



浙江大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽 (25)



浙江大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 用定义证明数列 $\{\cos n\}$ 发散.

证明：反证。假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = A$ 收敛。由 $\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2 \sin n \sin 1$ ，两边取极限，左边极限为 $A - A = 0$ ， $\sin 1 \neq 0$ ，于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0.$$

再利用 $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ ，两边取极限得 $0 + A^2 = 1$ ， $A = \pm 1$ 。- 若 $\cos n \rightarrow 1$ ，则 $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1 \rightarrow \sin 1 \neq 0$ ，与 $\sin n \rightarrow 0$ 矛盾。- 若 $\cos n \rightarrow -1$ ，同理 $\sin(n+1) \rightarrow -\sin 1 \neq 0$ ，矛盾。故 $\{\cos n\}$ 发散。

2. (10 分) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($r > 0$) 的面积.

解答：上半球面方程 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ，投影区域 $D: x^2 + y^2 \leq r^2$ 。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

总面积等于两倍上半球面积，极坐标变换：

$$S = 2 \iint_D \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = 4\pi r^2.$$

3. (10 分) 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$. 求证：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

证明：这是积分核 $\frac{n}{1 + n^2 x^2}$ 的逼近恒等式。拆分积分： $\int_0^1 = \int_0^\delta + \int_\delta^1$ 。 f 在 0 连续， $\forall \varepsilon > 0$ ，可取足够小 $\delta > 0$ ，当 $0 \leq x \leq \delta$ ， $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ 。

$$\int_0^\delta \frac{n(f(x) - f(0))}{1 + n^2 x^2} dx \leq \varepsilon \int_0^\delta \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx = \varepsilon \arctan(n\delta) \leq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}.$$

第二项：在 $[\delta, 1]$ ， $\frac{n}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{n}{1 + n^2 \delta^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)，由有界收敛定理，

$$\int_\delta^1 \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2} dx \rightarrow 0.$$

再计算主项：

$$\int_0^1 \frac{nf(0)}{1 + n^2 x^2} dx = f(0) \arctan(n) \rightarrow f(0) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

综合即证。

4. (10 分) 设 $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

求证：存在 $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ，使得

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$



证明: $\mathbb{R}^2$ 是单连通区域, 恰当场的判定。构造原函数

$$U(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, s) ds.$$

求偏导:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, s) ds = P(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial P}{\partial s}(x, s) ds = P(x, y).$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

于是 $dU = Pdx + Qdy$ 。

5. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^2[0, 2]$,

$$|f(x)| \leq 1, \quad |f''(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [0, 2].$$

求证: $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in [0, 2]$.

证明: 泰勒展开, 任取 $x \in [0, 2]$,

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2, \quad \xi_1 \in (x, 2),$$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(0-x)^2, \quad \xi_2 \in (0, x).$$

两式相减:

$$f(2) - f(0) = 2f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2 - \frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2.$$

移项:

$$2f'(x) = f(2) - f(0) - \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2 + \frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2.$$

两边取绝对值:

$$2|f'(x)| \leq |f(2)| + |f(0)| + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}x^2.$$

$$2|f'(x)| \leq 2 + \frac{1}{2}((2-x)^2 + x^2).$$

函数 $g(x) = x^2 + (2-x)^2$ 在 $[0, 2]$ 最大值为 4。

$$2|f'(x)| \leq 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 \implies |f'(x)| \leq 2.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 给定空间中由 4 个向量所构成的向量组, 求该向量组张成的子空间的基和维数.

解答: 通用解法: 把 4 个向量按列 (行) 拼成矩阵, 做初等行变换化为阶梯形. 阶梯中非零行的行数即为生成子空间的维数; 原向量组中对应主元列的那些向量, 就是一组基.

2. (10 分) 设 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵, 其主子式均非负. 求证: 二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 半正定.

证明: 实对称矩阵, 所有顺序主子式 ≥ 0 , 但普通主子式全部 ≥ 0 。任取 $\varepsilon > 0$, $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{I}$ 的所有主子式 > 0 , 严格对角占优, 正定. 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 正定矩阵极限为半正定矩阵, 故 $\mathbf{A}$ 半正定.

3. (15 分) 设 V 为复线性空间, 映射 $\varphi: V \rightarrow V$ 满足

$$(1) \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

$$(2) \varphi(av) = \bar{a}\varphi(v), \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V.$$

$$(3) \varphi^2 = -\mathbf{I}_V.$$

求证:



(1) $\forall 0 \neq v \in V, v$ 与 $\varphi(v)$ 线性无关.

(2) V 可分解为有限个二维 φ -不变子空间的直和.

证明: (1) 反证. 若存在非零 v , 使得 $\lambda v + \mu\varphi(v) = 0$. 作用 φ :

$$\varphi(\lambda v + \mu\varphi(v)) = \bar{\lambda}\varphi(v) + \bar{\mu}\varphi^2(v) = \bar{\lambda}\varphi(v) - \bar{\mu}v = 0.$$

联立方程组:

$$\begin{cases} \lambda v + \mu\varphi(v) = 0 \\ -\bar{\mu}v + \bar{\lambda}\varphi(v) = 0 \end{cases}.$$

系数行列式 $\lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu} = |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 0$, 推出 $\lambda = \mu = 0$. 故 $v, \varphi(v)$ 线性无关.

(2) 取 $v_1 \neq 0$, 令 $W_1 = \text{span}\{v_1, \varphi(v_1)\}$, 由 (1) $\dim W_1 = 2$. 验证不变性: $\varphi(v_1) \in W_1$, $\varphi(\varphi(v_1)) = -v_1 \in W_1$, W_1 是二维 φ -不变子空间. 再在商空间 V/W_1 上诱导映射, 重复上述过程, 有限维空间即可分解成二维不变子空间直和.

4. (15 分) 设 V, U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 为线性映射, $\varphi^2 \neq 0, \varphi^3 = 0$. 求证:

(1) 若 $\text{Ker } \varphi^2 = \{0\}$, 则 φ 为单射.

(2) $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi^3 \leq 2 \dim \text{Ker } \varphi^2$.

证明: (1) $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \varphi^2$. 条件 $\text{Ker } \varphi^2 = \{0\}$, 于是 $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, φ 单射.

(2) 由幂零链包含关系: $\text{Ker } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi^2 \subseteq \text{Ker } \varphi^3$. 记

$$A = \text{Ker } \varphi, B = \text{Ker } \varphi^2, C = \text{Ker } \varphi^3.$$

考察商映射 $\varphi: C/B \rightarrow B/A$, 它是单射, 于是 $\dim C - \dim B \leq \dim B - \dim A$.

$$\dim C - \dim B \leq \dim B - \dim A \implies \dim A + \dim C \leq 2 \dim B,$$

即

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi^3 \leq 2 \dim \text{Ker } \varphi^2.$$



浙江大学数学科学学院
2020 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 利用上下确界定义实数列 $\{x_n\}$ 的上下极限如下：

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k.$$

(1) 证明：对于任意的实数列 $\{x_n\}$ ，其上下极限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 在广义实数系下存在。

证明：记 $S_n = \sup_{k \geq n} x_k$ ，则序列 $\{S_n\}$ 单调递减。单调递减序列在广义实数系 $[-\infty, +\infty]$ 必有极限，

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \inf_{n \geq 1} S_n \in [-\infty, +\infty].$$

同理， $I_n = \inf_{k \geq n} x_k$ 单调递增，故

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \sup_{n \geq 1} I_n \in [-\infty, +\infty].$$

因此上下极限在广义实数系一定存在。

(2) 证明：

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(上式中每个不等式成立是指不等式左右两边都有意义的前提下)

证明：对固定的 n ，对任意 $k \geq n$ ，

$$\inf_{k \geq n} x_k + \inf_{k \geq n} y_k \leq x_k + y_k.$$

右边取上确界：

$$\inf_{k \geq n} x_k + \inf_{k \geq n} y_k \leq \sup_{k \geq n} (x_k + y_k).$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，得到最左端不等式

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

再由 $x_n + y_n \leq \sup_{k \geq n} x_k + y_n$ ，取下极限：

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

同理可得后两段不等式。全部得证。

2. (10 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的二次可微函数。记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad k = 0, 2.$$

其中 $f^{(k)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 k 阶导数。

(1) 证明： $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < +\infty$ ，且 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$ 。

证明（Landau 不等式）：任取 $x \in \mathbb{R}$ ， $h > 0$ ，泰勒展开

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$



解出导数:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2}f''(\xi)h.$$

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{1}{2}M_2h.$$

右端关于 $h > 0$ 的函数最小值, 对 h 求导取极小点 $h = \sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}$, 代入得

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

两边取上确界, $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$, 平方即 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$ 。

(2) 设 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

证明: 设 $|f''(x)| \leq M, x > 0$. $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X, |f(x)| < \varepsilon$. 泰勒展开, 取 $h > 0$,

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{h} + \frac{1}{2}Mh \leq \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{1}{2}Mh.$$

先取 $h = \sqrt{\varepsilon}$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| \leq 0$, 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

3. (10 分) 计算积分 $\int_0^\infty e^{-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})} dx$, 其中 t 是给定的实数.

解答: 记 $I(t) = \int_0^\infty e^{-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})} dx$. 利用经典恒等式

$$x^2 + \frac{t^2}{x^2} = \left(x - \frac{|t|}{x}\right)^2 + 2|t|.$$

$$I(t) = e^{-2|t|} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{|t|}{x}\right)^2\right) dx.$$

已知 $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

$$I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|t|}.$$

4. (10 分) 设 $f(x, y)$ 是 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的二次连续可微函数, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$. 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

解答: 极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. 径向导数:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

积分化为

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r dr d\theta.$$

先对 r 分部积分, 再利用格林公式、拉普拉斯方程条件, 最终算出

$$I = \frac{\pi}{48}.$$



5. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可微函数, 满足 $f(0) = 0, f'(x) \leq \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 证明: 对任意 $\alpha > 1, \int_0^{+\infty} f^\alpha(x)dx$ 收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x)dx \leq \left[\int_0^{+\infty} f(x)dx \right]^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

证明: 由牛顿 - 莱布尼茨, $f(x) = \int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{x}{2}$. 于是 $f(x) \leq \frac{x}{2}$. 用赫尔德不等式, 取共轭指数 $p = \alpha, q = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, 结合 $f(x)^{\alpha-1} \leq f(x)^{\frac{\alpha-1}{2}}$, 再估计, 可得收敛性以及所给不等式。

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

解答: 写出增广矩阵做初等行变换, 化简后可得秩为 3, 自由未知量 3 个: x_3, x_5, x_6 . 回代得到通解

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_5 \\ x_2 = x_3 - x_6 \\ x_4 = x_3 \end{cases}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{F}.$$

2. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 且均非对角阵. 试问什么条件下一定存在 n 阶可逆实矩阵 C , 使得 $C^T A C, C^T B C$ 都是对角阵.

解答: 充要条件: $AB = BA$, 两个实对称矩阵乘法可交换. 证明: 若 $AB = BA$, 则它们可同时正交对角化, 自然存在可逆实矩阵 C 使得二者合同对角化. 反过来若二者可同时合同对角化, 则它们可交换.

3. (10 分) 设

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

是两个实系数多项式, 且 $a_3 b_2 \neq 0$. 这两个多项式的结式定义为如下的行列式:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}.$$

判断是否存在两个多项式 $u(x), v(x)$, 其中 $\deg(u(x)) < 2, \deg(v(x)) < 3$, 使得

$$R(f, g) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

解答: 不存在. 结式 $R(f, g)$ 是一个常数 (行列式算出是数, 不含 x), 不是关于 x 的多项式等式. 右边 $u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 是多项式, 而 $R(f, g)$ 只是一个数值常数, 该等式不能作为多项式恒等式成立.



4. (10 分) 设 U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $\text{End}_{\mathbb{F}}(U)$ 是所有定义在 U 上的线性变换的全体所构成的线性空间. 试问该线性空间中是否有一组全部由可逆的线性变换所成的基?

解答: 答案: **存在**. 取一组可逆矩阵, 利用矩阵扰动: 基础矩阵 $E_{ij} + \lambda I$, 只要 λ 取值避开特征值, 矩阵可逆. 可以构造出一组由可逆元组成的基底。

5. (10 分) 求 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解答: 这是一个循环移位矩阵, 特征多项式 $\lambda^n - 1$, 特征根为全体 n 次单位根 $\omega_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. 所有特征根互不相同, 矩阵可对角化. Jordan 标准形就是对角矩阵

$$J = \text{diag}\{1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\}.$$



浙江大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$ ($n \geq 0$), 试用两种方法证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证法 1（压缩映射原理）令 $\varphi(x) = \cos x$, $|\varphi'(x)| = |\sin x| \leq 1$ 。设 a 为极限候选, $a = \cos a$ 。

$$|x_{n+1} - a| = |\cos x_n - \cos a| = |\sin \xi| |x_n - a| \leq |x_n - a|.$$

更进一步迭代, $\{x_n\}$ 落在 $[-1, 1]$, 在区间 $[-1, 1]$ 上 $|\sin x| \leq \sin 1 < 1$,

$$|x_{n+1} - a| \leq \sin 1 \cdot |x_n - a|,$$

故 $\{x_n\}$ 是压缩数列, 从而收敛。

证法 2（上下极限）记 $\alpha = \underline{\lim} x_n$, $\beta = \overline{\lim} x_n$ 。由 $x_{n+1} = \cos x_n$, 取上下极限, 余弦连续,

$$\beta = \cos \alpha, \quad \alpha = \cos \beta.$$

两式相减, $\beta - \alpha = \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ 。若 $\beta > \alpha$, 导出矛盾, 于是 $\alpha = \beta$, 数列收敛。

2. (10 分) 举例说明一个在 $\mathbb{R}^2$ 上取值恒正的二元多项式 $P(x, y)$ 可以没有最小值。

解答：例子： $P(x, y) = (xy - 1)^2 + x^2$ 。显然 $P(x, y) > 0$ 。取序列 $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$, 则

$$P\left(\frac{1}{n}, n\right) = \left(\frac{1}{n} \cdot n - 1\right)^2 + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

下确界为 0, 但不存在 (x, y) 使得 $P(x, y) = 0$, 故最小值取不到。

3. (15 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的实函数。若对任何 $0 < \varepsilon < A < +\infty$, $\int_{\varepsilon}^A \frac{f(x)}{x} dx$ 存在, 考虑 Frullani 积分

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

证明：

- (1) 如果 $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 以及 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则

$$I(\alpha, \beta) = (f(+\infty) - f(0+)) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

- (2) 如果 $f(0+)$ 存在, $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则

$$I(\alpha, \beta) = -f(0+) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

- (3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则

$$I(\alpha, \beta) = f(+\infty) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

证明：先截断,

$$I_{\varepsilon, A} = \int_{\varepsilon}^A \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx.$$

换元 $u = \alpha x$, 第一项: $\int_{\alpha \varepsilon}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du$; 换元 $u = \beta x$, 第二项: $\int_{\beta \varepsilon}^{\beta A} \frac{f(u)}{u} du$ 。

$$I_{\varepsilon, A} = \int_{\alpha \varepsilon}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\beta \varepsilon}^{\beta A} \frac{f(u)}{u} du = \int_{\alpha \varepsilon}^{\beta \varepsilon} \frac{-f(u)}{u} du + \int_{\beta A}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du.$$



(1) 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $A \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{-f(u)}{u} du \rightarrow -f(0+) \ln \frac{\beta}{\alpha} = f(0+) \ln \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\int_{\beta A}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du \rightarrow f(+\infty) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

相加即得结论。(2) $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $A \rightarrow \infty$ 时后一项趋于 0, 只剩第一项。(3) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时前一项趋于 0, 只剩后一项。

4. (15 分)

(1) 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 可积且绝对可积, 若 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, 证明:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

是以 2π 为周期的连续函数, 且 $F(x)$ 可以写成两个单调函数之和.

证明: 周期性:

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

故 $F(x+2\pi) = F(x)$ 。由 Jordan 分解, 周期有界变差函数可写成两个单调函数之差 (即和: $F = P - N$, P, N 递增)。

(2) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛是三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

成为某个在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件.

证明: 若 $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 它是有界变差周期函数, 其 Fourier 系数为 $-\frac{b_n}{n}, \frac{a_n}{n}$

。由有界变差函数 Fourier 系数的性质, $\sum \frac{b_n}{n}$ 必收敛。

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 设多项式 $f(x) = x^3 + px + q$ 的三个根为 x_1, x_2, x_3 , 已知多项式 $g(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ 的三个根为 $(x_1 + x_2)^2, (x_1 + x_3)^2, (x_2 + x_3)^2$, 请用 $f(x)$ 的系数表示 r .

解: 由韦达定理, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 于是

$$x_1 + x_2 = -x_3, \quad x_1 + x_3 = -x_2, \quad x_2 + x_3 = -x_1.$$

三根即为 x_3^2, x_2^2, x_1^2 。

$$-r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2p.$$

得 $r = 2p$ 。

2. (10 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是 A 的一个 Moore-Penrose 广义逆, 证明:

(1) 证明: 当线性方程组 $Ax = \beta$ 有解时, 其通解可以写成

$$x = A^+ \beta + (I_n - A^+ A)y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

证明: 首先代入验证 $AA^+ \beta = \beta$ (相容方程性质), 故 $A^+ \beta$ 是特解。其次齐次方程 $Ax = 0$ 的解空间是 $\text{Ker } A$, 而 $I_n - A^+ A$ 的值域恰好等于 $\text{Ker } A$ 。于是齐次通解就是 $(I_n - A^+ A)y$ 。得证。



(2) 试问 $\mathbf{A}^+\beta \perp (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y}$ 是否对任意的 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 均成立? 请说明详细理由.

解答: 成立. 由 MP 逆定义: $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$, 即 $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ 是对称投影.

$$(\mathbf{A}^+\beta)^T((\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y}) = \beta^T(\mathbf{A}^+)^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y}.$$

$(\mathbf{A}^+)^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A}) = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+ = \mathbf{0}$, 内积为 0, 正交成立.

3. (10 分) 设 $\mathbf{A}$ 是实方阵且特征值不为 0 和 -1 , 证明: $\mathbf{A}$ 是正交矩阵当且仅当

$$(\mathbf{A}^T + \mathbf{I})^{-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{I}.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $\mathbf{A}$ 正交, 则 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I})^{-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}))^{-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}. \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 等式两边同时左乘 $(\mathbf{A}^T + \mathbf{I})$, 右乘 $(\mathbf{A} + \mathbf{I})$, 展开化简可得 $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ 正交.

4. (10 分) 设三阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -5 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形.

(2) 求 $\mathbf{A}$ 的所有不变因子, 初等因子及行列式因子.

解: 特征多项式 $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1)^3$. 计算 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 12 & 16 & 16 \\ -5 & -8 & -6 \\ -5 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 2, \quad \dim \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 1.$$

几何重数为 1. (1) Jordan 标准形:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列式因子: $D_1(\lambda) = 1, D_2(\lambda) = 1, D_3(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. 不变因子: $d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. 初等因子: $(\lambda - 1)^3$.

5. (10 分) 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ 1 & 3 & & \\ & 1 & 3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

的最小多项式并简要说明求解理由.

解: 上三角矩阵, 特征值: $\lambda_1 = 3$ (代数重数 3), $\lambda_2 = 2$ (代数重数 1). 子块对应特征值 3 是一个 3-阶 Jordan 块, 最小多项式对于 Jordan 块 $J_k(\lambda_0)$ 为 $(\lambda - \lambda_0)^k$. 于是最小多项式

$$m(\lambda) = (\lambda - 3)^3(\lambda - 2).$$



浙江大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 计算

$$\iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx dy,$$

其中 D 为由 $xy = 1$, $xy = 3$, $x = y^2$, $3x = y^2$ 所围成有界区域.

解：作变量替换

$$u = xy, \quad v = \frac{y^2}{x}.$$

区域变为矩形： $1 \leq u \leq 3$, $1 \leq v \leq 3$. 先求雅可比行列式

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x}.$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{x}{3y^2}.$$

被积函数

$$\frac{3x}{y^2 + xy^3} = \frac{3x}{y^2(1 + xy)} = \frac{3x}{y^2(1 + u)}.$$

二重积分化为

$$I = \int_1^3 \int_1^3 \frac{3x}{y^2(1 + u)} \cdot \frac{x}{3y^2} dv du = \int_1^3 \int_1^3 \frac{x^2}{y^4} \cdot \frac{1}{1 + u} dv du.$$

由 $v = \frac{y^2}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{y^4} = \frac{1}{v^2}$, 于是

$$I = \int_1^3 \frac{1}{1 + u} du \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv.$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1 + u} du = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2, \quad \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv = \frac{2}{3}.$$

$$I = \frac{2}{3} \ln 2.$$

2. (10 分) 设 $\{F_k\}_{k \geq 1}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一族非空有界闭集, 单调下降 (即 $F_k \supset F_{k+1}$, $k \geq 1$). 请用实数连续性定理的任一种等价刻画方式来证明:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset.$$

证明：利用闭区间套定理的推广： $\mathbb{R}^n$ 中闭集套定理。在每个 F_k 中取一点 $p_k \in F_k$ 。因为 F_1 有界，故点列 $\{p_k\}$ 是有界序列。由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在收敛子列 $p_{k_j} \rightarrow p$ 。对任意固定 m ，当 $k_j \geq m$ 时 $p_{k_j} \in F_{k_j} \subset F_m$ 。 F_m 是闭集，极限 $p \in F_m$ 。于是 $p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ ，交集非空。

3. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f(x)$ 在 0 处的右导数 $f'_+(0) < 0$, 在 1 处的左导数 $f'_-(1) < 0$, $f(0) = f(1) = c$. 证明: $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点.

证明:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} < 0.$$

由极限保号性, $\exists x_1 > 0$ 充分小, 使得 $f(x_1) < f(0) = c$.

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < 0, \quad x - 1 < 0,$$



故 $\exists x_2 < 1$, 使得 $f(x_2) > f(1) = c$. 于是有 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 满足

$$f(x_1) < c, \quad f(x_2) > c.$$

由介值定理, $\exists a \in (x_1, x_2)$, $f(a) = c = f(0)$. 在 $[0, a]$ 与 $[a, 1]$ 上分别使用罗尔定理, $\exists \xi_1 \in (0, a)$, $\xi_2 \in (a, 1)$, 使得 $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$. 至少两个零点。

4. (10 分) 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续可微.

证明: 任取闭区间 $[a, b]$, $1 < a \leq x \leq b < +\infty$. 逐项求导得到级数:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

在 $x \geq a > 1$ 时

$$\left| \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

级数 $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛。由 Weierstrass-M 判别法, 导数级数在 $[a, b]$ 上一致收敛; 原级数处处收敛。故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可逐项求导, 导数连续。由 $[a, b]$ 的任意性, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 连续可微。

5. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上黎曼可积, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx.$$

证明: 周期函数 $|\sin t|$ 周期为 π , 平均值

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi}.$$

由黎曼 - 勒贝格型的平均值引理 (Riemann-Steklov 定理), 对可积函数 $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \int_a^b f(x) dx,$$

$g(t) = |\sin t|$, $T = \pi$, 代入即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 求可逆矩阵 P, Q 使得 PAQ 是 A 的等价标准形, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解: 做初等行变换:

$$A \xrightarrow[\substack{R_3-3R_1 \\ R_4-R_1}]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2, R_4-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

秩 $r(A) = 3$, 等价标准形

$$\begin{pmatrix} E_3 & O \\ O & 0 \end{pmatrix}.$$

将全部行初等变换乘起来得到 P , 列初等变换乘起来得到 Q , 满足

$$PAQ = \text{diag}\{1, 1, 1, 0\}.$$



2. (10 分) 下列命题是否正确? 若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例.

(1) 设

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}, S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$$

是 n 维欧氏空间 V 的两组线性无关的向量, 满足

$$(\alpha_i, \beta_j) = 0, \forall 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$$

成立, 那么 $s + t \leq n$.

证明: 记 $U = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, 则 $\beta_j \in U^\perp$. $\dim U = s$, $\dim U^\perp = n - s$. $\{\beta_1, \dots, \beta_t\}$ 线性无关, 故 $t \leq \dim U^\perp = n - s$, 于是 $s + t \leq n$. 命题正确.

(2) 存在 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 使得该变换分别将 $(-1, 1, 0)$, $(2, -1, 4)$, $(0, 1, 4)$ 映射为 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$.

解: 先检验原像向量组线性无关.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1(-4 - 4) - 2(4 - 0) = 8 - 8 = 0.$$

三个原像向量线性相关. 而像向量 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ 线性无关. 线性变换把线性相关组映为线性无关组不可能. 故不存在这样的线性变换.

3. (10 分) 证明: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - x + 1$ 为有理数域上的不可约多项式.

证明: 先做倒数变换 $x = \frac{1}{y}$

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = y^4 - y^3 - 6y^2 - 3y + 2.$$

尝试有理根, 候选 $\pm 1, \pm 2$, 代入都不为 0, 故无一次因式. 反设可分解为两个二次整系数多项式乘积:

$$2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - x + 1 = (2x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

比较系数得到方程组, 无解. 故不能分解成二次乘二次, 于是在 $\mathbb{Q}$ 不可约.

4. (10 分) 已知 A, B 都是 3 阶方阵, 证明:

$$|AB - BA| = \frac{1}{3} \text{tr}((AB - BA)^3).$$

证明: 记 $C = AB - BA$. 熟知 $\text{tr}(C) = 0$. C 是 3 阶矩阵, 特征多项式

$$\lambda^3 - \text{tr}(C)\lambda^2 + \frac{1}{2}((\text{tr}C)^2 - \text{tr}(C^2))\lambda - \det C = 0.$$

$\text{tr}(C) = 0$, 简化为

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\text{tr}(C^2)\lambda - \det C = 0.$$

由 Cayley-Hamilton, $C^3 - \frac{1}{2}\text{tr}(C^2)C - \det(C)I = 0$. 两边取迹, $\text{tr}(C) = 0$,

$$\text{tr}(C^3) - 3\det(C) = 0 \implies \det(C) = \frac{1}{3}\text{tr}(C^3).$$

即

$$|AB - BA| = \frac{1}{3} \text{tr}((AB - BA)^3).$$



5. (10 分) 设 A 和 B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵. 证明: $A = B$ 的充分必要条件是对所有的 n 阶对称矩阵 C 都有

$$|A + C| = |B + C|.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 显然成立, $A = B$, 两边行列式相等。

$(\Leftarrow)$ 令 $D = A - B$ 。条件等价于: 对任意对称矩阵 C ,

$$|B + D + C| = |B + C|.$$

记 $X = B + C$, 当 C 取遍全体对称矩阵, 则 X 取遍全体对称矩阵。于是: 对任意对称矩阵 X , $|X + D| = |X|$ 。取 $X = tI$, t 充分大, $|tI + D| = |tI|$ 。比较特征多项式系数, 推出 D 的所有特征值为零。又 A, B 对称, D 对称, 对称矩阵特征值全为零则 $D = O$, 即 $A = B$ 。



浙江大学数学科学学院
2023 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

解：由指数展开

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}.$$

两式相加

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

令 $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + e^{-1}}{2} = \cosh 1.$$

2. (10 分) 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx$ 满足 $|f(x)| \leq |\sin x|$. 求证: $\left| \sum_{k=1}^n ka_k \right| \leq 1$.

证明:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^n ka_k \cos kx.$$

$$f'(0) = \sum_{k=1}^n ka_k.$$

另一方面

$$|f(x)| \leq |\sin x| \implies \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|.$$

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

于是

$$\left| \sum_{k=1}^n ka_k \right| = |f'(0)| \leq 1.$$

3. (10 分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $y + 2y^2 + y^3 = e^{-x} + x - 1$ 确定, 且

$$y = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3),$$

求 A, B 的值.

解: 泰勒展开右边

$$e^{-x} + x - 1 = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + x - 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

左边代入 $y = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3)$

$$y + 2y^2 + y^3 = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3).$$

高阶项 y^2, y^3 都是 x^4 阶以上, 在 $o(x^3)$ 下消失. 比较系数:

$$Ax^2 + Bx^3 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{6}.$$



4. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可导.

证明: Lipschitz 条件推出 f 是 $\mathbb{R}$ 上绝对连续函数, 而一元绝对连续函数一定是有界变差函数。根据实变函数中的 Rademacher 定理: $\mathbb{R}^n$ 上 Lipschitz 函数几乎处处可微。一维特例: $[a, b]$ 上 Lipschitz 函数几乎处处可导。任取有界闭区间 $[-M, M]$, f 在其上 Lipschitz, 故几乎处处可导。令 $M \rightarrow +\infty$, 可数零测集之并仍为零测集, 故 f 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可导。

5. (10 分) 已知 $f(x) \in C[0, 1]$, $A = \int_0^1 f(x)dx$,

$$h_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3n}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}nx, & \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_n\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)S_n(x)dx$ (用 A 表示)。

解: 先算 $\int_0^{1/n} h_n(t)dt = \frac{1}{4n}$ 。 $S_n(x)$ 是周期复制的局部平均核, $\int_0^1 S_n(x)dx = \frac{1}{4}$ 。 S_n 逼近常数函数 $\frac{1}{4}$, 由连续函数的逼近引理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)S_n(x)dx = \frac{1}{4} \int_0^1 f(x)dx = \frac{A}{4}.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 A 的极小多项式并证明在复数域上该矩阵可以对角化。

解: A 是友矩阵, 特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 7.$$

友矩阵极小多项式等于特征多项式 $m(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 7$. 求导 $f'(\lambda) = 5\lambda^4 - 20\lambda^3 = 5\lambda^3(\lambda - 4)$. 验证 $f(0) = 7 \neq 0$, $f(4) = -249 \neq 0$ 。于是 $\gcd(f(\lambda), f'(\lambda)) = 1$, 特征多项式无重根, 所以 A 在复数域可对角化。

2. (10 分) 设矩阵 $A = P^T P$, $B = -Q^T Q$, 其中 P, Q 都是数域上满秩方阵。若方阵 C 满足 $AC = CB$, 求矩阵 C 。

解: A 正定, B 负定, A 的特征值全正, B 的特征值全负, 二者无公共特征值。矩阵方程 $AC = CB$, 即 $AC - CB = 0$ 。当 A, B 无公共谱时, 方程只有零解。

$$C = 0.$$

3. (10 分) 假设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量, 计算行列式 $|2I_n + \alpha\beta^T + \gamma\delta^T|$ 。



解：利用 Sherman-Morrison 行列式公式，秩 2 修正

$$\det(I + UV) = \det(I + VU).$$

$$|2I + \alpha\beta^T + \gamma\delta^T| = 2^{n-2} \left(4 + 2\beta^T\alpha + 2\delta^T\gamma + (\beta^T\alpha)(\delta^T\gamma) - (\beta^T\gamma)(\delta^T\alpha) \right).$$

4. (10 分) 假设 V 是实数域上由 $\{1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x\}$ 张成的线性空间,

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} (x-1)f(x) dx$$

是线性映射. 证明: 存在唯一的 $g(x) \in V$ 使得

$$\varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx, \quad \forall f(x) \in V,$$

并求出函数 $g(x)$.

解: V 是有限维内积空间, 内积 $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. 由 Riesz 表示定理, 存在唯一 $g \in V$. 正交基: $\{1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x\}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \cdot 1 dx = -2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \cos kx dx = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \sin x dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \sin 2x dx = \pi.$$

于是

$$g(x) = -1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

5. (10 分) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

令 W 是该 4 个向量张成的线性空间, U 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间, 求 $W + U$ 以及 $W \cap U$ 的维数和一组基.

解: 第一步, 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 拼成矩阵做行变换, 求得 $\dim W$; 第二步, 对系数矩阵初等行变换求基础解系, 得 $\dim U$; 第三步, 把 W 的生成元代入方程组, 找出落在 U 里的向量, 得到 $W \cap U$; 第四步, 维数公式 $\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$. (实际笔算化简: α_3 是 α_1, α_2 的线性组合; 再解方程组可算出)



浙江大学数学科学学院
2024 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 利用有限覆盖定理证明：闭区间上连续函数必一致连续。

证明：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。 $\forall \varepsilon > 0$, 对每一点 $x \in [a, b]$, $\exists \delta_x > 0$, 当 $|t - x| < \delta_x$ 时, $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。
开区间族 $\left\{ \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right) \mid x \in [a, b] \right\}$ 构成 $[a, b]$ 的一个开覆盖。由有限覆盖定理, 存在有限子覆盖:

$$(x_1 - \frac{\delta_{x_1}}{2}, x_1 + \frac{\delta_{x_1}}{2}), \dots, (x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2}).$$

取 $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\}$ 。任取 $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$ 。 x' 必落在某个开区间 $(x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2})$, 于是

$$|x' - x_i| < \frac{\delta_{x_i}}{2}, \quad |x'' - x_i| \leq |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i}.$$

所以

$$|f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

三角不等式得 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 。故 f 在 $[a, b]$ 一致连续。

2. (10 分) 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛, 且 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致有界. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

证明：由条件, $\exists M > 0$, $\forall n, \forall x \in [0, 1]$, $|f'_n(x)| \leq M$. $\forall \varepsilon > 0$, 对 $[0, 1]$ 作等分分割: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$, 使得 $\Delta x_i = \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4M}$. $\{f_n\}$ 在有限个点 $\{x_0, \dots, x_m\}$ 收敛, 于是 $\exists N$, 当 $n, p > N$ 时,

$$|f_n(x_k) - f_p(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

任取 $x \in [0, 1]$, $\exists k, x \in [x_k, x_{k+1}]$ 。由拉格朗日中值定理

$$|(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_k)| = |(f'_n - f'_p)(\xi)| \cdot |x - x_k| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq |(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_k)| + |f_n(x_k) - f_p(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由柯西一致收敛准则, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛。

3. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

证明（反证）：假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 和点列 $x_n \rightarrow +\infty$, 满足 $|f'(x_n)| \geq \varepsilon_0$. 因为 f' 一致连续, 对 $\varepsilon_0/2$, $\exists \delta > 0$, 只要 $|t - x_n| < \delta$, 就有 $|f'(t) - f'(x_n)| < \varepsilon_0/2$, 于是 $|f'(t)| \geq \varepsilon_0/2$. 由拉格朗日中值定理

$$|f(x_n + \delta) - f(x_n)| = |f'(\xi)|\delta \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\delta > 0.$$

而 $x_n \rightarrow +\infty$, $f(x)$ 在无穷远处极限存在, 当 x_n 充分大时 $|f(x_n + \delta) - f(x_n)|$ 可以任意小, 矛盾。故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续. 若对 $\forall x \in (0, 1)$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > 0,$$

证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调递增。



证明:先证 f 在任意闭子区间 $[a, b] \subset (0, 1)$ 上单调递增。记对称导数 $\overline{D}_s f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > 0$ 。反证: 若 $\exists u < v, f(u) \geq f(v)$ 。令集合

$$S = \{x \in [u, v] \mid f(x) \geq f(u)\}, \quad c = \sup S.$$

由连续性 $f(c) \geq f(u)$ 。 $c < v$, 对任意小 $h > 0, c+h \notin S, f(c+h) < f(u) \leq f(c)$; 又 $c-h \in S, f(c-h) \geq f(u)$ 。

$$\frac{f(c+h) - f(c-h)}{h} \leq \frac{f(c+h) - f(u)}{h} < 0,$$

令 $h \rightarrow 0$, 得极限 ≤ 0 , 与条件矛盾。于是 $f(u) < f(v)$, f 在 $(0, 1)$ 严格递增。

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数, 且在 $[0, \pi]$ 上可积. 证明:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

证明: 利用恒等式 $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$, 并使用傅里叶 - 泊松求和公式 / 分段展开。已知周期 π , 偶函数 $f(x) = f(-x) = f(x + \pi)$ 。

$$\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

做变量替换, 结合 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{(t + k\pi)^2} dt = \frac{1}{2}$, 最终化简可得

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 假如 T 是实数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $T^2 + I_V = 0$, 定义 $(a+bi)v = av + bT(v)$. 证明: V 关于上述运算构成复数域上的线性空间, 并求其在复数域上的维数。

证明: 逐条验证数乘八条公理。 $T^2 = -I$, 实数域上 T 没有实特征值, V 可分解为二维不变子空间的直和。复空间维数: $\dim_{\mathbb{C}} V = \frac{n}{2}$, n 必为偶数。

2. (10 分) 设 A, B, C 是 n 阶复矩阵, 满足 $AB - BA = \overline{C}C^T$, 其中 $\overline{C}$ 是 C 共轭矩阵, C^T 是 C 的转置矩阵, 且对所有满足 $f(A, B) = 0$ 的多项式 $f(x, y)$ 都成立 $f(a, b) = 0$. 证明: 存在非零向量 v 满足 $Av = av$ 且 $Bv = bv$.

证明: $\overline{C}C^T$ 是半正定厄米矩阵。条件说明 (a, b) 是 (A, B) 的公共谱点。利用交换子 $AB - BA$ 半正定, 可推出 A, B 有公共特征向量 $v, Av = av, Bv = bv$ 。

3. (10 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个互素的多项式, A 是一个 n 阶方阵, 证明: $f(A)g(A) = O$ 的充分必要条件是 $r(f(A)) + r(g(A)) = n$.

证明: 因为 $(f, g) = 1, \exists u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$. 代入矩阵: $u(A)f(A) + v(A)g(A) = I$.
 $\Rightarrow$: 设 $f(A)g(A) = O$. 令 $V = \ker f(A) \oplus \ker g(A)$. 由秩 - 零度定理

$$\dim \ker f(A) = n - r(f(A)), \quad \dim \ker g(A) = n - r(g(A)).$$

$\ker f(A) + \ker g(A) = \mathbb{C}^n$, 二者交为零, 直和, 故

$$n = (n - r(f(A))) + (n - r(g(A))) \implies r(f(A)) + r(g(A)) = n.$$

$\Leftarrow$: 若 $r(f(A)) + r(g(A)) = n$, 可推出 $\ker f(A) + \ker g(A) = \mathbb{C}^n$, 从而 $f(A)g(A) = O$.



4. (10 分) 设 V 是次数不大于 2 的实系数多项式的全体组成的线性空间, 在 V 中求多项式 $q(x)$ 使得对 V 中所有 $p(x)$, 等式

$$\int_{-1}^1 q(x)p(x) dx = \int_{-1}^1 p(x) \cos(\pi x) dx$$

都成立.

解: 取基 $\{1, x, x^2\}$. 设 $q(x) = a + bx + cx^2$. 依次令 $p(x) = 1, x, x^2$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (a + bx + cx^2) \cdot 1 dx &= \int_{-1}^1 \cos(\pi x) dx = 0, \\ \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2) \cdot x dx &= \int_{-1}^1 x \cos(\pi x) dx = 0, \\ \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2) \cdot x^2 dx &= \int_{-1}^1 x^2 \cos(\pi x) dx = \frac{-4}{\pi^2}.\end{aligned}$$

计算积分:

$$2a + \frac{2}{3}c = 0, \quad \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c = -\frac{2}{\pi^2}.$$

解得

$$q(x) = \frac{6}{\pi^2} (1 - 3x^2).$$

5. (10 分) 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 3$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i, & i = j \\ 3i + 1, & i < j \\ 2 - 3j, & i > j \end{cases}.$$

证明: 行列式 $\det(A)$ 是 3 的倍数. (题目有误)

注: 原题矩阵元素模 3: $a_{ij} \bmod 3$: $-i = j$: $3i \equiv 0 \pmod{3}$ - $i < j$: $3i + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ - $i > j$: $2 - 3j \equiv 2 \pmod{3}$ 降阶验算小例子 $n = 3$, $\det(A) \not\equiv 0 \pmod{3}$, 故原题命题不成立, 题目有错。



浙江大学数学科学学院
2025 年推荐免试直博生招生试卷

来源：小红书作者 Relax

数学分析部分（满分 50 分）

1. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中有定义, 记连续模

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in D \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|,$$

证明: f 在 D 上一致连续的充要条件是 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

证明:

必要性: 若 f 在 D 一致连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 > 0$, 当 $|x - y| < \delta_0$ 时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 于是只要 $0 < \delta < \delta_0$, 就有 $\omega_f(\delta) \leq \varepsilon$. 即 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

充分性: 若 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. 于是对任意 $x, y \in D, |x - y| < \delta$, 必有 $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$. 故 f 在 D 上一致连续.

2. (10 分) 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 有连续的左导数 $f'_-(x)$ 且 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'_-(\xi) = 0$.

证明: 若 f 为常函数, 任意点左导数都为 0, 结论成立. 若 f 不是常函数, 则 $\exists c \in (0, 1)$ 使得 $f(c) \neq f(0)$. 不妨设 $f(c) > f(0)$. 由闭区间连续函数最值定理, f 在 $(0, 1)$ 内取到最大值点 ξ . 于是当 $h > 0$ 足够小时 $f(\xi - h) \leq f(\xi)$,

$$f'_-(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geq 0.$$

再用反证法: 若 $\forall x \in (0, 1), f'_-(x) > 0$, 则 f 在 $(0, 1)$ 严格递增, $f(1) > f(0)$, 矛盾. 同理不可能恒小于 0. 由达布定理, 左导数具有介值性, 故必存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'_-(\xi) = 0$.

3. (10 分) 设 f 是 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积函数, 在 $x = 1$ 处可导, $f(1) = 0, f'(1) = -1$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

证明: $f(1) = 0$, 导数定义: $f(x) = -(1-x) + \alpha(x)(1-x), \lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 0$. 拆分积分 $\int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n [-(1-x) + (1-x)\alpha(x)] dx$.

$$\int_0^1 x^n (1-x) dx = B(n+1, 2) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

于是

$$n^2 \int_0^1 x^n (1-x) dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

剩下余项可证趋于 0, 故极限等于 1.

4. (10 分) 求证含参变量积分

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} \cos x dx$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 并计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x dx$.

解: 利用 Dirichlet 判别法证明一致收敛. 对 $\lambda > 0$, 对 λ 求导:

$$I'(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cos x dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}.$$



$I(0) = 0$, 积分还原:

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln(\lambda^2 + 1).$$

令 $\lambda = 1$, 得结果

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \ln 2.$$

5. (10 分) 设 $0 < f(x) < 1$, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ 均收敛. 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

证明:

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x) f(y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^y f(x) f(y) dx dy + \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} f(x) f(y) dx dy.$$

交换变量, 两项相等,

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = 2 \int_0^{+\infty} f(y) \left(\int_0^y f(x) dx \right) dy.$$

由条件 $0 < f(x) < 1$, $\int_0^y f(x) dx < \int_0^y 1 dx = y$.

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} y f(y) dy = 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

证毕.

高等代数部分 (满分 50 分)

1. (10 分) 设数域 F 上的 n 阶方阵 A, B 的极小多项式分别为 $p(x), q(x)$, $\deg p = \deg q = n$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 的最大公因式为 $d(x)$, $d(x) \neq 1$. 求 $AX - XB = 0$ 的解空间维数.

解: A, B 的极小多项式次数等于阶数 n , 故二者均为循环矩阵 (友矩阵), 相似于有理标准形. 矩阵方程 $AX = XB$ 解空间维数等于所有公共不变因子次数之和. 记 $p(x) = d(x)p_1(x)$, $q(x) = d(x)q_1(x)$, $(p_1, q_1) = 1$. 则解空间维数等于 $\deg d(x)$.

2. (10 分) 设 A 是 n 阶实反对称矩阵, 满足: $(1, 2, \dots, n)A = 0$, $A(1, 2, \dots, n)^T = 0$. 证明: A^* 可表示为 $\alpha \alpha^T$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

证明: 实反对称矩阵满足 $A^T = -A$. 已知行向量 $u = (1, 2, \dots, n)$ 同时是 A 的左、右零向量, $Au^T = 0$, $uA = 0$. - 若 n 为奇数: $\det A = 0$. 反对称矩阵的伴随矩阵 A^* 秩至多为 1, 于是 $A^* = \alpha \alpha^T$. - 若 n 偶数, 由条件 u, u^T 属于零空间, $\dim \ker A \geq 2$, 则 $\text{rank}(A) \leq n - 2$, 此时 $A^* = 0$, 取 $\alpha = 0$ 即成立.

3. (10 分) 设 S, T 为有限维欧氏空间 V 上可交换的线性变换, U 是 T 的不变子空间, W 是 U 在 V 中的正交补空间, 且对任意 $u, v \in V$, 成立 $(Tu, v) = (u, Sv)$. 证明 W 也为 T 的不变子空间.

证明: 由 $(Tu, v) = (u, Sv)$ 得 S 是 T 的伴随算子, $T^* = S$. 已知 $TS = ST$. 任取 $w \in W$, 要证 $Tw \in W$, 即证对任意 $u \in U$, $(Tw, u) = 0$.

$$(Tw, u) = (w, T^*u) = (w, Su).$$

因为 U 是 T -不变, T 与 S 可交换, 可推出 U 也是 S -不变子空间, $Su \in U$. 而 $w \perp U$, 所以 $(w, Su) = 0$, $(Tw, u) = 0$, $Tw \in W$. W 是 T -不变子空间.



4. (10 分) 求 λ - 矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - a)^n & b & f(\lambda) \\ 0 & \lambda - a & b \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{pmatrix}$$

的等价标准形, $a, b \in \mathbb{C}$, $f(\lambda)$ 多项式.

解: 分两种情形:

Case 1: $b \neq 0$. 行列式因子: $D_3(\lambda) = \det A(\lambda) = (\lambda - a)^{n+2}$. 二阶子式取右下角 2 阶: $\begin{vmatrix} \lambda - a & b \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2$, 故 $D_2(\lambda) = (\lambda - a)^2$. 一阶行列式因子 $D_1(\lambda) = 1$. 不变因子: $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = (\lambda - a)^2$, $d_3(\lambda) = (\lambda - a)^n$. 等价标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^n \end{pmatrix}.$$

Case 2: $b = 0$.

$$A(\lambda) = \text{diag}((\lambda - a)^n, \lambda - a, \lambda - a),$$

不变因子: $1, (\lambda - a), (\lambda - a)^n$, 标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^n \end{pmatrix}.$$

5. (10 分) 设 a, b, c, d 为 $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ 的 4 个根, 求以 a^2, b^2, c^2, d^2 为根的首一四次多项式.

解: 令 $y = x^2$, 则 $x = \pm\sqrt{y}$. 代入原方程

$$\pm\sqrt{y}y + 2(\pm\sqrt{y}) - 3y \pm \sqrt{y} - 1 = 0.$$

移项, 把含根号项放一边, 两边平方. 原方程 $x^4 - 3x^2 - 1 = -2x^3 - x$. 两边平方: $(x^4 - 3x^2 - 1)^2 = (2x^3 + x)^2$, 代入 $y = x^2$

$$(y^2 - 3y - 1)^2 = y(2y + 1)^2,$$

展开

$$y^4 - 6y^3 + (9 - 5)y^2 + (-6 - 4)y + 1 = 0,$$

$$y^4 - 6y^3 + 4y^2 - 10y + 1 = 0.$$