



浙江大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽 (25)



浙江大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 用定义证明数列 $\{\cos n\}$ 发散.
2. (10 分) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (r > 0)$ 的面积.
3. (10 分) 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

4. (10 分) 设 $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

求证: 存在 $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 使得

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^2[0, 2]$,

$$|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [0, 1].$$

求证: $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in [0, 2]$.

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 给定空间中由 4 个向量所构成的向量组, 求该向量组张成的子空间的基和维数.
2. (10 分) 设 A 为实对称矩阵, 其主子式均非负. 求证: 二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 半正定.
3. (15 分) 设 V 为复线性空间, 映射 $\varphi: V \rightarrow V$ 满足

$$(1) \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

$$(2) \varphi(av) = \bar{a}\varphi(v), \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V.$$

$$(3) \varphi^2 = -I_V.$$

求证:

$$(1) \forall 0 \neq v \in V, v \text{ 与 } \varphi(v) \text{ 线性无关}.$$

$$(2) V \text{ 可分解为有限个二维 } \varphi\text{-不变子空间的直和}.$$

4. (15 分) 设 V, U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 为线性映射, $\varphi^2 \neq \mathbf{0}, \varphi^3 = \mathbf{0}$. 求证:

$$(1) \text{ 若 } \text{Ker } \varphi^2 = \{\mathbf{0}\}, \text{ 则 } \varphi \text{ 为单射}.$$

$$(2) \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi^3 \leq 2 \dim \text{Ker } \varphi^2.$$



浙江大学数学科学学院
2020 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 利用上下确界定义实数列 $\{x_n\}$ 的上下极限如下：

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k.$$

- (1) 证明：对于任意的实数列 $\{x_n\}$ ，其上下极限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 在广义实数系下存在。

- (2) 证明：

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

（上式中每个不等式成立是指不等式左右两边都有意义的前提下）

2. (10 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的二次可微函数。记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad k = 0, 2.$$

其中 $f^{(k)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 k 阶导数。

- (1) 证明： $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < +\infty$ ，且 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$ 。

- (2) 设 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。证明： $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。

3. (10 分) 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})} dx,$$

其中 t 是给定的实数。

4. (10 分) 设 $f(x, y)$ 是 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的二次连续可微函数，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$ 。计算积分

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可微函数，满足 $f(0) = 0$ ， $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ 。假设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，证明：对任意

$\alpha > 1$ ， $\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx$ 收敛，并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx \leq \left[\int_0^{+\infty} f(x) dx \right]^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$



2. (10 分) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵, 且均非对角阵. 试问什么条件下一定存在 n 阶可逆实矩阵 $\mathbf{C}$, 使得 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}, \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C}$ 都是对角阵.

3. (10 分) 设

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

是两个实系数多项式, 且 $a_3 b_2 \neq 0$. 这两个多项式的结式定义为如下的行列式:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}.$$

判断是否存在两个多项式 $u(x), v(x)$, 其中 $\deg(u(x)) < 2, \deg(v(x)) < 3$, 使得

$$R(f, g) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

4. (10 分) 设 U 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, $\text{End}_{\mathbb{P}}(U)$ 是所有定义在 U 上的线性变换的全体所构成的线性空间. 试问该线性空间中是否有一组全部由可逆的线性变换所成的基?

5. (10 分) 求 n 阶矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形.



浙江大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n (n \geq 0)$, 试用两种方法证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.
2. (10 分) 举例说明一个在 $\mathbb{R}^2$ 上取值恒正的二元多项式 $P(x, y)$ 可以没有最小值.
3. (15 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的实函数. 若对任何 $0 < \varepsilon < A < +\infty$, $\int_{\varepsilon}^A \frac{f(x)}{x} dx$ 存在, 考虑 Frullani 积分

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx.$$

其中 $\alpha, \beta > 0$ 为常数. 证明:

- (1) 如果 $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 以及 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $I(\alpha, \beta) = (f(+\infty) - f(0+)) \ln \frac{\alpha}{\beta}$.
 - (2) 如果 $f(0+)$ 存在, $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $I(\alpha, \beta) = -f(0+) \ln \frac{\alpha}{\beta}$.
 - (3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $I(\alpha, \beta) = f(+\infty) \ln \frac{\alpha}{\beta}$.
4. (15 分)
- (1) 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 可积且绝对可积, 若 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, 证明:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

是以 2π 为周期的连续函数, 且 $F(x)$ 可以写成两个单调函数之和.

- (2) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛是三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

成为某个在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件.

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 设多项式 $f(x) = x^3 + px + q$ 的三个根为 x_1, x_2, x_3 , 已知多项式 $g(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ 的三个根为 $(x_1 + x_2)^2, (x_1 + x_3)^2, (x_2 + x_3)^2$, 请用 $f(x)$ 的系数表示 r .
2. (10 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是 A 的一个 Moore-Penrose 广义逆, 证明:

- (1) 证明: 当线性方程组 $Ax = \beta$ 有解时, 其通解可以写成

$$x = A^+ \beta + (I_n - A^+ A)y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

- (2) 试问 $A^+ \beta \perp (I_n - A^+ A)y$ 是否对任意的 $y \in \mathbb{R}^n$ 均成立? 请说明详细理由.

3. (10 分) 设 A 是实方阵且特征值不为 0 和 -1 , 证明: A 是正交矩阵当且仅当

$$(A^T + I)^{-1} + (A + I)^{-1} = I.$$

4. (10 分) 设三阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -5 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$



(1) 求 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形.

(2) 求 $\mathbf{A}$ 的所有不变因子, 初等因子及行列式因子.

5. (10 分) 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ 1 & 3 & & \\ & 1 & 3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

的最小多项式并简要说明求解理由.



浙江大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题
来源: 小红书作者 Relax

数学分析 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

- (10 分) 计算 $\iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx dy$, 其中 D 为由 $xy = 1$, $xy = 3$, $x = y^2$, $3x = y^2$ 所围成有界区域.
- (10 分) 设 $\{F_k\}_{k \geq 1}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一族非空有界闭集, 单调下降 (即 $F_k \supset F_{k+1}$, $k \geq 1$). 请用实数连续性定理的任一种等价刻画方式来证明: $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.
- (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f(x)$ 在 0 处的右导数 $f'_+(0) < 0$, 在 1 处的左导数 $f'_-(1) < 0$, $f(0) = f(1) = c$. 证明: $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点.
- (10 分) 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续可微.
- (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上黎曼可积, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx$.

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

- (10 分) 求可逆矩阵 P, Q 使得 PAQ 是 A 的等价标准形, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (10 分) 下列命题是否正确? 若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例.

(1) 设

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}, S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$$

是 n 维欧氏空间 V 的两组线性无关的向量, 满足

$$(\alpha_i, \beta_j) = 0, \forall 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$$

成立, 那么 $s + t \leq n$.

- (2) 存在 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 使得该变换分别将 $(-1, 1, 0)$, $(2, -1, 4)$, $(0, 1, 4)$ 映射为 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$.
- (10 分) 证明: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - x + 1$ 为有理数域上的不可约多项式.
- (10 分) 已知 A, B 都是 3 阶方阵, 证明:

$$|AB - BA| = \frac{1}{3} \text{tr}((AB - BA)^3).$$

- (10 分) 设 A 和 B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵. 证明: $A = B$ 的充分必要条件是对所有的 n 阶对称矩阵 C 都有

$$|A + C| = |B + C|.$$



浙江大学数学科学学院
2023 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

2. (10 分) 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx$ 满足 $|f(x)| \leq |\sin x|$. 求证: $\left| \sum_{k=1}^n k a_k \right| \leq 1$.

3. (10 分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $y + 2y^2 + y^3 = e^{-x} + x - 1$ 确定, 且

$$y = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3).$$

求 A, B 的值.

4. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可导.

5. (10 分) 已知 $f(x) \in C[0, 1]$, $A = \int_0^1 f(x) dx$,

$$h_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3n}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}nx, & \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_n\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) S_n(x) dx$ (用 A 表示).

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 A 的极小多项式并证明在复数域上该矩阵可以对角化.

2. (10 分) 设矩阵 $A = P^T P$, $B = -Q^T Q$, 其中 P, Q 都是数域上满秩方阵. 若方阵 C 满足 $AC = CB$, 求矩阵 C .

3. (10 分) 假设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量, 计算行列式

$$|2I_n + \alpha\beta^T + \gamma\delta^T|.$$

4. (10 分) 假设 V 是实数域上由 $\{1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x\}$ 张成的线性空间,

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} (x-1)f(x) dx$$



是线性映射. 证明: 存在唯一的 $g(x) \in V$ 使得

$$\varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x) \in V$$

并求出函数 $g(x)$.

5. (10 分) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

令 W 是该 4 个向量张成的线性空间, U 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间, 求 $W + U$ 以及 $W \cap U$ 的维数和一组基.



浙江大学数学科学学院
2024 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

- (10 分) 利用有限覆盖定理证明：闭区间上连续函数必一致连续.
- (10 分) 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛, 且 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致有界. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.
- (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续. 若对 $\forall x \in (0, 1)$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > 0,$$

证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调递增.

- (10 分) 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数, 且在 $[0, \pi]$ 上可积. 证明:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

- (10 分) 假如 T 是实数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $T^2 + I_V = 0$, 定义 $(a + bi)v = av + bT(v)$. 证明: V 关于上述运算构成复数域上的线性空间, 并求其在复数域上的维数.
- (10 分) 设 A, B, C 是 n 阶复方矩阵, 满足 $AB - BA = \overline{C}C^T$, 其中 $\overline{C}$ 是 C 共轭矩阵, C^T 是 C 的转置矩阵, a, b 是两个复数, 且对所有满足 $f(A, B) = 0$ 的多项式 $f(x, y)$ 都成立 $f(a, b) = 0$. 证明: 存在非零向量 v 满足 $Av = av$ 且 $Bv = bv$.
- (10 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个互素的多项式, A 是一个 n 阶方阵, 证明: $f(A)g(A) = O$ 的充分必要条件是 $r(f(A)) + r(g(A)) = n$.
- (10 分) 设 V 是次数不大于 2 的实系数多项式的全体组成的线性空间, 在 V 中求多项式 $q(x)$ 使得对 V 中所有 $p(x)$, 等式 $\int_{-1}^1 p(x)q(x)dx = \int_{-1}^1 p(x)\cos(\pi x)dx$ 都成立.
- (10 分) 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 3$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i & , i = j \\ 3i + 1 & , i < j \\ 2 - 3j & , i > j \end{cases}.$$

证明: 行列式 $\det(A)$ 是 3 的倍数. (题目有误)



浙江大学数学科学学院
2025 年推荐免试直博生招生试卷

来源：小红书作者 Relax

数学分析部分 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中有定义, 记

$$w_f(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in D \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|,$$

证明 f 在 D 上一致连续的充要条件是 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(\delta) = 0$.

2. 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 有连续的左导数 $f'_-(x)$ 且 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'_-(\xi) = 0$.

3. 设 f 是 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的函数, 且在 $x = 1$ 处可导, $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

4. 求证含参变量积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} \cos x dx$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 并计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x dx.$$

5. 设 $0 < f(x) < 1$, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ 均收敛. 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

高等代数部分 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. 设数域 F 上的 n 阶方阵 A, B 的极小多项式分别为 $p(x), q(x)$, $\deg p = \deg q = n$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 的最大公因式为 $d(x)$, $d(x) \neq 1$, 求 $AX - XB = 0$ 的解空间维数.

2. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵, 满足: $(1, 2, \dots, n)A = 0$, $A(1, 2, \dots, n)^T = 0$. 证明 A^* 可表示为 $\alpha\alpha^T$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

3. 设 S, T 为有限维欧氏空间 V 上可交换的线性变换, U 是 T 的不变子空间, W 是 U 在 V 中的正交补空间, 且对任意 $u, v \in V$, 成立 $(Tu, v) = (u, Sv)$. 证明 W 也为 T 的不变子空间.

4. 求

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - a)^n & b & f(\lambda) \\ & (\lambda - a) & b \\ & & (\lambda - a) \end{pmatrix}$$

的等价标准形, 其中 a, b 为给定的复数, $f(\lambda)$ 是给定的多项式.

5. 设 a, b, c, d 为 $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ 的 4 个根, 求以 a^2, b^2, c^2, d^2 为根的首一四次多项式.