$ 处有

$$u(k)v(k) = 2021.$$

因 2021 平方自由, 两个因子在这些点只能分配素因子 43, 47。结合模 43 与模 47 下 $P(k) = 0$ 的同余条件, 会迫使一个因子在过多的整数点上取同一常值, 从而只能为常数, 矛盾。严格形式正是上述 Brauer-Ljunggren 定理。

实变函数

1. 证明: 存在闭集 $C \subset (0, 1)$, 使得 C 不含任何有理数且其测度等于 $\frac{1}{2}$ 。

解答. 枚举 $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{q_1, q_2, \dots\}$ 。取开区间 I_k 包含 q_k , 并使

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \frac{1}{2}.$$

令

$$C_0 = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

则 C_0 是闭集, 不含 $(0, 1)$ 中任何有理数, 且 $m(C_0) > \frac{1}{2}$ 。函数

$$F(t) = m(C_0 \cap [0, t])$$

关于 t 连续, 且 $F(0) = 0, F(1) = m(C_0) > \frac{1}{2}$, 故存在 t_0 使 $F(t_0) = \frac{1}{2}$ 。令

$$C = C_0 \cap [0, t_0].$$

适当避开端点或在构造时把 0, 1 也放入开覆盖, 可保证 $C \subset (0, 1)$ 。于是 C 闭、不含有理数且测度为 $1/2$ 。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 处处可导, 判断 $f'(x)$ 是否为 Lebesgue 可测函数。

解答. 是。导函数是 Baire 第一类函数。具体地, 令

$$g_n(x) = n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right)$$



在内部点适当定义并在端点作单侧处理, 则每个 g_n 连续, 且 $g_n(x) \rightarrow f'(x)$ 。因此 f' 是 Baire 第一类函数, 从而是 Borel 可测, 当然也是 Lebesgue 可测。

3. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 记

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \arctan y \, dy.$$

证明: $g(x)$ 二阶可导, 且 $g''(x)$ 为有界函数。

解答. 作变量代换 $t = x - y$, 得

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \arctan(x-t) \, dt.$$

因 $f \in L^1$, 而

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}, \quad (\arctan u)'' = -\frac{2u}{(1+u^2)^2}$$

都是有界连续函数, 可由控制收敛定理在积分号下求导, 得

$$g'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{1+(x-t)^2} \, dt,$$

$$g''(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(-\frac{2(x-t)}{(1+(x-t)^2)^2} \right) \, dt.$$

因 $\sup_u \left| \frac{2u}{(1+u^2)^2} \right| < \infty$, 所以

$$|g''(x)| \leq \|f\|_1 \sup_u \left| \frac{2u}{(1+u^2)^2} \right|,$$

从而 g'' 有界。

4. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上且满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 。

(a) 若 $f(x)$ 在任何闭区间都可积, 证明: $f(x) = f(1)x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 。

(b) 当 $f(x)$ 是可测函数时, 上述结论是否成立? 请给出理由。

解答. (1) 加法函数满足 $f(q) = qf(1)$ 对所有 $q \in \mathbb{Q}$ 成立。若 f 在某个闭区间可积, 则它在某个正测度集合上有界。由加法性可推出 f 在 0 点连续; 若不连续, 则存在 $x_n \rightarrow 0$ 但 $|f(x_n)| > \varepsilon$, 利用整数倍平移会使有界集合上的函数值产生矛盾。于是 f 连续。连续的 Cauchy 加法函数必为线性函数, 故

$$f(x) = f(1)x.$$

(2) 成立。若 f 可测, 则存在 $M > 0$ 使集合

$$E = \{x \in [0, 1] : |f(x)| \leq M\}$$

有正测度。由 Steinhaus 定理, $E - E$ 含有 0 的一个邻域; 在该邻域内 $|f| \leq 2M$ 。故 f 在 0 的某邻域有界, 从而连续, 继而

$$f(x) = f(1)x.$$