



清华大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒 (25)



清华大学数学科学系
2015 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

2. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 可逆, A^m 为对角矩阵, 其中 $m > 1$ 为正整数。求证: A 可对角化。

3. V 是全体 $\mathbb{R}$ 上的多项式构成的线性空间, 对 $\forall f \in V$, $\varphi(f) = f + f'$ 。求证 φ 可逆。

4. 设 G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, D 为 G 的紧致子集, 映射 $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的, 且在集合 D 上是单射, 并且

$$\det F'(x) \neq 0, \quad \forall x \in D.$$

求证:

(1) $d(D, \partial G) > 0$;

(2) 存在 $0 < \varepsilon < d(D, \partial G)$, 使得 $F|_{D_\varepsilon}$ 为单射, 其中 $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, D) < \varepsilon\}$ 。

5. 设函数 $f(z)$ 是单位圆盘上的解析函数, $|z| < 1$ 时 $|f(z)| < 1$, α 是满足 $|\alpha| < 1$ 的复数, 且 $f(\alpha) = 0$ 。证明: $|z| < 1$ 时

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$



清华大学数学科学系
2016 年直博生招生考试试题（一）

来源：小红书作者 Relax

1. (1) 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的。试叙述关于 f 的逆映射定理 (包括条件和结论)。
- (2) 试应用逆映射定理证明不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续可微单射。

2. 设

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}} \right),$$

其中 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\vec{n}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面 S^2 的单位外法向量场。试求曲面积分

$$\iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

3. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, $f(x) = x, \forall x \in (-\pi, \pi]$ 。

(1) 试求 f 的 Fourier 级数及 Fourier 级数的和函数, 并说明该级数是否在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。

(2) 试用上述 Fourier 级数及 Parseval 等式求出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的值。

4. 设 $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 为全纯函数, $f(\alpha) = 0, \alpha \in B(0, 1)$ 。

(1) 求证:

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

(2) 求上述不等式中等号成立的充要条件。

5. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $f_A(x)$ 为 A 的特征多项式, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg g(x) = n - 1, g(x) \mid f_A(x)$ 。求 $g(A)$ 所有可能的秩, 并说明理由。

6. 设 V 为 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, φ 为 V 上的幂幺线性变换, 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\varphi^k = I_V$, 又设 W 为 φ -不变子空间。求证: 存在 φ -不变子空间 W' , 使得 $V = W \oplus W'$ 。



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题（一）

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 100 分。

1. (10 分) 证明不存在一个实可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ 。

2. (15 分) 证明 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

的根都是实数并且包含于区间 $(-1, 1)$ 内。

3. (10 分) 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\int_0^{x^2+y^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dx dy.$$

4. (10 分) 设 A 和 B 是两个 n 阶方阵。证明： AB 和 BA 有相同的特征值。

5. (15 分) 假设 I_n 是 n 阶单位矩阵， A 是一个 n 阶方阵，令 $f(x) = \det(I_n + xA)$ ，计算 $f'(0)$ 。

6. (15 分) 设 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个向量，并且两两之间的内积满足 $(v_i, v_j) < 0, \forall i \neq j$ 。证明： $v_1, \dots, v_{n+1}$ 中一定存在 n 个向量，它们组成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

7. (10 分) 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z \sin z}{1 - \cos z} dz.$$

8. (15 分) 设 $f(z)$ 是一个处处非零的全纯函数。证明：存在一个全纯函数 $g(z)$ ，使得 $f(z) = e^{g(z)}$ 。



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题（二）
来源：小红书作者 Relax

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求证： $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。

2. 证明：Hermite 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

的所有根均为实数。

3. 计算积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

其中 $ad - bc = \sqrt{7}$, L^+ 为椭圆 $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$, 取逆时针方向。

4. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为 $[a, b]$ 上的正值连续函数且 $g(x)$ 严格单调递减, 求证:

$$\frac{\int_a^b x f(x) g(x) dx}{\int_a^b f(x) g(x) dx} < \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

5. 已知 n 阶矩阵 A, B 满足 $A^2 = A$, $B^2 = B$, 且 $I_n - A - B$ 可逆, 求证 $r(A) = r(B)$ 。

6. 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵。

(1) 若 A 可逆, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 若 $AC = CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

7. 定义如下线性变换为仿射变换:

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax + b,$$

其中 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ 。

(1) 证明: φ 可逆 $\iff A$ 可逆。

(2) 若 φ 可逆, 求出 φ^{-1} , 并证明 φ^{-1} 亦为仿射变换。

(3) 证明: 仿射变换的复合仍是仿射变换。

8. 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - \frac{1}{4}} dz.$$

9. 设 f 为整函数。若存在正整数 n 和正常数 C , 使得对模长充分大的 z 有 $|f(z)| \leq C|z|^n$, 证明: $f(z)$ 是次数不超过 n 次的多项式。



清华大学数学科学系
2021 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 三阶实对称矩阵计算题。

2. 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换，求证：

$$\ker \varphi = \ker \varphi^2 \iff \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi^2.$$

3. 设 A, B 是数域 F 上的 n 阶方阵， A, B 都可对角化， $AB = BA$ 。求证： A, B 可同时对角化。并举例说明 $AB \neq BA$ 时结论不一定成立。

4. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集，映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续可微的。求证：

(1) $n > m$ 时， f 不可能是单射。

(2) $n < m$ 时， f 不可能是满射。

5. 设 $f(x), \varphi(x)$ 是周期为 2 的偶函数，并且 $f(x) = x(2-x)$ ， $\varphi(x) = x$ ， $x \in [0, 1]$ 。

(1) 求 $f(x), \varphi(x)$ 的 Fourier 级数。

(2) 求证：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \varphi(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. 设

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

(1) 求 $\operatorname{div} \vec{B}$ 。

(2) 求证：不存在连续可微映射 $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ，使得 $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{B}$ 。

7. 设 $\alpha > 1$,

$$I(\alpha) = - \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx.$$

(1) 求 $I(\alpha)$ 。

(2) 求证：

$$I(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n\alpha - 1)^2}.$$



清华大学数学科学系
2021 年本校推免考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 已知复方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征多项式为 $(\lambda - 1)^n$ 。证明 A 与 A^2 相似。

2. (10 分) 已知实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

二次型 $f(x) = x^T A x$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上何时取到最大值, 最小值?

3. (10 分) 已知域 F 上的有限维线性空间 X, Y, U, V , 以及线性变换

$$\alpha: X \rightarrow Y, \quad \beta: V \rightarrow U, \quad \psi: X \rightarrow U,$$

并且满足

$$\ker \alpha \subset \ker \psi, \quad \operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Im} \beta.$$

那么是否存在线性映射 $\varphi: Y \rightarrow V$ 使得

$$\psi = \beta \circ \varphi \circ \alpha?$$

若是请证明, 否则举出一个反例。

4. (10 分) 已知域 F 上的方阵 $A, B \in M_n(F)$, 满足: A 是可逆矩阵, B 是幂零矩阵。证明: 对任意 $C \in M_n(F)$, 存在 $X \in M_n(F)$, 使得

$$AX - XB = C.$$

5. (10 分) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 并且 E 上的任何连续函数都有界。证明: E 是有界闭集。

6. (10 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的处处非负的黎曼可积函数, 并且

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明: $f(x)$ 几乎处处为 0。

7. (20 分) 计算 $\mathbb{R}^3$ 中的区域

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1, z^2 + x^2 \leq 1\}$$

的体积。

8. (20 分) 已知 $f(z)$ 在单位圆盘 $|z| < 1$ 解析, 并且

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}, \quad \forall |z| < 1.$$

证明: 对任意整数 $n \geq 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)!e.$$



清华大学数学科学系
2022 年预推免招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷仅适用于应用统计硕士生。

数学分析（考试时间 90 分钟，满分 50 分）

1. 求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}.$$

2. 设非负函数 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ ，讨论函数 $g(x) = \sqrt{f(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的可微性。

3. 求三元函数

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x + y + z = 1$ 下的极大值和极小值。

4. 定义

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx dy dz = \lim_{M \rightarrow +\infty} \iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

这里 $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq M^2\}$ 为三维闭球体 ($M > 0$)。

(1) 设 $P(x, y, z)$ 和 $Q(x, y, z)$ 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数，证明：

$$\iint_{\partial B} P(x, y, z) e^{Q(x, y, z)} \, dy dz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) e^{Q(x, y, z)} \, dx dy dz.$$

(2) 若 $P(x, y, z)$ 为三元多项式函数，证明：

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial P}{\partial x} e^{-x^2 - y^2 - z^2} \, dx dy dz = 2 \iiint_{\mathbb{R}^3} x P(x, y, z) e^{-x^2 - y^2 - z^2} \, dx dy dz.$$

5. 计算定积分

$$\int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{a - x} \, dx \quad (a > 0, b > 0).$$

线性代数（考试时间 90 分钟，满分 50 分）

6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 - 4x_2x_3$ 。

(1) 若二次型正定，求参数 t 的取值范围。

(2) 若 $t = -2$ ，用正交变换将二次型化为标准型。

7. 设 V 是数域 F 上的有限维向量空间， $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 为 V 上的线性变换，多项式 $f(x), g(x) \in F[x]$ ，它们的最大公因式和最小公倍式分别为 $d(x)$ 和 $m(x)$ 。证明：

$$\text{rank}(f(\mathcal{A})) + \text{rank}(g(\mathcal{A})) = \text{rank}(d(\mathcal{A})) + \text{rank}(m(\mathcal{A})).$$

8. 讨论 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 1 \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多解？并求出有解时的一般解。



9. 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的对称线性变换, 证明: 对 V 中的任何单位向量 α , 有 $\|\sigma(\alpha)\|^2 \leq \|\sigma^2(\alpha)\|$ 。
10. 数域 F 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合记为 $M_n(F)$ 。定义映射 $\varphi: M_n(F) \rightarrow F$, 满足以下条件:
- (1) 对任意 $A, B \in M_n(F)$, 有 $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$ 。
 - (2) 若 $A \in M_n(F)$ 是上三角矩阵, 则 $\varphi(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$, 其中 a_{ii} 为 A 的主对角线元素。
- 证明: 对任意矩阵 $A \in M_n(F)$, 恒有 $\varphi(A) = \det(A)$ 。



清华大学数学科学系
2023 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 A 是三阶实对称矩阵, 且每行元素和为 4, $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$ 为 $(I_3 - A)x = 0$ 的解. 求矩阵 A 以及正交阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵.
2. 设 V 是 n 维线性空间, $\varphi, \psi: V \rightarrow V$ 是线性变换, 且有 $\varphi^2 = \varphi$, $\ker \varphi$ 、 $\operatorname{Im} \varphi$ 均是 ψ -不变子空间, 求证: $\varphi\psi = \psi\varphi$.
3. 设 P 为实矩阵, 求证: 对称分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

的正负惯性指数相等, 且均等于 $\operatorname{rank}(P)$.

4. 设 A 为 n 阶复可逆矩阵, $s \in \mathbb{N}^+$, A^s 可对角化. 求证: A 可对角化, 并说明 A 可逆这个条件不能删去.
5. 若 $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, 解答下列问题:

(1) 证明: $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

(3) 问 $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 是否在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛?

6. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. 求证: f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微.
7. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是开集, 映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续可微, $x_0 \in \Omega$, 并且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+n}}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+n}}(x_0) \end{pmatrix}$$

的秩为 m , 其中 $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 表示 f 的第 i 个分量函数对第 j 个自变量分量求导. 求证: 存在 x_0 的开邻域 $U \subset \Omega$, 并且在 U 上有 C^1 同胚 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$, 使得

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_{m+n}) = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

8. 设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为坐标平面、 $x + y = 1$ 和 $x^2 + z^2 = 1$ 所围成的在第一象限的区域. 计算

$$\int_{\partial D} (2xz \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy),$$

其中 ∂D 取外侧.

9. $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是简单闭曲线, 设 D 为 γ 围成的无界区域, 有 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ 并且 $f(+\infty) = \alpha$, 计算

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

其中 z 在 γ 围成的有界区域内, 并且积分方向取正方向 (γ 逆时针方向).

10. 设 $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 是单位圆盘上的全纯函数, 并且 $f(0) = a$, 使用 Schwarz 引理证明: f 在 $B(0, |a|) = \{z \mid |z| < |a|\}$ 上无零点.



清华大学求真书院
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. (10 分) 是否存在 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 A 同时满足下列条件?

(1) $Ae^A = I_n$ 。

(2) A 的特征值为实数。

2. (10 分) 求出 $I + \alpha vv^T$ 的特征值和特征向量, 其中 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ 。

3. (20 分)

(1) 设 A 为 n 阶实反对称矩阵, B 为 n 阶实对角矩阵, 并且矩阵 B 的主对角线上的元素均大于零, 求证: $|A + B| > 0$ 。

(2) 设 A 是 n 阶正定矩阵, B 是 n 阶非零半正定矩阵, 求证: $|A + B| > |A| + |B|$ 。

4. (15 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导。证明或举例否定:

(1) 导函数在 $[a, b]$ 上连续。

(2) 导函数在 $[a, b]$ 上具有介值性。

5. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的函数, 对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$ 存在, 记该值为 $g(x)$ 。证明:

(1) $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。

(2) $f(x)$ 的间断点至多可数。

6. (10 分)

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(3x)}{3x^2} - \frac{\sin(2x)}{2x^2} \right] dx$$

是否收敛, 若收敛求积分值。

7. (10 分) 求级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1}.$$

8. (10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 中收敛, 求证其存在几乎处处收敛的子列。



清华大学数学科学系
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

试求矩阵 Q ，使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵，并求 A 的谱分解。

2. 设 $AB = BA$ ，求证 $AB^* = B^*A$ ，其中 B^* 表示 B 的伴随矩阵。

3. 设 F 为数域， $A \in M_{m \times m}(F)$ ， $B \in M_{n \times n}(F)$ ，并且

$$\varphi : M_{m \times n}(F) \rightarrow M_{m \times n}(F), \quad X \mapsto AXB.$$

求证：若 λ, μ 分别为 A, B 的特征值，则 $\lambda\mu$ 为 φ 的特征值，并且 φ 的特征值均有此形式。

4. 设 A 为 n 阶矩阵， $\text{rank}(A) = r$ 。求证 $I, A, \dots, A^{r+1}$ 线性相关。

5. 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为局部常值函数，求证 f 为常值函数。

6. 设 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ，试找出 $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ ， $(x, y) \mapsto xy^2$ 的驻点，判断其类型，并求出 u 的最值。

7. 设

$$I(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

试求 α 的范围使得 $I(\alpha)$ 收敛，并求出其收敛时的值。

8. 设 $f, g \in C(\mathbb{R})$ 且周期为 2π ，并且二者具有相同的 Fourier 展开式，求证： $f \equiv g$ 。

9. 设 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯函数，并且 $\text{Im } f(z) > 0$ ， $\forall z \in \mathbb{C}$ 。求证： f 为常值函数。

10. 求

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh x} dx \quad \text{及} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sinh x} dx.$$