



复旦大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽 (25)



复旦大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数, $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 判断 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 是否成立.

2. 设 $\mathbb{Z}$ 为整环,

$$A = (3, x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

为 $\mathbb{Z}[x]$ 的理想. 问:

(1) A 是否为主理想? 请说明理由.

(2) $\mathbb{Z}[x]/A$ 是否为整环? 请说明理由.

3. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=2020}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^x n}.$$

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$. 求证: 若 A, B 无公共特征值, 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似于

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

并举例说明去掉条件 A, B 无公共特征值后结论不成立.

5. 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = 10$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(1) = 7$. 问: $f''(x)$ 是否一定能取到某个值, 并说明理由.

6. 设 G 为有限群, $|G|$ 无平方因子, $\varphi: G \rightarrow G$, $g \mapsto g^3$ 是单同态. 求证: G 是循环群.

7. 设 $f \in C[0, 1]$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$

8. 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 求证:

$$|\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|.$$

等号成立当且仅当 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基.



复旦大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^3}{n^4 + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1) 上述条件是否可以确定 $f^{(k)}(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$?

(2) 若 $f_1(x), f_2(x)$ 为满足上述要求的两个函数, 是否存在 $\delta > 0$, 使得 $f_1(x) = f_2(x)$ 在 $[0, \delta]$ 上成立?

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \cos x^n dx$.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上定义, $f([a, b]) \subset (a, b)$, 并存在一个常数 α , 满足 $0 < \alpha < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a, b]$, 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$, 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$.

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a, b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ .

4. (存疑) 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{(1+z)^{1/2}}{z^3} dz$.

5. 设复方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求酉矩阵 U 使得 U^*AU 为对角阵.

6. 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{p \times q}(\mathbb{F})$, $C \in M_{m \times q}(\mathbb{F})$, 证明: 矩阵方程

$$AX - YB = C$$

有解 X, Y 的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

7. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明下列两个结论等价:

(1) V 中任一非零向量都是循环向量, 使 V 成为循环空间.

(2) V 只有平凡的 φ -不变子空间.

8. 设 $A \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$,

$$\begin{aligned} \varphi: M_{m \times n}(\mathbb{F}) &\rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{F}), \\ X &\mapsto AX - XB. \end{aligned}$$

证明: φ 可对角化等价于 A, B 可对角化.



复旦大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上二阶连续可微的有界下凸函数.

(1) 证明: 存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

(2) 计算反常积分 $\int_0^{\infty} x f''(x) dx$.

2. 设 $f(x) \in C^1[-1, 1]$ 是一个正值函数, $f'(x) \neq 0$, 并且当 $x \in [-1, 1]$ 时,

$$\left| x + \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \geq 1.$$

还设 a, b 是 $(-1, 1)$ 中任意两个数, 满足 $a < b$. 证明:

(1) 对于任意 $x \in (a, b)$, 成立 $f(x) < f(a) + f(b)$.

(2) $\frac{1+a}{1+b} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq \frac{1-a}{1-b}$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可以展开为收敛的幂级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0),$$

其中 $r_0 > 0$. 证明: 对任意 $x_1 \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$, $f(x)$ 在 x_1 也可以展开为收敛的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_1)^n, \quad \forall x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1),$$

其中 $r_1 \geq \frac{1}{2}(r_0 - |x_1 - x_0|)$.

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵, 且 A 有 n 个不同的特征值. 设 V_A 是 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 中所有形如 $BA - AB$ 的矩阵全体构成的子空间. 求 V_A 作为复线性空间的维数.

5. 记 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的空间. 令

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

是 n 阶复方阵. 定义线性变换 $T: M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$

$$M \mapsto AMB.$$

(1) 求 T 的所有特征值 (记代数重数) 之和, 答案用 a_{ij}, b_{ij} 表示.

(2) 证明: T 幂零当且仅当 A 或 B 至少有一个幂零.

6. 设 A 是 n 阶可逆实方阵. 证明:

(1) 存在唯一的 n 阶正交阵 P 和实对称正定阵 H , 使得 $A = PH$.

(2) 在 (1) 中, $PH = HP$ 当且仅当 $AA^T = A^T A$.



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 25 日)
来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于学术学位营员, 考试时间 120 分钟.

1. 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - r_n)^{\frac{1}{3}}}{2^n}$, 其中 $\{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中有理数的一个排列, 证明:

(1) $f \in C(\mathbb{R})$.

(2) f 在 $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ 上可导.

(3) $\forall x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, 存在 $\{r_n\}$ 的一个排列, 使得 f 在 x_0 处可导.

2. 设 V 是由点 $(2, -1, -1), (2, 1, 1), (1, 0, 0)$ 构成的三角形绕 y 轴旋转得到的几何体.

(1) 记 $x_0 = (3, 0, 0)$, 求点 x_0 到 V 的最短距离.

(2) 求 V 的体积.

3. (1) 设 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy = 1$, 求 k 的值.

(2) 在 (1) 的条件下, 证明:

$$\left(\iint_{D_1} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) \left(\iint_{D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) < \iint_{D_1 \cap D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy.$$

其中区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid |y| \leq 1\}$.

4. 设 $\mathcal{T}$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换, $A \in M_n(\mathbb{C})$, 并且 $\mathcal{T}$ 可逆当且仅当 A 可逆, 证明:

$$\exists c \in \mathbb{C}, \text{ s.t. } \det(\mathcal{T}A) = c \cdot \det A.$$

5. 设 A 为 n 阶复方阵, 定义 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. 证明:

(1) $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

(2) e^A 可对角化的充分必要条件是 A 可对角化.

(3) 对任意行列式为 1 的 2 阶实方阵 A , 都存在矩阵 B 使得 $A = e^B$.

6. 设 Q 为 $n \times m$ 实矩阵且满足 $Q^\top Q = I_m$, A 为 n 阶实正定矩阵. 证明:

$$Q^\top A^{-1} Q - (Q^\top A Q)^{-1}$$

半正定.



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 27 日)
来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于专业学位营员, 考试时间 120 分钟.

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

2. 设 $f(x) = (e^x \cos \sqrt{3}x)$, 求 $f^{(98)}(x)$.

3. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 + y^2 - xy) dx dy.$$

其中区域 $D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$.

4. 求函数 $f(x) = \sin^2 x$ 在 $x = \pi$ 处的 Taylor 展开式, 并确定其收敛区间.

5. 设 $y(x)$ 为下述常微分方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = e^{3x}$ 满足 $y(0) = y'(0) = 0$ 的解, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - 2(\arctan x)^2}{y(x)}.$$

6. 设

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

计算 $f'_+(0)$ 的值.

7. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

且 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

是 $f(x)$ 的傅里叶级数, 求 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 的值.

8. 计算二重积分

$$\iint_D (x-y)^2 \tan^2(x+y) dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$.

9. 求满足

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

的二次连续可微函数 $f(x)$.

10. 设数列 $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.



复旦大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：考试时间 120 分钟.

1. 填空题 (12 分)

(1) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则参数 t 的取值范围为____.(存疑)

(2) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2b & -b-1 & 1 \end{pmatrix}$ 可对角化, 则 b 的取值范围为____.

(3) 设 A 是 6 阶矩阵, 满足 $A^2 = O$, $\text{rank } A = 3$, 则 A 的 Jordan 标准形为____.

2. 计算题 (30 分)

(1) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的原函数.

(2) 计算二重积分 $\iint_{0 \leq x \leq y \leq \pi} \ln |\sin(x-y)| dx dy$.

(3) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\ln(1-x)}$.

3. 解答题 (58 分)

(1) 已知 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 求积分

$$\int_0^1 (1+x^2)f^2(x) dx$$

能取到的最小值, 并求出此时的 $f(x)$.

(2) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续并且一阶可导, $f'(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得

$$f'(\xi) = 2024(f(\xi) - f(0)).$$

(3) 已知方阵 $C \in M_m(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$, 对于任意矩阵 A, B 都有

$$\text{rank}(C - AB) + n = \text{rank}(D - BA) + m.$$

证明: 存在非零数 k 使得 $C = kI_m$, $D = kI_n$.

(4) 已知 A, B 为 n 阶复方阵, 存在正整数 m 使得

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = O,$$

证明: $|A| = |B|$.



复旦大学数学科学学院

2025 年学术营笔试

来源：小红书作者 Relax

回忆版整理

1. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为实内积空间, $T: V \rightarrow V$ 为线性映射。

(a) 写出 T 的伴随算子 T^* 的定义。

(b) 考虑 $V = \mathbb{R}^2$ 及其一组基 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, 设 V 上两个线性映射在这组基下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

若它们在 V 的某个内积下均成为自伴随算子, 求该内积在上述基下的矩阵。

2. 求 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ 。

3. 求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & (x_2 + \cdots + x_n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & (x_1 + \cdots + x_{n-1})^{n-2} \end{vmatrix}.$$

4. 分析 $\int_0^{+\infty} \sin \left(x^p + \frac{1}{x^p} \right) dx$ 在何时绝对收敛、条件收敛和发散。

5. 设 a_n 为方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 的正实根, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 的收敛域 D , 并问其在 D 中是否绝对收敛和一致收敛。

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

(a) 问: A 是否可对角化?

(b) 设 $\varphi: M(3, \mathbb{R}) \rightarrow M(3, \mathbb{R}), X \mapsto A^{-1}XA$, 求 $\text{tr}(\varphi^{100})$ 。

7. 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\int_0^x \frac{t}{\arctan t} dt - \frac{1}{\pi} x^2 - \frac{4}{\pi^2} x - \frac{8}{\pi^3} \ln x + A \right) = B.$$

求 A 的表达式及 B 的值。