



复旦大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽 (25)



复旦大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数, $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 判断 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 是否成立。

解答：结论成立, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。反证法。假设 f 在点 x_0 处不连续, 则存在收敛序列 $x_n \rightarrow x_0$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y \neq f(x_0)$ 。于是点列 $(x_n, f(x_n))$ 在图像集合 $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 中, 它的极限点为 (x_0, y) 。因为 Γ 是闭集, 所以 $(x_0, y) \in \Gamma$, 推出 $y = f(x_0)$, 矛盾。故 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 。

2. 设 $\mathbb{Z}$ 为整环, $A = (3, x^3 - x^2 + 2x - 1)$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 的理想。问：

- (1) A 是否为主理想？请说明理由。

解答： A 不是主理想。若 $A = (g(x))$, 则 $g(x) \mid 3$, 于是 $g(x) = \pm 1, \pm 3$ 。 $3 \nmid x^3 - x^2 + 2x - 1$, 因此 $x^3 - x^2 + 2x - 1 \notin (3)$, 矛盾。故 A 不能由单个元素生成, 不是主理想。

- (2) $\mathbb{Z}[x]/A$ 是否为整环？请说明理由。

解答： $\mathbb{Z}[x]/A$ 是整环。由环同构

$$\mathbb{Z}[x]/(3, x^3 - x^2 + 2x - 1) \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x^2 + 2x - 1).$$

检验三次多项式 $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ 在 $\mathbb{F}_3$ 无根：

$$f(0) = -1 \neq 0, \quad f(1) = 1 \neq 0, \quad f(2) = 1 \neq 0.$$

域上三次多项式无根则不可约, $(f(x))$ 是素理想, 故商环为整环。

3. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=2020}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^x n}.$$

解答：该极限不存在。对任意 $x > 0$, $\{\frac{1}{\ln^x n}\}$ 单调递减趋于 0, 交错级数收敛。当 $x \rightarrow 0^+$, $\ln^x n = e^{x \ln \ln n} \rightarrow 1$ 。形式极限得到 $\sum_{n=2020}^{\infty} (-1)^n$, 这是发散级数, 故原极限不存在。

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ 。求证：若 A, B 无公共特征值, 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似于 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 。并举例说明去掉条件 A, B 无公共特征值后结论不成立。

解答：取可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} I_n & X \\ O & I_m \end{pmatrix}$, 计算

$$P^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & AX - XB + C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

西尔维斯特方程 $AX - XB = -C$, 当 $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ 时有唯一解 X 。代入该解, 右上角块化为零矩阵, 于是两矩阵相似。

反例：取 $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

M 的 Jordan 标准型是 1 个 4 阶幂零 Jordan 块; $\text{diag}(A, A)$ 是两个 2 阶 Jordan 块, 二者不相似。



5. 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = 10$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 7$ 。问: $f''(x)$ 是否一定能取到某个值, 并说明理由。

解答: 不一定。可以构造一个 $C^2[0, 1]$ 的光滑函数, 过这三点, 图像非常贴近连接三点的折线, 使得二阶导数恒大于 0 (或恒小于 0), 取不到 0。因此 $f''(x)$ 不一定取到某个特定的值。

6. 设 G 为有限群, $|G|$ 无平方因子, $\varphi: G \rightarrow G$, $g \mapsto g^3$ 是单同态。求证: G 是循环群。

解答: $|G|$ 无平方因子, 故 G 是可解群, 并且所有 Sylow 子群都是循环群。 φ 是单射, 有限集上单射必为双射, 于是映射 $g \mapsto g^3$ 是群的自同构。这说明 3 与 $|G|$ 互素。无平方因子群是循环群当且仅当它是交换群。无平方因子非交换群必存在阶为 pq ($p \mid q-1$) 的子群, 此时 3 不与群阶互素矛盾, 故 G 交换。有限交换无平方因子群必循环, 证毕。

7. 设 $f \in C[0, 1]$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$

解答:

$$n \int_0^1 x^n f(1) dx = n f(1) \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow f(1).$$

只需证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx = 0$ 。 $\forall \varepsilon > 0$, 由 f 在 1 连续, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (1 - \delta, 1]$, $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ 。

$$\left| n \int_0^{1-\delta} x^n (f(x) - f(1)) dx \right| \leq 2Mn(1-\delta)^{n+1} \rightarrow 0, \quad M = \max |f|.$$

$$\left| n \int_{1-\delta}^1 x^n (f(x) - f(1)) dx \right| \leq \varepsilon n \int_0^1 x^n dx < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 极限成立。

8. 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 求证:

$$|\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|.$$

等号成立当且仅当 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基。

解答: 这就是 Hadamard 不等式。记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $A^T A$ 的对角元为 $\|\alpha_k\|^2$ 。由谱不等式 $\det(A^T A) \leq \prod_{k=1}^n (A^T A)_{kk}$,

$$|\det(A)|^2 = \det(A^T A) \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|^2.$$

两边开平方即得 $|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|$ 。等号成立 $\iff A^T A$ 为对角矩阵 $\iff (\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$, 也就是 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 正交基。



复旦大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^3}{n^4+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1) 上述条件是否可以确定 $f^{(k)}(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$?

解答：可以确定。令 $g(x) = \frac{x}{1+x^4}$, 则 $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(1/n)}{1+(1/n)^4} = \frac{n^3}{n^4+1}$ 。于是 $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 。点列 $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ 。设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x_n) = 0$, 由唯一性定理（解析函数零点聚点原理）, h 在 0 的邻域恒为 0。 $g(x)$ 在 0 处光滑, 于是 $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$, 所有阶导数唯一确定。

(2) 若 $f_1(x), f_2(x)$ 为满足上述要求的两个函数, 是否存在 $\delta > 0$, 使得 $f_1(x) = f_2(x)$ 在 $[0, \delta]$ 上成立?

解答：存在。 $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ 在点列 $1/n$ 处取值为 0, 0 是零点的聚点。虽然 f 只是 C^∞ , 但是 $h(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(1/n) = 0$, 并且由泰勒展开, 所有导数 $h^{(k)}(0) = 0$ 。再构造 $g(x) = f_1(x) - g_0(x)$, 在零点聚点下, 光滑函数如果在收敛于 0 的序列上取 0, 则其泰勒系数全部为 0; 注：这里注意： C^∞ 函数可以有非平凡零点聚点, 但本题 $f(1/n)$ 的值唯一确定泰勒级数, 于是两个函数在原点有完全相同的泰勒展开; 结合条件 $f(1/n) = \frac{n^3}{n^4+1}$, 可以推出在原点邻域二者相等。

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \cos x^n dx$.

解答：做变量替换 $t = x^n \Rightarrow x = t^{1/n}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$ 。

$$I_n = \int_0^{+\infty} \cos(t) \cdot \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

由控制收敛定理, $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \rightarrow 0$, $t > 0$ 。于是极限为 0。

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上定义, $f([a, b]) \subset (a, b)$, 并存在一个常数 α , 满足 $0 < \alpha < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a, b]$, 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$, 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$.

解答：由利普希茨条件, f 连续。定义 $\varphi(x) = f(x) - x$ 。 $f(a) > a \Rightarrow \varphi(a) = f(a) - a > 0$; $f(b) < b \Rightarrow \varphi(b) = f(b) - b < 0$ 。由介值定理, $\exists \xi \in (a, b)$, $\varphi(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \xi$, 不动点存在。

唯一性：若 ξ, η 都是不动点, 则

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leq \alpha|\xi - \eta|, \quad 0 < \alpha < 1 \implies \xi = \eta.$$

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a, b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ .

解答：

$$|a_{n+1} - \xi| = |f(a_n) - f(\xi)| \leq \alpha|a_n - \xi|$$

递推得 $|a_n - \xi| \leq \alpha^n |a_0 - \xi|$, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha^n \rightarrow 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$.

4. 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{(1+z)^{1/2}}{z^3} dz$.

解答：分支选取：取割线 $(-\infty, -1]$, $|z| = 2$ 在解析区域内。由高阶导数公式

$$f(z) = (1+z)^{1/2}, \quad f''(z) = -\frac{1}{4}(1+z)^{-3/2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{\pi i}{4}.$$

5. 设复方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求酉矩阵 U 使得 U^*AU 为对角阵.



解答: A 是埃尔米特矩阵。求特征值:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -i & 0 \\ i & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 - 1] = \lambda(\lambda - 2)^2.$$

特征根: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. $\lambda = 0$ 的单位特征向量: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$. $\lambda = 2$ 的两个正交单位特征向量:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 于是酉矩阵

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \text{diag}(0, 2, 2).$$

6. 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), B \in M_{p \times q}(\mathbb{F}), C \in M_{m \times q}(\mathbb{F})$, 证明: 矩阵方程

$$AX - YB = C$$

有解 X, Y 的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

解答: 必要性: 若 $AX - YB = C$, 则 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - YB \\ O & B \end{pmatrix}$. 做初等变换, 右乘可逆矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & -X \\ O & I_q \end{pmatrix}$, 得到 $\begin{pmatrix} A & -YB \\ O & B \end{pmatrix}$; 再左乘 $\begin{pmatrix} I_m & Y \\ O & I_p \end{pmatrix}$, 化为 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 初等变换不改变秩, 故两矩阵秩相等。

充分性: 两分块矩阵秩相等, A 行最简、 B 列最简, 可通过矩阵的等价标准形分解, 一定能找到 X, Y 满足方程。

7. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明下列两个结论等价:

(1) V 中任一非零向量都是循环向量, 使 V 成为循环空间。

(2) V 只有平凡的 φ -不变子空间。

解答: (1) $\Rightarrow$ (2): 设 W 是非零 φ -不变子空间, 取非零 $\alpha \in W$. 由条件, α 是循环向量, 生成整个 V , 于是 $V = \langle \alpha, \varphi\alpha, \dots, \varphi^{n-1}\alpha \rangle \subset W$, 得 $W = V$. 故不变子空间只有 $\{0\}, V$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 任取非零向量 α , 记循环子空间 $Z(\alpha, \varphi)$, 它是 φ -不变子空间。由条件不变子空间只有平凡, 故 $Z(\alpha, \varphi) = V$, α 为循环向量。证毕。

8. 设 $A \in M_{m \times m}(\mathbb{F}), B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$,

$$\varphi: M_{m \times n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{F}), \quad X \mapsto AX - XB.$$

证明: φ 可对角化等价于 A, B 可对角化。

解答: 取 A 的特征值 λ , 特征向量 u ; B 的特征值 μ , 特征向量 v . 则矩阵 $X = uv^T$ 满足:

$$\varphi(X) = A(uv^T) - (uv^T)B = \lambda uv^T - \mu uv^T = (\lambda - \mu)X.$$

若 A, B 均可对角化, 则存在由形如 uv^T 的矩阵构成 $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ 的一组特征基, 于是 φ 可对角化。

反过来, 若 φ 可对角化, 反证可得 A, B 都不能有若尔当块, 因此二者均可对角化。



复旦大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上二阶连续可微的有界下凸函数.

(1) 证明: 存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

解答: f 为下凸函数, 则 $f''(x) \geq 0$, 于是 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增. 反证: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 取 $x_0 > 0$, 当 $x > x_0$, $f'(x) \geq M > 0$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f(x_0) + M(x - x_0) \rightarrow +\infty,$$

这与 $f(x)$ 有界矛盾. 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L < +\infty$. 若 $L > 0$, 同样推出 $f(x) \rightarrow +\infty$; 若 $L < 0$, 推出 $f(x) \rightarrow -\infty$, 都与有界矛盾, 因此 $L = 0$. 下凸有界函数必有极限, 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

(2) 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} x f''(x) dx$.

解答: 分部积分,

$$\int_0^{+\infty} x f''(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[x f'(x) \right]_0^b - \int_0^{+\infty} f'(x) dx.$$

已经证得 $\lim_{b \rightarrow +\infty} f'(b) = 0$, 又 $f(x)$ 有界, 可得 $\lim_{b \rightarrow +\infty} b f'(b) = 0$.

$$\int_0^{+\infty} x f''(x) dx = 0 - (f(+\infty) - f(0)) = f(0) - A.$$

2. 设 $f(x) \in C^1[-1, 1]$ 是一个正值函数, $f'(x) \neq 0$, 并且当 $x \in [-1, 1]$ 时,

$$\left| x + \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \geq 1.$$

还设 a, b 是 $(-1, 1)$ 中任意两个数, 满足 $a < b$. 证明:

(1) 对于任意 $x \in (a, b)$, 成立 $f(x) < f(a) + f(b)$.

解答: 令 $g(x) = x + \frac{f(x)}{f'(x)}$, 条件 $|g(x)| \geq 1$. 计算导数:

$$g'(x) = 1 + \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 2 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

$g(x)$ 连续, $g([-1, 1]) \subset (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 于是 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 恒大于等于 1 或者恒小于等于 -1. 不妨先取 $g(x) \geq 1$, 即

$$x + \frac{f(x)}{f'(x)} \geq 1 \implies \frac{f'(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{1-x}.$$

两边积分即可证得不等式.

(2) $\frac{1+a}{1+b} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq \frac{1-a}{1-b}$.

解答: 由 $x + \frac{f(x)}{f'(x)} \geq 1$, 变形:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{1-x}.$$

在区间 $[a, b]$ 积分:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx \geq \int_a^b \frac{1}{1-x} dx \implies \ln \frac{f(b)}{f(a)} \geq -\ln \frac{1-b}{1-a} = \ln \frac{1-a}{1-b},$$

得到 $\frac{f(b)}{f(a)} \geq \frac{1-a}{1-b}$; 再由另一半 $x + \frac{f(x)}{f'(x)} \leq -1$ 可证右侧 $\frac{f(b)}{f(a)} \leq \frac{1-a}{1-b}$.



3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可以展开为收敛的幂级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0),$$

其中 $r_0 > 0$. 证明: 对任意 $x_1 \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$, $f(x)$ 在 x_1 也可以展开为收敛的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_1)^n, \quad \forall x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1),$$

其中 $r_1 \geq \frac{1}{2}(r_0 - |x_1 - x_0|)$.

解答: 幂级数的收敛圆盘内部的点仍然是函数的解析点。原级数收敛半径 $R \geq r_0$ 。以 x_1 为圆心, 取半径

$$r_1 = r_0 - |x_1 - x_0|.$$

此时区间 $(x_1 - r_1, x_1 + r_1)$ 完全落在原来的收敛区间 $(x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ 之内, 函数 $f(x)$ 在该开区间解析, 因此在 x_1 点可展开为泰勒级数, 其收敛半径至少为 $r_0 - |x_1 - x_0|$, 自然 $r_1 \geq \frac{1}{2}(r_0 - |x_1 - x_0|)$ 成立。

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵, 且 A 有 n 个不同的特征值. 设 V_A 是 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 中所有形如 $BA - AB$ 的矩阵的全体构成的子空间. 求 V_A 作为复线性空间的维数.

解答: 映射 $\text{ad}_A : X \mapsto AX - XA$ 。 A 可对角化、特征值互不相同。 $\ker(\text{ad}_A)$ 是所有与 A 可交换的矩阵, 只能是对角矩阵, $\dim \ker(\text{ad}_A) = n$ 。由维数公式

$$\dim V_A = \dim M_{n \times n}(\mathbb{C}) - \dim \ker(\text{ad}_A) = n^2 - n.$$

5. 记 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的空间. 令

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

是 n 阶复方阵. 定义线性变换

$$\begin{aligned} T : M_{n \times n}(\mathbb{C}) &\rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AMB. \end{aligned}$$

- (1) 求 T 的所有特征值 (记代数重数) 之和, 答案用 a_{ij}, b_{ij} 表示.

解答: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, B 的特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 。克罗内克乘积: T 在标准基下矩阵为 $A \otimes B^T$, 它全体特征值为 $\lambda_i \mu_j$, $1 \leq i, j \leq n$ 。迹等于所有特征值之和:

$$\text{tr}(T) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{jj} \right).$$

- (2) 证明: T 幂零当且仅当 A 或 B 至少有一个幂零.

解答: T 幂零 $\iff$ 所有特征值 $\lambda_i \mu_j = 0$ 。若 A 幂零, 则所有 $\lambda_i = 0$, 于是 $\lambda_i \mu_j = 0$, T 幂零; 若 B 幂零, 同理 T 幂零。反过来, T 幂零, 则 $\forall i, j, \lambda_i \mu_j = 0$ 。如果 A 不是幂零, 则 $\exists \lambda_i \neq 0$, 于是必须 $\forall j, \mu_j = 0$, B 幂零。证毕。

6. 设 A 是 n 阶可逆实方阵. 证明:

- (1) 存在唯一的 n 阶正交阵 P 和实对称正定阵 H , 使得 $A = PH$.

解答: 极分解。矩阵 $A^T A$ 实对称正定, 于是唯一存在正定平方根 $H = (A^T A)^{1/2}$ 。令 $P = AH^{-1}$, 验证正交性:

$$P^T P = H^{-1} A^T A H^{-1} = H^{-1} H^2 H^{-1} = I.$$

于是 P 正交, $A = PH$ 。唯一性可由平方根唯一性得到。



(2) 在 (1) 中, $PH = HP$ 当且仅当 $AA^T = A^T A$.

解答: $\Rightarrow$: $PH = HP, A = PH$ 。

$$AA^T = PH(PH)^T = PH^2P^T, \quad A^T A = H^2.$$

$PH = HP \Rightarrow PHP^T = H$, 于是 $PH^2P^T = H^2$, 推出 $AA^T = A^T A$ 。

$\Leftarrow$: $AA^T = A^T A, A$ 正规矩阵。 $A^T A = H^2, AA^T = PH^2P^T$, 于是 $PH^2P^T = H^2$ 。正定矩阵平方根唯一, $PHP^T = H$, 得 $PH = HP$ 。



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 25 日)

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于学术学位营员, 考试时间 120 分钟.

1. 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-r_n)^{\frac{1}{3}}}{2^n}$, 其中 $\{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中有理数的一个排列, 证明:

(1) $f \in C(\mathbb{R})$.

解答: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{(x-r_n)^{1/3}}{2^n} \right| \leq \frac{(|x|+1)^{1/3}+1}{2^n}$. 级数 $\sum \frac{1}{2^n}$ 收敛, 由魏尔斯特拉斯判别法,

该函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 每一项 $u_n(x) = \frac{(x-r_n)^{1/3}}{2^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 一致收敛的连续函数列极限连续, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(2) f 在 $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ 上可导.

解答: 取 $x_0 \notin [0, 1]$, 则存在 $\delta > 0$, 使得区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 与 $[0, 1]$ 不交. 逐项求导得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^n (x-r_n)^{2/3}}$. 在该邻域内 $|x-r_n| \geq \delta$, 通项绝对值 $\leq \frac{1}{3\delta^{2/3} 2^n}$, 级数一致收敛. 由逐项求导定理, $f'(x)$ 存在, 故 f 在 $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ 处处可导.

(3) $\forall x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, 存在 $\{r_n\}$ 的一个排列, 使得 f 在 x_0 处可导.

解答: x_0 是 $[0, 1]$ 内无理数, 重新排列有理数序列, 令 r_n 离 x_0 衰减得足够快, 使得导数级数 $\sum \frac{1}{3 \cdot 2^n (x_0-r_n)^{2/3}}$ 收敛. 只要 $|x_0-r_n| > 2^{-3n/4}$, 通项 $\leq \frac{1}{3 \cdot 2^n \cdot 2^{-n/2}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n/2}}$, 级数收敛. 此时逐项求导级数收敛, $f'(x_0)$ 存在.

2. 设 V 是由点 $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ 构成的三角形绕 y 轴旋转得到的几何体.

(1) 记 $x_0 = (3, 0, 0)$, 求点 x_0 到 V 的最短距离.

解答: 三角形三个顶点绕 y 轴旋转, 得到三条圆周:

$$y = -1, x^2 + z^2 = 4; \quad y = 1, x^2 + z^2 = 4; \quad y = 0, x^2 + z^2 = 1.$$

旋转体上任意一点坐标 (x, y, z) , 满足 $x^2 + z^2$ 在两条直线线段旋转形成的圆台侧面上. 点 $(3, 0, 0)$, $y = 0$, 旋转体在 $y = 0$ 截面圆盘半径为 1. 最短距离 $d = 3 - 1 = 2$.

(2) 求 V 的体积.

解答: 旋转体为圆台. $y \in [-1, 1]$, 截面半径函数 $R(y) = y + 2$.

$$V = \pi \int_{-1}^1 R(y)^2 dy = \pi \int_{-1}^1 (y+2)^2 dy = \pi \int_{-1}^1 (y^2 + 4y + 4) dy = \pi \left(\frac{2}{3} + 8 \right) = \frac{26\pi}{3}.$$

3. (1) 设 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy = 1$, 求 k 的值.

解答: 极坐标变换,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{kr^2} r dr d\theta.$$

积分收敛必须 $k < 0$. 令 $u = r^2$,

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{ku} du = \frac{\pi}{-k} = 1 \implies k = -\pi.$$

(2) 在 (1) 的条件下, 证明:

$$\left(\iint_{D_1} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) \left(\iint_{D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) < \iint_{D_1 \cap D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy.$$

其中区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid |y| \leq 1\}$.



解答：记 $f(x, y) = e^{k(x^2+y^2)} > 0$, $k = -\pi < 0$, 函数径向递减。利用概率视角： $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1$, f 是二维高斯概率密度。左边 $P(D_1)P(D_2)$, 右边 $P(D_1 \cap D_2)$ 。 D_1 与 D_2 不是独立事件, 且 D_1 发生的条件下 $|y| \leq 1$ 的条件概率大于 $P(D_2)$:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_2 | D_1)P(D_1) > P(D_2)P(D_1).$$

不等式成立。

4. 设 $\mathcal{T}$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换, $A \in M_n(\mathbb{C})$, 并且 $\mathcal{T}$ 可逆当且仅当 A 可逆, 证明:

$$\exists c \in \mathbb{C}, \text{ s.t. } \det(\mathcal{T}A) = c \cdot \det A.$$

解答：条件： $\det A = 0 \iff \det(\mathcal{T}(A)) = 0$, 因此 $\det(\mathcal{T}(A))$ 作为 A 的 n^2 元多项式, 它的零点集与 $\det(A)$ 的零点集完全一致。在复数域上, 不可约多项式 $\det A$ 的多项式倍只能是常数乘以 $\det A$ 。于是存在常数 c , $\det(\mathcal{T}(A)) = c \det(A)$ 。

5. 设 A 为 n 阶复方阵, 定义 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, 证明:

$$(1) \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}.$$

解答：若 A 上三角, 对角元 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 e^A 上三角, 对角元 e^{λ_i} 。

$$\det(e^A) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}.$$

一般矩阵可由上三角矩阵逼近, 连续性得等式成立。

(2) e^A 可对角化的充分必要条件是 A 可对角化。

解答：必要性：若 A 有 Jordan 块 $J_k(\lambda)$, $k \geq 2$, 则 $e^{J_k(\lambda)}$ 仍然是一个非对角可分 Jordan 块, 因此 e^A 不可对角化; 逆否： e^A 可对角化 $\implies A$ 无高阶 Jordan 块, A 可对角化。充分性：若 A 可对角化, $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 $e^A = Pe^{\Lambda}P^{-1}$, e^{Λ} 对角矩阵, e^A 可对角化。

(3) 对任意行列式为 1 的 2 阶实方阵 A , 都存在矩阵 B 使得 $A = e^B$ 。

解答： $\det A = 1$ 。实二阶矩阵分三类：1. 两个不同实特征值 λ, λ^{-1} , 取对角对数；2. 二重特征值 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e^B = A; 3. 一对共轭复特征值 $e^{\pm i\theta}$, 旋转矩阵 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$$

$$\text{取 } B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, e^B = A. \text{ 所有情形均存在 } B.$$

6. 设 Q 为 $n \times m$ 实矩阵且满足 $Q^T Q = I_m$, A 为 n 阶实正定矩阵. 证明:

$$Q^T A^{-1} Q - (Q^T A Q)^{-1}$$

半正定。

解答：利用矩阵舒尔补 / 柯西交错定理, 或者正定矩阵的凹不等式。令 $P = A^{1/2}Q$, 由 $Q^T Q = I_m$, $P^T P = Q^T A Q$ 。目标矩阵:

$$Q^T A^{-1} Q - (P^T P)^{-1} = P^T (A^{-1} - A^{-1/2} Q (P^T P)^{-1} Q^T A^{-1/2}) P.$$

括号内是正交投影算子的补, 半正定, 故原式半正定。



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 27 日)

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于专业学位营员, 考试时间 120 分钟。

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

解答: 令 $t = \frac{1}{x}$, $t \rightarrow 0^+$ 。

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

答案: $\frac{1}{2}$.

2. 设 $f(x) = (e^x \cos \sqrt{3}x)$, 求 $f^{(98)}(x)$.

解答: 欧拉公式, $\cos \sqrt{3}x = \operatorname{Re} e^{i\sqrt{3}x}$ 。

$$e^x \cos \sqrt{3}x = \operatorname{Re} e^{(1+i\sqrt{3})x}.$$

记 $\lambda = 1 + i\sqrt{3}$, 模长 $|\lambda| = \sqrt{1+3} = 2$, 辐角 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\lambda = 2e^{i\pi/3}$ 。

$$\lambda^{98} = 2^{98} e^{i\frac{98\pi}{3}} = 2^{98} e^{i(32\pi + \frac{2\pi}{3})} = 2^{98} e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$f^{(98)}(x) = \operatorname{Re} (\lambda^{98} e^{\lambda x}) = 2^{98} e^x \cos \left(\sqrt{3}x + \frac{2\pi}{3} \right).$$

3. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 + y^2 - xy) dx dy,$$

其中区域 $D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$.

解答: 极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 。边界: $r^4 \leq r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \implies r^2 \leq \cos 2\theta$ 。 $x \geq 0$, 于是 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。被积函数 $x^2 + y^2 - xy = r^2 - r^2 \cos \theta \sin \theta$ 。注意到 $xy = r^2 \sin \theta \cos \theta$ 关于 θ 奇函数, 积分区间对称, 该项积分等于 0。

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{4} \cos^2 2\theta d\theta.$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \stackrel{u=2\theta}{=} \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

答案: $\frac{\pi}{16}$.

4. 求函数 $f(x) = \sin^2 x$ 在 $x = \pi$ 处的 Taylor 展开式, 并确定其收敛区间。

解答: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 。令 $t = x - \pi$, $x = \pi + t$ 。

$$\cos 2x = \cos(2\pi + 2t) = \cos 2t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x - \pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

收敛区间: $(-\infty, +\infty)$.



5. 设 $y(x)$ 为下述常微分方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = e^{3x}$ 满足 $y(0) = y'(0) = 0$ 的解, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - 2(\arctan x)^2}{y(x)}.$$

解答: 泰勒展开分子:

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4), \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$2(\arctan x)^2 = 2\left(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4).$$

$$\text{分子} = x^2 - \frac{x^2}{2} - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) = -x^2 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

初值 $y(0) = y'(0) = 0$, 代入方程 $y''(0) = e^0 = 1$, 所以 $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = -2.$$

答案: **-2**.

6. 设

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

计算 $f'_+(0)$ 的值.

解答: 分部积分. 令 $u = t^2$, $dv = \cos \frac{1}{t} \frac{dt}{t^2}$ 。

$$\int \cos \frac{1}{t} dt = t^2 \sin \frac{1}{t} - \int 2t \sin \frac{1}{t} dt.$$

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} - \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt \right) = 0.$$

答案: **0**.

7. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

且 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

是 $f(x)$ 的傅里叶级数, 求 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 的值.

解答: 周期 $T = 2$, 偶函数. $S(-5/2) = S(-1/2) = S(1/2)$ 。 $x = \frac{1}{2}$ 是连续点, $S\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 。

答案: **$\frac{1}{2}$** .

8. 计算二重积分

$$\iint_D (x-y)^2 \tan^2(x+y) dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$.



解答：换元 $u = x - y$, $v = x + y$ 。雅可比行列式 $J = \frac{1}{2}$ 。区域变换后关于原点对称，被积函数 $\tan^2 v$, $(x - y)^2 = u^2$ 。

$$I = \frac{1}{2} \iint u^2 \tan^2 v \, du \, dv = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u^2 \, du \right) \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 v \, dv \right).$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u^2 \, du = \frac{\pi^3}{12}, \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 v \, dv = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec^2 v - 1) \, dv = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{12} \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^3(4 - \pi)}{48}.$$

9. 求满足

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x - t)f(t) \, dt$$

的二次连续可微函数 $f(x)$ 。

解答：变形 $f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t) \, dt + \int_0^x t f(t) \, dt$ 。求导两次：

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t) \, dt, \quad f''(x) = -\sin x - f(x).$$

微分方程： $f''(x) + f(x) = -\sin x$ ，初值 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ 。齐次解 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ，特解 $y^* = \frac{1}{2}x \cos x$ 。

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x.$$

10. 设数列 $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ 。

(1) 证明 $\{a_n\}$ 收敛。

解答：考察差分

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}.$$

$$\text{有理化：} 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0.$$

$\{a_n\}$ 单调递减。放缩： $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ ，累加得 $a_n > -2$ ，数列有下界。单调递减有下界数列必收敛。

(2) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 。

解答：由 (1)， $1 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + a_n$ ， $\{a_n\}$ 收敛故有界。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} + a_n}{\sqrt{n}} = 2.$$

答案：2.



复旦大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷仅适用于学术学位营员，考试时间 120 分钟。

1. 填空题 (12 分)

- (1) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则参数 t 的取值范围为__.

解答：二次型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

顺序主子式:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0 \implies -2 < t < 2.$$

$$\Delta_3 = \det(A) = 4 - 4t - 4t^2 > 0 \implies t^2 + t - 1 < 0 \implies \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

取交集, $t \in \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

- (2) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2b & -b-1 & 1 \end{pmatrix}$ 可对角化, 则 b 的取值范围为__.

解答：先求特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

$\lambda = -1$ 二重根, 可对角化等价于 $\dim \ker(A + I) = 2$, 即 $\text{rank}(A + I) = 1$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2b & -b-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

第二行 $(4, -4, 0)$, 第一行 $(2, -2, 4)$ 线性无关, $\text{rank} \geq 2$. $\text{rank}(A + I) = 2$ 恒成立, 不存在 b 使得秩为 1, 无实数 b 满足条件.

- (3) 设 A 是 6 阶矩阵, 满足 $A^2 = O, \text{rank } A = 3$, 则 A 的 Jordan 标准形为__.

解答: $A^2 = 0 \implies$ Jordan 块阶数最多为 2. 设 2- 阶块个数为 s . 每个 2 阶块贡献秩 1, 1 阶零块秩 0, 故 $\text{rank}(A) = s = 3$. 总阶数: $2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 6$.

$$J = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0, 0 \right).$$

2. 计算题 (30 分)

- (1) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的原函数.

解答: $x \neq 0$, 分部积分

$$\int \cos \frac{1}{x} dx = x^2 \sin \frac{1}{x} - \int 2x \sin \frac{1}{x} dx.$$



$$F(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(2) 计算二重积分 $\iint_{0 \leq x \leq y \leq \pi} \ln |\sin(x-y)| dx dy$.

解答: 令 $u = y - x$, $v = x + y$ 。区域 $0 \leq x \leq y \leq \pi$, $0 \leq u \leq \pi$, $u \leq v \leq 2\pi - u$, 雅可比 $J = \frac{1}{2}$ 。

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\pi - u) \ln |\sin u| du = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \ln \sin u du - \frac{1}{2} \int_0^\pi u \ln \sin u du.$$

$$\int_0^\pi \ln \sin u du = -\pi \ln 2, \quad \int_0^\pi u \ln \sin u du = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.$$

$$I = \frac{\pi}{2}(-\pi \ln 2) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{2} \ln 2 \right) = -\frac{\pi^2}{4} \ln 2.$$

(3) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\ln(1-x)}$ 。

解答: $\ln(1-x) \sim -x$, $x \rightarrow 1^-$ 。由 Stolz-Cesàro 与生成函数渐近, $\sum a_n x^n \sim -\ln(1-x)$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\ln(1-x)} = -1.$$

3. 解答题 (58 分)

(1) 已知 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 求积分

$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx$$

能取到的最小值, 并求出此时的 $f(x)$ 。

解答: 柯西 - 施瓦茨不等式

$$1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \sqrt{\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \geq \frac{1}{\pi/4} = \frac{4}{\pi}.$$

等号成立当且仅当

$$f(x) \sqrt{1+x^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \implies f(x) = \frac{\lambda}{1+x^2}.$$

$$\text{代入 } \int_0^1 \frac{\lambda}{1+x^2} dx = \lambda \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \implies \lambda = \frac{4}{\pi}. \text{ 最小值为 } \frac{4}{\pi}, \text{ 此时 } f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}.$$

(2) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续并且一阶可导, $f'(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得

$$f'(\xi) = 2024(f(\xi) - f(0)).$$

解答: 构造辅助函数

$$\varphi(x) = e^{-2024x} (f(x) - f(0)).$$

$\varphi(0) = 0$ 。分两种情形: ① $\varphi(2) = 0$, 罗尔定理, $\exists \xi \in (0, 2)$, $\varphi'(\xi) = 0$, 展开即得; ② $\varphi(2) \neq 0$ 。由 $\varphi'(1) = e^{-2024} (f'(1) - 2024(f(1) - f(0))) = e^{-2024} \cdot (-2024(f(1) - f(0)))$ 。再用达布定理, 导数可取介于 $\varphi'(0)$ 与 $\varphi'(2)$ 之间的值, 必存在 $\xi \in (0, 2)$, $\varphi'(\xi) = 0$, 原式成立。



(3) 已知方阵 $C \in M_m(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$, 对于任意矩阵 A, B 都有

$$\text{rank}(C - AB) + n = \text{rank}(D - BA) + m.$$

证明: 存在非零数 k 使得 $C = kI_m$, $D = kI_n$.

解答: 取 $A = 0$, 则 $\text{rank}(C) + n = \text{rank}(D) + m$. 取任意可逆矩阵 P, Q , 令 $A = P$, $B = Q^{-1}$, 则 $AB = I_m$, $BA = I_n$,

$$\text{rank}(C - I_m) + n = \text{rank}(D - I_n) + m.$$

再取秩 1 矩阵 AB , 可推得 $C - \lambda I$ 对任意 λ 奇异, 只有当 C 为数量矩阵 kI_m ; 同理 $D = kI_n$.

(4) 已知 A, B 为 n 阶复方矩阵, 存在正整数 m 使得

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = O,$$

证明: $|A| = |B|$.

解答: 原式就是 $(A - B)^m = 0$, 即 $A - B$ 幂零矩阵。于是 A 与 B 的特征多项式相等, 所有特征值之和相同, 行列式相等, $\det A = \det B$.



复旦大学数学科学学院

2025 年学术营笔试

来源：小红书作者 Relax

回忆版整理

1. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为实内积空间, $T: V \rightarrow V$ 为线性映射。

(a) 写出 T 的伴随算子 T^* 的定义。

解答: $T^*: V \rightarrow V$ 是唯一线性算子满足: 对任意 $u, v \in V$,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle.$$

(b) 考虑 $V = \mathbb{R}^2$ 及其一组基 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, 设 V 上两个线性映射在这组基下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

若它们在 V 的某个内积下均成为自伴随算子, 求该内积在上述基下的矩阵。

解答: 设内积矩阵 $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, G 正定对称。算子自伴等价于 $GA = A^T G, GB = B^T G$ 。

$$GA = A^T G \implies \begin{cases} b = 0 \\ 6b + a - c = 0 \end{cases} \implies b = 0, a = c.$$

代入第二个方程 $GB = B^T G$, 自动成立。取 $a = c > 0$, 可取

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{所有解为 } kI, k > 0).$$

2. 求 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$.

解答: 分部积分 + 狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = - \frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

答案: $\frac{\pi}{2}$.

3. 求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & (x_2 + \cdots + x_n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & (x_1 + \cdots + x_{n-1})^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解答: 令 $S_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j$, 第 i 行末元 S_i^{n-2} 。该行列式本质为范德蒙德型, 展开 S_i^{n-2} 后可表示为前面行的线性组合,

$$D = 0.$$

4. 分析 $\int_0^{+\infty} \sin \left(x^p + \frac{1}{x^p} \right) dx$ 在何时绝对收敛、条件收敛和发散。

解答: 换元 $t = x^p$ 。 - $p \leq 0$: $x \rightarrow +\infty$ 时被积函数不趋于 0, 积分发散。 - $p > 0$: 拆分 $[0, 1]$ 与 $[1, +\infty)$; 无穷远处用狄利克雷判别法。绝对值: $|\sin(\dots)|$ 不衰减, ** 永远不绝对收敛 **; $p > 0$ 条件收敛; $p \leq 0$ 发散。



5. 设 a_n 为方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 的正实根, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 的收敛域 D , 并问其在 D 中是否绝对收敛和一致收敛。

解答: 先估计根: $a_n \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$ 。级数 $\sum \frac{1}{n} \cos nx$: - 收敛域: $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 在 $x = 2k\pi, \sum a_n$ 发散。- 非端点处条件收敛, ** 不绝对收敛 **; 在不含 $2k\pi$ 的闭区间上一致收敛, 全体收敛域上不一致收敛。

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) 问: A 是否可对角化?

解答: 特征值 $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ 。

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(A - I) = 2.$$

几何重数 $= 1 < 2$, A 不可对角化。

- (b) 设 $\varphi: M(3, \mathbb{R}) \rightarrow M(3, \mathbb{R}), X \mapsto A^{-1}XA$, 求 $\text{tr}(\varphi^{100})$ 。

解答: φ 是相似变换诱导的线性算子, 其 9 维矩阵的迹等于特征值之和, 即 A 的全部特征值两两乘积之和。 A 的特征值: $1, 1, 2$ 。 $\varphi^{100}(X) = A^{-100}XA^{100}$, φ^{100} 的特征值: $\lambda_i^{-1}\lambda_j$ 的 100 次幂。

$$\text{tr}(\varphi^{100}) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2^{100} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2^{100} + 2^{-1} \cdot 2 + 2^{-1} \cdot 2 + 2^{-1} \cdot 2 = 6 + 2^{101}.$$

7. 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\int_0^x \frac{t}{\arctan t} dt - \frac{1}{\pi} x^2 - \frac{4}{\pi^2} x - \frac{8}{\pi^3} \ln x + A \right) = B.$$

求 A 的表达式及 B 的值。

解答: 渐近展开 $t \rightarrow +\infty, \frac{t}{\arctan t} = \frac{t}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} - \dots}$ 。

$$\frac{t}{\arctan t} = \frac{2}{\pi} t + \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3 t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

积分:

$$\int_0^x \frac{t}{\arctan t} dt = \frac{1}{\pi} x^2 + \frac{4}{\pi^2} x + \frac{8}{\pi^3} \ln x + A + o(1).$$

余项积分给出常数项 A ; 再乘 x 求极限: $B = -\frac{8}{\pi^4}$ 。