



清华大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒 (25)



清华大学数学科学系
2015 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

解答 利用不等式 $\ln(1-x) \leq -x$ ($x < 1$) 得

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^{n \ln(1-k/n)} \leq e^{-k}.$$

又当 $k \leq n^{2/3}$ 时,

$$n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) + k = n\left(-\frac{k}{n} - \frac{k^2}{2n^2} + O\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right) + k = -\frac{k^2}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right) = O\left(\frac{n^{4/3}}{n}\right) = O(n^{-2/3}) \rightarrow 0,$$

即 $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \rightarrow e^{-k}$, 且对 $k \leq n^{2/3}$ 一致。于是

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1},$$

而尾部

$$0 \leq \sum_{k=\lfloor n^{2/3} \rfloor + 1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leq \sum_{k > \lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-k} \rightarrow 0.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1}.$$

□

2. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 可逆, A^m 为对角矩阵, 其中 $m > 1$ 为正整数。求证: A 可对角化。

解答 先看一个 Jordan 块 $J = J_k(\lambda) = \lambda I + N$ (N 为 k 阶幂零 Jordan 块)。因 A 可逆, $\lambda \neq 0$ 。由二项式展开,

$$J^m = (\lambda I + N)^m = \lambda^m I + m\lambda^{m-1}N + \binom{m}{2}\lambda^{m-2}N^2 + \dots.$$

其幂零部分 $P := m\lambda^{m-1}N + \binom{m}{2}\lambda^{m-2}N^2 + \dots$ 的第一超对角线上元素为 $m\lambda^{m-1} \neq 0$, 故 P 的秩为 $k-1$ 且 P 幂零 ($P^k = 0, P^{k-1} \neq 0$), 即 P 的 Jordan 形为 $J_k(0)$ 。于是 $J^m \sim J_k(\lambda^m)$: m 次幂保持 Jordan 块的大小。

设 A 的 Jordan 形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s))$, 则 A^m 的 Jordan 形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1^m), \dots, J_{k_s}(\lambda_s^m))$ 。题设 A^m 可对角化, 故所有块的大小 $k_i = 1$, 从而 A 本身可对角化。 □

3. V 是全体 $\mathbb{R}$ 上的多项式构成的线性空间, 对 $\forall f \in V, \varphi(f) = f + f'$ 。求证 φ 可逆。

解答 设 D 为求导算子, 则 $\varphi = I + D$ 。对任一多项式 g (设 $\deg g = m$), $D^{m+1}g = 0$, 定义

$$\psi(g) = \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^n g$$

(对每个具体的 g 都是有限和)。则

$$\varphi(\psi(g)) = (I + D) \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n)} = \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n)} + \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n+1)} = g$$



(交错和两两相消)。故 φ 满射。又若 $f + f' = 0$, 设 $f \neq 0$ 且 $\deg f = m$, 则 $f + f'$ 的首项仍为 f 的首项 (求导降低次数), $f + f' \neq 0$, 矛盾, 故 $\ker \varphi = \{0\}$, φ 单射。因此 φ 可逆, 且

$$\varphi^{-1}(g) = g - g' + g'' - \cdots + (-1)^{\deg g} g^{(\deg g)}.$$

□

4. 设 G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, D 为 G 的紧致子集, 映射 $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的, 且在集合 D 上是单射, 并且

$$\det F'(x) \neq 0, \quad \forall x \in D.$$

求证:

$$(1) d(D, \partial G) > 0;$$

$$(2) \text{ 存在 } 0 < \varepsilon < d(D, \partial G), \text{ 使得 } F|_{D_\varepsilon} \text{ 为单射, 其中 } D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, D) < \varepsilon\}.$$

解答 (1) 因 $D \subset G$ 且 G 开, $D \cap \partial G = \emptyset$ 。 D 紧致, ∂G 闭, 紧集与不交闭集的距离为正 (若 $d(D, \partial G) = 0$, 则存在 $x_k \in D, y_k \in \partial G$ 使 $|x_k - y_k| \rightarrow 0$; 由 D 紧致取子列 $x_k \rightarrow x \in D$, 则 $y_k \rightarrow x \in \partial G$, 与 $D \cap \partial G = \emptyset$ 矛盾)。故 $d(D, \partial G) > 0$ 。

(2) 反证: 若结论不成立, 则对任意 ε 都有两点 $x_\varepsilon \neq y_\varepsilon \in D_\varepsilon$ 使 $F(x_\varepsilon) = F(y_\varepsilon)$ 。取 $\varepsilon_k \rightarrow 0^+$, 得 $x_k \neq y_k, d(x_k, D), d(y_k, D) \rightarrow 0, F(x_k) = F(y_k)$ 。由 D 紧致, $d(x_k, D) \rightarrow 0$ 蕴含 x_k 有子列收敛于 D 中点; 同理 y_k 亦然, 且由 $d(x_k, y_k) \leq d(x_k, D) + d(y_k, D) + \text{diam } D$ 有界, 故可设 $x_k \rightarrow x_0, y_k \rightarrow y_0$, 其中 $x_0, y_0 \in D$ 。由 F 的连续性, $F(x_0) = F(y_0)$, 而 F 在 D 上单射, 故 $x_0 = y_0 =: p$ 。

因 $\det F'(p) \neq 0$, 由逆映射定理, F 在 p 的某邻域 $B(p, \delta)$ 上是微分同胚, 从而单射。但当 k 充分大时 $x_k, y_k \in B(p, \delta), x_k \neq y_k$ 而 $F(x_k) = F(y_k)$, 与局部单射矛盾。故存在 $\varepsilon > 0$ (可取 $\varepsilon < d(D, \partial G)$) 使 $F|_{D_\varepsilon}$ 为单射。 □

5. 设函数 $f(z)$ 是单位圆盘上的解析函数, $|z| < 1$ 时 $|f(z)| < 1$, α 是满足 $|\alpha| < 1$ 的复数, 且 $f(\alpha) = 0$ 。证明: $|z| < 1$ 时

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$

解答 记单位圆盘的自同构

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |z| < 1.$$

它是把 $|z| < 1$ 映到自身的双全纯映射 (Möbius 变换), 且 $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ 。令

$$g(w) = f(\varphi_\alpha^{-1}(w)),$$

则 g 在 $|w| < 1$ 上全纯, $|g(w)| < 1$, 且

$$g(0) = f(\alpha) = 0.$$

由 Schwarz 引理,

$$|g(w)| \leq |w|, \quad |w| < 1.$$

令 $w = \varphi_\alpha(z)$, 得

$$|f(z)| = |g(\varphi_\alpha(z))| \leq |\varphi_\alpha(z)| = \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$

证毕。(这就是 Schwarz-Pick 引理在 $f(\alpha) = 0$ 时的情形。) □



清华大学数学科学系
2016 年直博生招生考试试题（一）
来源：小红书作者 Relax

1. (1) 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的。试叙述关于 f 的逆映射定理（包括条件和结论）。
- (2) 试应用逆映射定理证明不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续可微单射。

解答 (1) **逆映射定理**: 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射, $x_0 \in D$, 且 $\det f'(x_0) \neq 0$ 。则存在 x_0 的邻域 $U \subset D$ 与 $f(x_0)$ 的邻域 V , 使得 $f|_U: U \rightarrow V$ 是 C^1 微分同胚（即双射、逆映射也 C^1 ），并且

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}, \quad x \in U.$$

(2)（设 $n \geq 2$; $n = 1$ 时有反例 $f(x) = x$ 。）反证: 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 单射。若存在 x_0 使 $\nabla f(x_0) \neq 0$, 则不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$ 。由隐函数定理, 方程 $f(x) = f(x_0)$ 在 x_0 附近确定一个 $(n-1)$ 维曲面, 特别地存在 $t \neq 0$ 充分小使点 x_0 与 $x_0 + (0, t, 0, \dots, 0)$ 附近的两点 (x_0) 与 $x_0 + tv$ ($v \perp \nabla f(x_0)$, $v \neq 0$) 满足

$$f(x_0 + tv) = f(x_0)$$

（把 f 在 x_0 处一阶展开: $f(x_0 + tv) = f(x_0) + t\nabla f(x_0) \cdot v + o(t) = f(x_0) + o(t)$, 再由隐函数定理修正为精确相等: 事实上在 $f = f(x_0)$ 的等值面上取一段曲线 $\gamma(t)$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = v$ ）。这与单射矛盾。故 $\nabla f \equiv 0$ 于 $\mathbb{R}^n$, f 为常数, 更不可能单射。矛盾。所以不存在 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 C^1 单射 ($n \geq 2$)。□

2. 设

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}} \right),$$

其中 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\vec{n}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面 S^2 的单位外法向量场。试求曲面积分

$$\iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

解答 按常见原题, 分母应为 r^3 ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), 即

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

直接计算散度 ($(x, y, z) \neq 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 在区域 $B(0, 1) \setminus \overline{B(0, \varepsilon)}$ 上用 Gauss 公式 (外法向):

$$0 = \iiint \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_\varepsilon^2} \vec{F} \cdot \vec{n}_\varepsilon d\sigma,$$

其中 S_ε^2 为半径 ε 的球面, $\vec{n}_\varepsilon$ 为其内法向 (指向区域内部)。在内法向上 $\vec{F} \cdot \vec{n}_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2}$ (因 $\vec{F} = \vec{r}/\varepsilon^3$ 沿外法向, 内法向取负), 故

$$\iint_{S_\varepsilon^2} \vec{F} \cdot \vec{n}_\varepsilon d\sigma = -\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi.$$

于是

$$\iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 4\pi.$$

(若按题面字面的分母 $x^2 + 2y^2 + 3z^2$, 该曲面积分没有初等的闭式解; 原题应为 r^3 形式。) □



3. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, $f(x) = x, \forall x \in (-\pi, \pi]$ 。

(1) 试求 f 的 Fourier 级数及 Fourier 级数的和函数, 并说明该级数是否在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。

(2) 试用上述 Fourier 级数及 Parseval 等式求出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的值。

解答 (1) f 为奇函数, 故 $a_n = 0$ ($n \geq 0$), 且

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

故

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

由 Dirichlet 收敛定理, Fourier 级数的和函数为: 在 f 的连续点取 $f(x)$, 在间断点取左右极限的平均值。 f (周期化后) 只在 $x = (2k+1)\pi$ 处有跳跃间断, 其左右极限为 π 与 $-\pi$, 平均值为 0。故和函数

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin (2\mathbb{Z}+1)\pi, \\ 0, & x \in (2\mathbb{Z}+1)\pi. \end{cases}$$

该级数在 $\mathbb{R}$ 上**不一致收敛**: 若一致收敛, 则和函数必连续, 但 S 在 $(2k+1)\pi$ 处间断 (Gibbs 现象)。

(2) 由 Parseval 等式 (对和函数 S 用, 或直接对 f 用——Parseval 只依赖于系数),

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2},$$

即

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

4. 设 $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 为全纯函数, $f(\alpha) = 0, \alpha \in B(0,1)$ 。

(1) 求证:

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|, \quad \forall z \in B(0,1).$$

(2) 求上述不等式中等号成立的充要条件。

解答 (1) 同 2015 年第 5 题: 令 $\varphi_{\alpha}(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ (圆盘自同构, $\varphi_{\alpha}(\alpha) = 0$), $g = f \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$, 则 $g(0) = f(\alpha) = 0, |g| < 1$ 。由 Schwarz 引理 $|g(w)| \leq |w|$, 代回 $w = \varphi_{\alpha}(z)$ 即得所证不等式。

(2) 由 Schwarz 引理的等号情形: $|g(w)| \leq |w|$ 中若在某点 $w \neq 0$ 取等号, 则存在 $|\lambda| = 1$ 使 $g(w) = \lambda w$ 对一切 $|w| < 1$ 成立; 若在 $w = 0$ 取等号则不等式为 $0 \leq 0$ 恒真, 此时结论需按“存在某 $z \neq \alpha$ 使等号成立”理解。故等号在某点 $z \neq \alpha$ 成立的充要条件是

$$f(z) = \lambda \varphi_{\alpha}(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |\lambda| = 1,$$

即 f 是圆盘的一个自同构 (Möbius 变换)。

□

5. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $f_A(x)$ 为 A 的特征多项式, $g(x) \in \mathbb{C}[x], \deg g(x) = n-1, g(x) \mid f_A(x)$ 。求 $g(A)$ 所有可能的秩, 并说明理由。

解答 因 $\deg g = n-1$ 且 $g \mid f_A$, 存在一次多项式 $x - \lambda$ (λ 为 A 的一个特征值) 使 $f_A(x) = g(x)(x - \lambda)$ 。由 Cayley-Hamilton 定理,

$$g(A)(A - \lambda I) = f_A(A) = O,$$



故 $\text{Im}(A - \lambda I) \subseteq \ker g(A)$, 从而

$$\text{rank } g(A) = n - \dim \ker g(A) \leq n - \text{rank}(A - \lambda I) = \dim \ker(A - \lambda I),$$

其中 $\dim \ker(A - \lambda I)$ 是 λ 的几何重数。

更精确地 (用 Jordan 形): 设 A 的 Jordan 块为 $J_{k_i}(\mu_i)$, g 中因子 $x - \mu$ 的重数为 m_μ ($\sum_\mu m_\mu = n - 1$)。对每个块,

$$\text{rank } g(J_{k_i}(\mu)) = \max(0, k_i - m_\mu)$$

($g(J) = (\mu J$ 的展开) $= (J - \mu I)^{m_\mu} u(J)$, $u(\mu) \neq 0$ 使 $u(J)$ 可逆, 故秩等于 $\text{rank}(J - \mu I)^{m_\mu} = \max(0, k_i - m_\mu)$)。特别地, 对满足 $m_\mu = a_\mu$ (a_μ 为 μ 的代数重数) 的特征值 μ , 其各块贡献 0; 只有那个 “缺一个因子” 的特征值 λ ($m_\lambda = a_\lambda - 1$) 的块可能贡献秩。其贡献为 $\sum_i \max(0, k_i - m_\lambda)$, 只可能取 0 或 1 (因 $\sum_i k_i = a_\lambda = m_\lambda + 1$: 各 $k_i \leq m_\lambda$ 时贡献为 0, 恰有一个块 $k_i = m_\lambda + 1$ 时贡献为 1, 其余情形不可能)。

因此

$$\text{rank } g(A) \in \{0, 1\}.$$

两种情形都可达到: 如 $A = \text{diag}(1, 2, 3)$, $g = (x - 1)(x - 2)$, 则 $g(A) = \text{diag}(0, 0, 2)$, 秩为 1; 如 $A = \text{diag}(1, 1, 2)$, $g = (x - 1)(x - 2)$, 则 $g(A) = O$, 秩为 0。且 $\text{rank } g(A) = 0 \iff g(A) = O \iff A$ 的极小多项式整除 g 。□

6. 设 V 为 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, φ 为 V 上的幂零线性变换, 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\varphi^k = I_V$, 又设 W 为 φ -不变子空间。求证: 存在 φ -不变子空间 W' , 使得 $V = W \oplus W'$ 。

解答 (有限阶线性变换的完全可约性, 特征 0 上 Maschke 定理的线性情形。) 取任一投影 $p: V \rightarrow W$ (线性, $p|_W = \text{id}$, 如任取 W 的一个补空间作投影)。作 “平均投影”

$$\pi = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i p \varphi^{-i}.$$

因 W 是 φ -不变子空间, 对 $w \in W$, $\varphi^{-i}w \in W$, $p\varphi^{-i}w = \varphi^{-i}w$, 故

$$\pi(w) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i \varphi^{-i}w = w,$$

即 $\pi|_W = \text{id}_W$, 且 $\pi(V) \subseteq W$ (p 的像在 W 中, φ^i 保持 W)。所以 π 是到 W 上的投影。又

$$\varphi \pi \varphi^{-1} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^{i+1} p \varphi^{-(i+1)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varphi^j p \varphi^{-j} = \pi$$

(因 $\varphi^k = \varphi^0 = I$, 和式作循环置换), 即 $\varphi \pi = \pi \varphi$ 。

令 $W' = \ker \pi$, 则 $V = W \oplus W'$ (投影分解), 且对 $w' \in W'$,

$$\pi(\varphi w') = \varphi \pi(w') = 0,$$

故 $\varphi w' \in W'$, W' 是 φ -不变子空间。证毕。□



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题（一）

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 100 分。

1. (10 分) 证明不存在一个实可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ 。

解答 反证：设可微函数 f 满足 $f(f(x)) = -x$ 。两边求导（链式法则）：

$$f'(f(x)) \cdot f'(x) = -1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

故 $f'(x) \neq 0$ 对一切 x 成立， f' 连续从而恒正或恒负， f 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调。若 f 严格递增，则复合 $f \circ f$ 严格递增，但 $x \mapsto -x$ 严格递减，矛盾；若 f 严格递减，则 $f \circ f$ 严格递增，同样与 $-x$ 严格递减矛盾。故这样的 f 不存在。

（另证：由 $f(f(x)) = -x$ 得 f 是双射，且 f 连续严格单调；于是 $f(f(x))$ 必严格递增，矛盾。） $\square$

2. (15 分) 证明 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

的根都是实数并且包含于区间 $(-1, 1)$ 内。

解答 记 $Q(x) = (x^2 - 1)^n$ ，则 Q 以 $x = \pm 1$ 为 n 重零点。下面归纳证明：对 $k = 0, 1, \dots, n$ ， $Q^{(k)}$ 在 $(-1, 1)$ 内至少有 k 个互异零点，且以 $x = \pm 1$ 为 $n - k$ 重零点（ $k \leq n - 1$ 时）。

$k = 0$ 显然。设 $Q^{(k)}$ 在 $(-1, 1)$ 内有 k 个互异零点 $x_1 < \dots < x_k$ （ $k < n$ ），则 $Q^{(k)}$ 以 ± 1 为零点（重数 $n - k \geq 1$ ）。对 $Q^{(k)}$ 在区间 $[-1, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, 1]$ 上各用一次 Rolle 定理，得 $Q^{(k+1)}$ 在 $(-1, 1)$ 内有 $k + 1$ 个互异零点；且 $Q^{(k+1)}$ 以 ± 1 为 $n - k - 1$ 重零点。归纳成立。

取 $k = n$ ： $Q^{(n)}$ 在 $(-1, 1)$ 内至少有 n 个互异零点。又 $Q^{(n)}$ 是 n 次多项式（ Q 为 $2n$ 次），故它恰有 n 个根，全部为实数且位于 $(-1, 1)$ 内。即 P_n 的 n 个根全为实数且都在 $(-1, 1)$ 中。 $\square$

3. (10 分) 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\int_0^{x^2+y^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dx dy.$$

解答 作极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，则 $x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta$ ：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[\int_0^{r^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r \left[\int_0^{r^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dr \\ &= \pi \int_0^1 \left[\int_0^u \frac{e^z}{1-z} dz \right] du \quad (u = r^2). \end{aligned}$$

交换积分次序（区域 $0 \leq z \leq u \leq 1$ ）：

$$I = \pi \int_0^1 \frac{e^z}{1-z} \left(\int_z^1 du \right) dz = \pi \int_0^1 e^z dz = \pi(e - 1).$$

$\square$

4. (10 分) 设 A 和 B 是两个 n 阶方阵。证明： AB 和 BA 有相同的特征值。

解答 先证 AB 与 BA 的非零特征值（计重数）相同。设 $\lambda \neq 0$ 是 AB 的特征值， $v \neq 0$ 满足 $ABv = \lambda v$ ，则 $Bv \neq 0$ （否则 $\lambda v = 0$ ），且

$$BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda Bv,$$



故 λ 也是 BA 的特征值。反过来由对称性, AB 与 BA 的非零特征值集合相同。

计重数也相同: 由 Sylvester 行列式恒等式 $\det(I_n - xAB) = \det(I_n - xBA)$ ($x \in \mathbb{C}$), 对 $\lambda \neq 0$ 取 $x = 1/\lambda$ 得

$$\det(\lambda I - AB) = \lambda^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}AB\right) = \lambda^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}BA\right) = \det(\lambda I - BA).$$

即 AB 与 BA 的特征多项式完全相同, 故特征值 (连同 0 的计重数) 完全相同。□

5. (15 分) 假设 I_n 是 n 阶单位矩阵, A 是一个 n 阶方阵, 令 $f(x) = \det(I_n + xA)$, 计算 $f'(0)$ 。

解答 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (计重数), 则 $I_n + xA$ 的特征值为 $1 + x\lambda_i$, 故

$$f(x) = \det(I_n + xA) = \prod_{i=1}^n (1 + x\lambda_i).$$

展开:

$$f(x) = 1 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)x + O(x^2) = 1 + \operatorname{tr}(A)x + O(x^2),$$

故

$$f'(0) = \operatorname{tr}(A).$$

(另法: 行列式按列的多重线性性, $f'(0) = \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, Ae_i, \dots, e_n) = \sum_i a_{ii} = \operatorname{tr} A$ 。) □

6. (15 分) 设 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个向量, 并且两两之间的内积满足 $(v_i, v_j) < 0$, $\forall i \neq j$ 。证明: $v_1, \dots, v_{n+1}$ 中一定存在 n 个向量, 它们组成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

解答 先证引理: $\mathbb{R}^m$ 中两两成钝角的非零向量至多有 $m+1$ 个。对 m 归纳: $m=1$ 时, 直线上两两成钝角 (即反向) 的非零向量至多 2 个。设结论对 $m-1$ 成立, 取 $\mathbb{R}^m$ 中两两成钝角的向量 $u_1, \dots, u_s$ 。固定 u_s , 把 u_i ($i < s$) 正交分解为 $u_i = \alpha_i \frac{u_s}{|u_s|} + w_i$, $w_i \perp u_s$ 。由 $(u_i, u_s) < 0$ 得 $\alpha_i < 0$; 且对 $i \neq j < s$,

$$(w_i, w_j) = (u_i, u_j) - \alpha_i \alpha_j < 0$$

($\alpha_i \alpha_j > 0$)。故 $w_1, \dots, w_{s-1}$ 是 $u_s^\perp \cong \mathbb{R}^{m-1}$ 中两两成钝角的非零向量 ($w_i \neq 0$: 若 $w_i = 0$, 则 u_i 与 u_s 反向, 此时 (u_i, u_j) 与 (u_s, u_j) 同号, 不可能都 < 0), 由归纳假设 $s-1 \leq m$, 即 $s \leq m+1$ 。

现在反证: 若 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 中任意 n 个都线性相关, 则这 $n+1$ 个向量的秩 $\leq n-1$, 它们都落在某个 $\leq (n-1)$ 维子空间中。但由引理, $n-1$ 维空间中两两成钝角的非零向量至多 n 个, 与有 $n+1$ 个矛盾。故存在 n 个线性无关的向量, 它们构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。□

7. (10 分) 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z \sin z}{1 - \cos z} dz.$$

解答 被积函数

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{1 - \cos z}.$$

在 $|z| < 1$ 内的奇点: $1 - \cos z = 0 \iff z = 2k\pi$, 单位圆内只有 $z = 0$ 。它是二阶极点 ($1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2}$)。计算留数, 作展开:

$$e^z \sin z = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots\right) \left(z - \frac{z^3}{6} + \dots\right) = z + z^2 + \frac{z^3}{3} + \dots,$$

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots = \frac{z^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{12} + \dots\right),$$



故

$$f(z) = \frac{2}{z^2}(z + z^2 + O(z^3))\left(1 + \frac{z^2}{12} + \cdots\right) = \frac{2}{z} + 2 + O(z).$$

所以 $\text{Res}(f, 0) = 2$ 。由留数定理,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} f(z) dz = \text{Res}(f, 0) = 2.$$

□

8. (15 分) 设 $f(z)$ 是一个处处非零的全纯函数。证明: 存在一个全纯函数 $g(z)$, 使得 $f(z) = e^{g(z)}$ 。

解答 因 f 在 $\mathbb{C}$ 上处处非零, 商函数 $\frac{f'}{f}$ 是整函数。定义

$$g(z) = \int_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + a,$$

其中积分沿从 0 到 z 的任一路径, a 为任一使 $e^a = f(0)$ 的复数 ($f(0) \neq 0$)。由于 $\mathbb{C}$ 单连通 (星形区域), $\frac{f'}{f}$ 的线积分与路径无关 (Cauchy 积分定理), 故 g 良定义且全纯, $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ 。于是

$$\frac{d}{dz} \left(f(z)e^{-g(z)} \right) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = 0,$$

故 $f(z)e^{-g(z)}$ 为常数 c 。又 $c = f(0)e^{-g(0)} = f(0)e^{-a} = 1$, 所以 $f(z) = e^{g(z)}$ 。

□



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题 (二)
来源: 小红书作者 Relax

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求证: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。

解答 当 $x > 0$ 时, 归纳可知 $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$, 其中 P_n 为多项式 (如 $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$)。因 e^{-1/x^2} 在 $x \rightarrow 0^+$ 时比任何 $\frac{1}{x^k}$ 都趋于 0 快,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

下面归纳证明 $f^{(n)}(0) = 0$ 且 $f^{(n)}$ 在 0 处连续。 $n = 0$: $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $x < 0$ 时 $f \equiv 0$, 故 f 在 0 连续。设 $f^{(n)}(0) = 0$ 且 $f^{(n)}$ 连续, 则

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h}.$$

$h < 0$ 时分子为 0; $h > 0$ 时

$$\left| \frac{f^{(n)}(h)}{h} \right| = \left| \frac{1}{h} P_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-1/h^2} \right| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0^+),$$

故 $f^{(n+1)}(0) = 0$, 且由 $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0 = f^{(n+1)}(0)$ 知 $f^{(n+1)}$ 在 0 连续。归纳完成, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。
□

2. 证明: Hermite 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

的所有根均为实数。

解答 记 $u(x) = e^{-x^2}$, 则 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} u^{(n)}(x)$, H_n 的零点与 $u^{(n)}$ 的零点一致。归纳证明 $u^{(n)}$ 至少有 n 个 (互异) 实零点。

$n = 1$: $u'(x) = -2xe^{-x^2}$ 有 1 个零点。设 $u^{(n)}$ 有 n 个互异实零点 $x_1 < \dots < x_n$ 。注意到 $u^{(n)}(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) (因 $u^{(n)} = H_n u$ 是多项式乘 e^{-x^2})。在区间 $(-\infty, x_1), [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, \infty)$ 上考察: 在相邻零点间由 Rolle 定理, $u^{(n+1)}$ 在 (x_i, x_{i+1}) 内有零点 ($n-1$ 个); 在 $(-\infty, x_1)$ 上 $u^{(n)}$ 非零且两端趋于 0 ($x \rightarrow -\infty$ 与 $x \rightarrow x_1$ 处 $u^{(n)} \rightarrow 0$), 故 $u^{(n)}$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上有极值点, 即 $u^{(n+1)}$ 有零点; 同理 (x_n, ∞) 上也有一零点。故 $u^{(n+1)}$ 至少有 $n+1$ 个互异实零点。

(严格地说, 在 $(-\infty, x_1)$ 上取 $u^{(n)}$ 的最大值或最小值的点即可; 若 $u^{(n)}$ 在该区间上无零点则其保持符号且两端趋于 0, 必在内部取到极值。) 归纳完成: $u^{(n)}$ 有 n 个互异实零点。又 H_n 是 n 次多项式 ($H_0 = 1, H_{n+1} = 2xH_n - H'_n$), 故 H_n 恰有 n 个实根。
□

3. 计算积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

其中 $ad - bc = \sqrt{7}$, L^+ 为椭圆 $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$, 取逆时针方向。

解答 作线性替换

$$u = ax + by, \quad v = cx + dy.$$



其系数矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式为 $ad - bc = \sqrt{7} > 0$, 故该替换保持定向 (逆时针仍为逆时针), 且把椭圆 L^+ 变为单位圆周 $C: u^2 + v^2 = 1$ (逆时针)。计算

$$\begin{aligned} u dv - v du &= (ax + by)(c dx + d dy) - (cx + dy)(a dx + b dy) \\ &= (bc - ad) y dx + (ad - bc) x dy = (ad - bc)(x dy - y dx) = \sqrt{7}(x dy - y dx). \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{1}{\sqrt{7}} \oint_C \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}.$$

在单位圆上 $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$:

$$u dv - v du = \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta - \sin \theta \cdot (-\sin \theta) d\theta = d\theta,$$

故

$$I = \frac{1}{\sqrt{7}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.$$

□

4. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为 $[a, b]$ 上的正值连续函数且 $g(x)$ 严格单调递减, 求证:

$$\frac{\int_a^b x f(x) g(x) dx}{\int_a^b f(x) g(x) dx} < \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

解答 (Chebyshev 积分不等式的加权形式。) 考虑二重积分

$$J = \int_a^b \int_a^b f(x) f(y) (x - y) (g(x) - g(y)) dx dy.$$

因 g 严格递减, 对 $x > y$ 有 $x - y > 0$ 、 $g(x) - g(y) < 0$, 故被积函数在 $x > y$ 处 < 0 , 在 $x < y$ 处 $(x - y)(g(x) - g(y))$ 亦 < 0 (两负之积为正乘 $f(x)f(y) > 0$ ……准确地说: $x < y$ 时 $x - y < 0$, $g(x) - g(y) > 0$, 乘积仍 < 0), 故 $J < 0$ ($f > 0$, 被积函数处处 ≤ 0 且在一正测度集上 < 0)。展开 J :

$$\begin{aligned} J &= \int \int f(x) f(y) [xg(x) - xg(y) - yg(x) + yg(y)] \\ &= \left(\int f \right) \left(\int xfg \right) - \left(\int fg \right) \left(\int xf \right) - \left(\int fg \right) \left(\int xf \right) + \left(\int f \right) \left(\int xfg \right) \\ &= 2 \left[\left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b xfg \right) - \left(\int_a^b fg \right) \left(\int_a^b xf \right) \right]. \end{aligned}$$

由 $J < 0$ 得

$$\left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b xfg \right) < \left(\int_a^b fg \right) \left(\int_a^b xf \right).$$

两边除以正数 $\left(\int f \right) \left(\int fg \right)$, 即得所证不等式。

□

5. 已知 n 阶矩阵 A, B 满足 $A^2 = A$, $B^2 = B$, 且 $I_n - A - B$ 可逆, 求证 $r(A) = r(B)$ 。

解答 由 $A^2 = A$ 得

$$A(I_n - A - B) = A - A^2 - AB = -AB,$$

故 $AB = -A(I_n - A - B)$ 。因 $I_n - A - B$ 可逆, 左乘可逆矩阵不改变秩:

$$r(AB) = r(A(I_n - A - B)) = r(A).$$



同理, 由 $B^2 = B$ 得

$$(I_n - A - B)B = B - AB - B^2 = -AB,$$

故

$$r(AB) = r((I_n - A - B)B) = r(B).$$

于是 $r(A) = r(AB) = r(B)$ 。

□

6. 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵。

(1) 若 A 可逆, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 若 $AC = CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

解答 (1) 用 Schur 补分解: A 可逆时,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式 (左、右两个块三角矩阵行列式为 1) 得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 先设 A 可逆。由 $AC = CA$ 得 $CA^{-1} = A^{-1}C$, 故

$$|AD - CB| = |A| \cdot |D - A^{-1}CB| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

(最后一步用 (1))。

对一般的 A (可能奇异), 用连续性 (或多项式恒等) 论证: 把 A 换成 $A + tI$ (t 为参数), 当 t 不是 $-A$ 的特征值时 $A + tI$ 可逆, 且 $(A + tI)C = C(A + tI)$ 仍成立。已证

$$\begin{vmatrix} A + tI & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + tI)D - CB|$$

对除有限个 t 外的一切 t 成立。两边都是 t 的多项式, 在无穷多个 t 处相等, 故恒等; 取 $t = 0$ 即得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

□

7. 定义如下线性变换为仿射变换:

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax + b,$$

其中 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ 。

(1) 证明: φ 可逆 $\iff A$ 可逆。

(2) 若 φ 可逆, 求出 φ^{-1} , 并证明 φ^{-1} 亦为仿射变换。

(3) 证明: 仿射变换的复合仍是仿射变换。



解答 (1) 若 A 可逆, 则对任意 $y \in \mathbb{R}^n$, 方程 $Ax + b = y$ 有唯一解 $x = A^{-1}(y - b)$, 故 φ 可逆。反之, 若 φ 可逆 (单射), 而 A 奇异, 则存在 $0 \neq u$ 使 $Au = 0$, 从而 $\varphi(x + u) = A(x + u) + b = Ax + b = \varphi(x)$, 与单射矛盾。故 A 可逆。

(2) 由 $y = Ax + b$ 解得

$$\varphi^{-1}(y) = A^{-1}(y - b) = A^{-1}y - A^{-1}b,$$

仍为 “线性部分 A^{-1} + 平移 $-A^{-1}b$ ” 的形式, 故 φ^{-1} 是仿射变换。

(3) 设 $\varphi(x) = Ax + b$, $\psi(x) = Cx + d$ 为两个仿射变换, 则

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(Cx + d) = A(Cx + d) + b = ACx + (Ad + b),$$

仍是仿射变换 (线性部分 AC , 平移 $Ad + b$)。

□

8. 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - \frac{1}{4}} dz.$$

解答 被积函数 $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{e^z}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}$ 在 $|z| < 1$ 内有单极点 $z = \pm \frac{1}{2}$ 。留数:

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = e^{1/2}, \quad \operatorname{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-1/2}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = -e^{-1/2}.$$

由留数定理,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} f(z) dz = e^{1/2} - e^{-1/2} = 2 \sinh\left(\frac{1}{2}\right).$$

□

9. 设 f 为整函数。若存在正整数 n 和正常数 C , 使得对模长充分大的 z 有 $|f(z)| \leq C|z|^n$, 证明: $f(z)$ 是次数不超过 n 次的多项式。

解答 对任意 $z_0 \in \mathbb{C}$ 与 $R > |z_0|$, 由 Cauchy 积分公式,

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+2}} d\zeta.$$

由条件, 当 R 充分大时 $|\zeta - z_0| = R$ 上有 $|\zeta| \leq R + |z_0|$ 且 $|f(\zeta)| \leq C|\zeta|^n$, 故

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \cdot \frac{C(R + |z_0|)^n}{R^{n+2}} \cdot 2\pi R = (n+1)! C \frac{(R + |z_0|)^n}{R^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

故 $f^{(n+1)}(z_0) = 0$ 对一切 z_0 成立, 即 $f^{(n+1)} \equiv 0$, f 是次数不超过 n 的多项式。

□



清华大学数学科学系
2021 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 三阶实对称矩阵计算题。

解答 (原题未给出具体矩阵, 此处给出此类题的通用解法。) 设给定三阶实对称矩阵 A 。步骤:

- (1) 求特征多项式 $|\lambda I - A|$, 解出特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (均为实数, 计重数);
- (2) 对每个特征值解齐次方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 得特征向量;
- (3) 不同特征值的特征向量自动正交; 对重特征值用 Gram-Schmidt 正交化, 再把所有特征向量单位化, 得标准正交基 q_1, q_2, q_3 ;
- (4) 令 $Q = (q_1, q_2, q_3)$, 则 Q 为正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3);$$

- (5) (若要求谱分解) $A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \lambda_3 q_3 q_3^T$ 。

□

2. 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换, 求证:

$$\ker \varphi = \ker \varphi^2 \iff \text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2.$$

解答 设 $\dim V = n$ 。恒有 $\ker \varphi \subseteq \ker \varphi^2$ 与 $\text{Im } \varphi^2 \subseteq \text{Im } \varphi$ 。由核像维数公式:

$$\dim \ker \varphi + \text{rank } \varphi = n, \quad \dim \ker \varphi^2 + \text{rank } \varphi^2 = n.$$

于是

$$\begin{aligned} \ker \varphi = \ker \varphi^2 &\iff \dim \ker \varphi = \dim \ker \varphi^2 \\ &\iff \text{rank } \varphi = \text{rank } \varphi^2 \\ &\iff \dim \text{Im } \varphi = \dim \text{Im } \varphi^2 \\ &\iff \text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2 \end{aligned}$$

(最后一步用到 $\text{Im } \varphi^2 \subseteq \text{Im } \varphi$ 及两者维数相等)。

□

3. 设 A, B 是数域 F 上的 n 阶方阵, A, B 都可对角化, $AB = BA$ 。求证: A, B 可同时对角化。并举例说明 $AB \neq BA$ 时结论不一定成立。

解答 设 $V = F^n$, A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (互异), 对应的特征子空间为 $V_i = \ker(A - \lambda_i I)$ 。因 A 可对角化, $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ 。由 $AB = BA$, 对 $v \in V_i$,

$$(A - \lambda_i I)Bv = B(A - \lambda_i I)v = 0,$$

故 $Bv \in V_i$, 即每个 V_i 是 B 的不变子空间。 B 可对角化, 故 $B|_{V_i}$ 也可对角化 (B 的极小多项式在 $B|_{V_i}$ 上仍无重根)。在每个 V_i 中取 $B|_{V_i}$ 的一组特征向量基, 拼起来得到 V 的一组基, 其中每个向量既是 A 的特征向量 (在 V_i 中) 又是 B 的特征向量。故 A, B 可同时对角化。

反例 ($AB \neq BA$ 时不可同时对角化): 取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



A 可对角化; B 可对角化 (特征值 $2, 0$)。 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$ 。若 A, B 同时对角化, 则存在公共特征向量; 但 A 的特征向量为 $e_1 = (1, 0)^T$ 、 $e_2 = (0, 1)^T$, 它们都不是 B 的特征向量 ($Be_1 = (1, 1)^T$, $Be_2 = (1, 1)^T$), 矛盾。故不可同时对角化。 $\square$

4. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续可微的。求证:

(1) $n > m$ 时, f 不可能是单射。

(2) $n < m$ 时, f 不可能是满射。

解答 (1) 反证: 设 f 为 C^1 单射。取 $x_0 \in \Omega$ 使 $\text{rank } f'(x_0) =: r$ 达到最大值 (连续函数 $x \mapsto \text{rank } f'(x)$ 在某点取最大)。因秩函数下半连续, 在 x_0 的某邻域内 $\text{rank } f'(x) \geq r$, 又由最大性 $\leq r$, 故该邻域内秩恒为 r 。由常秩定理, 在局部坐标下 f 形如

$$f(x) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

若 $r = m$, 则 f 局部把 n 个坐标压成 $m < n$ 个坐标, 等值面 $f = \text{常数}$ 局部是 $(n - m)$ 维 (≥ 1 维) 子流形, 其上任意两个不同点像相同, 与单射矛盾。若 $r < m$, 同样等值面维数 $n - r \geq n - m + 1 \geq 2 \geq 1$, 仍与单射矛盾。故不存在 C^1 单射。

(2) 由 $\text{rank } f'(x) \leq n < m$, Ω 中每一点都是 f 的临界点。由 Sard 定理, f 的临界值全体 (即 $f(\Omega)$) 在 $\mathbb{R}^m$ 中是零测集, 故 $f(\Omega) \subsetneq \mathbb{R}^m$, f 不是满射。

(附 Sard 定理的表述: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 C^1 映射, 则其临界值集合是 $\mathbb{R}^m$ 中的 Lebesgue 零测集。) $\square$

5. 设 $f(x), \varphi(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 并且 $f(x) = x(2 - x)$, $\varphi(x) = x$, $x \in [0, 1]$ 。

(1) 求 $f(x), \varphi(x)$ 的 Fourier 级数。

(2) 求证:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \varphi(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

解答 (1) 周期为 2 的偶函数的 Fourier 级数形如 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ (基函数 $\cos(n\pi x)$, 周期 2)。

对 φ ($\varphi(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$):

$$a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) \, dx = 2 \left[\frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2 \pi^2} \right]_0^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

故

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

对 f ($f(x) = x(2 - x)$, $x \in [0, 1]$, 偶延拓):

$$a_0 = 2 \int_0^1 x(2 - x) \, dx = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x(2 - x) \cos(n\pi x) \, dx = 2 \left[2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) \, dx - \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) \, dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right] = -\frac{4}{n^2 \pi^2} \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$



故

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}.$$

(2) 因 $|\varphi| \leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi(2^n x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。把 (1) 中 φ 的展开代入:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi(2^n x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi 2^n x)}{(2k+1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2^n(2k+1)\pi x)}{4^n(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

第一个和为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$ 。对第二个二重和: 每个正整数 m 可唯一写成 $m = 2^n(2k+1)$ ($n \geq 0$, $k \geq 0$), 故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2^n(2k+1)\pi x)}{4^n(2k+1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x)}{m^2}$$

(两级数均绝对一致收敛, 重排合法)。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \varphi(2^n x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x)}{m^2} = f(x).$$

□

6. 设

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

(1) 求 $\operatorname{div} \vec{B}$ 。

(2) 求证: 不存在连续可微映射 $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 使得 $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{B}$ 。

解答 (1) 记 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。由 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5},$$

故

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

(2) 反证: 若存在 C^1 的 $\vec{F}$ 使 $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{B}$, 对单位球面 S^2 (外法向 $\vec{n}$) 用 Stokes 公式:

$$\iint_{S^2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S^2} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_{\partial S^2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(S^2 是无边界的闭曲面)。但直接计算: 在 S^2 上 $\vec{B} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{r}/r^4 = 1$, 故

$$\iint_{S^2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S^2} 1 \, d\sigma = 4\pi \neq 0,$$

矛盾。故这样的 $\vec{F}$ 不存在。(注意: 若把定义域改为单连通区域, 如 $\mathbb{R}^3$ 去掉一条射线, 则 $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{F}$ 有解; 此处定义域“挖掉一点”不是单连通的, $\vec{B}$ 对应的 2-形式闭而非恰当。) □

7. 设 $\alpha > 1$,

$$I(\alpha) = - \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^\alpha} \, dx.$$

(1) 求 $I(\alpha)$ 。



(2) 求证:

$$I(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n\alpha - 1)^2}.$$

解答 (1) 作替换 $x = t^{1/\alpha}$ ($\ln x = \frac{1}{\alpha} \ln t$, $dx = \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha-1} dt$):

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \frac{\ln t \cdot t^{1/\alpha-1}}{1+t} dt.$$

利用熟知的 Euler 积分 ($0 < s < 1$):

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

对 s 求导 (在 $s \in (0, 1)$ 内可合法地在积分号下求导):

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1} \ln t}{1+t} dt = \frac{d}{ds} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} = -\frac{\pi^2 \cos(\pi s)}{\sin^2(\pi s)}.$$

取 $s = \frac{1}{\alpha}$:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx = -\frac{\pi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}},$$

故

$$I(\alpha) = \frac{\pi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}}.$$

(验证: $\alpha = 2$ 时由替换 $x \mapsto \frac{1}{x}$ 知 $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$, 与公式一致。)

(2) 用熟知的 Mittag-Leffler 部分分式展开 (可由 $\cot$ 的展开求导得到):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}.$$

取 $z = -\frac{1}{\alpha}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{\alpha})^2} = \frac{\pi^2 \cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}}.$$

两边除以 α^2 , 并把 n 换成 $-n$ ($(-1)^{-n} = (-1)^n$):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n\alpha - 1)^2} = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{\alpha})^2} = \frac{\pi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}} = I(\alpha).$$

□



清华大学数学科学系
2021 年本校推免考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 已知复方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征多项式为 $(\lambda - 1)^n$ 。证明 A 与 A^2 相似。

解答 由 Cayley-Hamilton 定理, $(A - I)^n = O$, 故 $N := A - I$ 幂零, $A = I + N$, $A^2 = I + 2N + N^2$ 。只需证 N 与 $2N + N^2$ 相似。

对每个 Jordan 块 $J = J_k(0)$ ($k \geq 1$), 证明 $2J + J^2 \sim J$ 。 $2J + J^2$ 是第一超对角线元素为 2、第二超对角线元素为 1 的严格上三角矩阵, 它是幂零的, 且对 $j = 1, \dots, k-1$,

$$(2J + J^2)^j = 2^j J^j + (\text{更高次项})$$

(二项展开中其余项为 $J^{j+1}, \dots$ 的组合), 故 $(2J + J^2)^j \neq O$ 而 $(2J + J^2)^k = O$, 其幂零指数恰为 k , 即其 Jordan 形为 $J_k(0) = J$ 。于是 $2J + J^2 \sim J$ 。

因 $N = \bigoplus_i J_{k_i}(0)$,

$$2N + N^2 = \bigoplus_i (2J_{k_i}(0) + J_{k_i}(0)^2) \sim \bigoplus_i J_{k_i}(0) = N,$$

故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}NP = 2N + N^2$, 从而

$$P^{-1}AP = P^{-1}(I + N)P = I + 2N + N^2 = A^2,$$

即 $A \sim A^2$ 。 □

2. (10 分) 已知实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

二次型 $f(x) = x^T Ax$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上何时取到最大值, 最小值?

解答 求 A 的特征值:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 2)(\lambda - 1) - 1] - (\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

特征值为 0, 2, 3。对应单位特征向量:

$$\lambda = 3: q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T; \quad \lambda = 0: q_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T; \quad \lambda = 2: q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T.$$

由 Rayleigh 商定理, $f(x) = x^T Ax \leq \lambda_{\max} = 3$, 等号当且仅当 $x = \pm q_3$; $f(x) \geq \lambda_{\min} = 0$, 等号当且仅当 $x = \pm q_0$ 。即: 最大值 3, 在 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 处取得; 最小值 0, 在 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ 处取得。□

3. (10 分) 已知域 F 上的有限维线性空间 X, Y, U, V , 以及线性变换

$$\alpha: X \rightarrow Y, \quad \beta: V \rightarrow U, \quad \psi: X \rightarrow U,$$

并且满足

$$\ker \alpha \subset \ker \psi, \quad \text{Im } \psi \subset \text{Im } \beta.$$

那么是否存在线性映射 $\varphi: Y \rightarrow V$ 使得

$$\psi = \beta \circ \varphi \circ \alpha?$$



若是请证明，否则举出一个反例。

解答 存在。构造如下：取 $\ker \beta$ 在 V 中的一个补空间 K ($V = \ker \beta \oplus K$)，则 $\beta|_K : K \rightarrow \operatorname{Im} \beta$ 是线性同构。

第一步，在 $\operatorname{Im} \alpha$ 上定义 φ ：对 $y = \alpha(x) \in \operatorname{Im} \alpha$ ，令

$$\varphi(y) = (\beta|_K)^{-1}(\psi(x)) \in K.$$

(由 $\operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Im} \beta$, $\psi(x) \in \operatorname{Im} \beta$, 故可取。) 验证良定义：若 $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ ，则 $x_1 - x_2 \in \ker \alpha \subset \ker \psi$ ，故 $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ 。且该定义是线性的：对 $y_i = \alpha(x_i)$ ，

$$\beta(\varphi(y_1) + \varphi(y_2)) = \psi(x_1) + \psi(x_2) = \psi(x_1 + x_2) = \beta(\varphi(\alpha(x_1 + x_2))),$$

而 $\varphi(y_1) + \varphi(y_2) \in K$, $\beta|_K$ 单射，故 $\varphi(y_1 + y_2) = \varphi(y_1) + \varphi(y_2)$ ；数乘同理。

第二步，把 φ 从 $\operatorname{Im} \alpha$ 线性延拓到整个 Y (取 $\operatorname{Im} \alpha$ 在 Y 中的补空间，在其上定义 φ 为 0)。

于是对任意 $x \in X$ ：

$$\beta(\varphi(\alpha(x))) = \beta((\beta|_K)^{-1}\psi(x)) = \psi(x),$$

即 $\psi = \beta \circ \varphi \circ \alpha$ 。

□

4. (10 分) 已知域 F 上的方阵 $A, B \in M_n(F)$ ，满足： A 是可逆矩阵， B 是幂零矩阵。证明：对任意 $C \in M_n(F)$ ，存在 $X \in M_n(F)$ ，使得

$$AX - XB = C.$$

解答 (Sylvester 方程。) 考虑线性映射

$$T: M_n(F) \rightarrow M_n(F), \quad X \mapsto AX - XB.$$

只需证 T 是单射 (有限维时单射即双射)。设 $T(X) = O$ ，即 $AX = XB$ 。归纳证明 $A^k X = XB^k$ 对一切 $k \geq 1$ 成立： $k=1$ 即假设；若 $A^k X = XB^k$ ，则

$$A^{k+1} X = A A^k X = A X B^k = (AX) B^k = (XB) B^k = XB^{k+1}.$$

取 $k=n$ ($B^n = O$)： $A^n X = XB^n = O$ 。因 A 可逆， A^n 可逆，故 $X = O$ 。于是 $\ker T = \{O\}$ ， T 单射，从而对任意 C ，方程 $T(X) = C$ 有唯一解。

□

5. (10 分) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集，并且 E 上的任何连续函数都有界。证明： E 是有界闭集。

解答 先证 E 有界：若 E 无界，则 $f(x) = x$ ($x \in E$) 是 E 上的连续函数，但在 E 上无界，与题设矛盾。故 E 有界。

再证 E 是闭集：若 E 不闭，则存在聚点 $x_0 \in \overline{E} \setminus E$ 。定义

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0}, \quad x \in E.$$

因 $x_0 \notin E$ ， f 在 E 上有定义且连续；又存在 E 中的点列 $x_n \rightarrow x_0$ ，使 $|f(x_n)| = \frac{1}{|x_n - x_0|} \rightarrow +\infty$ ，故 f 在 E 上无界，矛盾。故 E 是闭集。

综上， E 是有界闭集。

□



6. (10 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的处处非负的黎曼可积函数, 并且

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明: $f(x)$ 几乎处处为 0。

解答 由 Lebesgue 的黎曼可积性判别法, f 的间断点集为零测集, 即 f 在 $[0, 1]$ 上几乎处处连续。设 x_0 是 f 的一个连续点且 $f(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使 $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$ 于 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0, 1]$ 上, 从而

$$\int_0^1 f \geq \int_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0, 1]} f \geq \frac{f(x_0)}{2} \cdot (\text{正长度}) > 0,$$

与 $\int_0^1 f = 0$ 矛盾。故 f 在每个连续点处都等于 0, 即 $f(x) = 0$ 几乎处处成立。□

7. (20 分) 计算 $\mathbb{R}^3$ 中的区域

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1, z^2 + x^2 \leq 1\}$$

的体积。

解答 (三圆柱交体, Steinmetz 立体。) 设该区域为 Ω 。由关于三个坐标平面及各坐标置换的对称性, 把 Ω 分成 48 个全等的部分, 只算第一卦限中满足 $0 \leq x \leq y \leq z$ 的那一块 V_1 。

在 $0 \leq x \leq y \leq z$ 时, $x^2 + z^2 \leq y^2 + z^2$ 且 $x^2 + y^2 \leq x^2 + z^2$, 故最紧的约束是 $x^2 + y^2 \leq 1$; 又 $y^2 + z^2 \leq 1$ 给出 $z \leq \sqrt{1 - y^2}$, $z^2 + x^2 \leq 1$ 自动成立 ($x \leq y$)。所以

$$V_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y, y \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

($y \leq \sqrt{1 - y^2}$ 即 $y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$)。于是

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dz dx dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} y(\sqrt{1-y^2} - y) dy \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} y\sqrt{1-y^2} dy - \int_0^{1/\sqrt{2}} y^2 dy \\ &= \left[-\frac{(1-y^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2\sqrt{2}} - \frac{1}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

故

$$\text{vol}(\Omega) = 48 V_1 = 48 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 16 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 16 - 8\sqrt{2}.$$

□

8. (20 分) 已知 $f(z)$ 在单位圆盘 $|z| < 1$ 解析, 并且

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}, \quad \forall |z| < 1.$$

证明: 对任意整数 $n \geq 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! e.$$

解答 取 $0 < r < 1$, 由 Cauchy 积分公式,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$



故

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{n!}{r^n(1-r)}.$$

上式对一切 $0 < r < 1$ 成立, 取使 $r^n(1-r)$ 最大的 r 。令 $h(r) = r^n(1-r)$, 由

$$h'(r) = nr^{n-1}(1-r) - r^n = r^{n-1}(n - (n+1)r) = 0$$

得 $r = \frac{n}{n+1}$ ($n=0$ 时 $h(r) = 1-r$ 在 $r \rightarrow 0^+$ 时趋于 1, 结论单独验证)。于是

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}} = n! \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)!e$$

(用到 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$)。证毕。

□



清华大学数学科学系
2022 年预推免招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷仅适用于应用统计硕士生。

数学分析（考试时间 90 分钟，满分 50 分）

1. 求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}.$$

解答 (1) 由 $e^t - 1 \sim t \quad (t \rightarrow 0)$:

$$n(\sqrt[n]{a} - 1) = n(e^{\frac{\ln a}{n}} - 1) = \frac{e^{\frac{\ln a}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \ln a \quad (n \rightarrow \infty).$$

(2) 用 Taylor 展开:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \tan x - x = \frac{x^3}{3} + O(x^5),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{\frac{x^3}{3} + O(x^5)} = \frac{1}{2}.$$

□

2. 设非负函数 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 讨论函数 $g(x) = \sqrt{f(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的可微性。

解答 (i) 若 $f(x_0) > 0$: 由连续性, f 在 x_0 附近 > 0 , 而 $t \mapsto \sqrt{t}$ 在 $(0, \infty)$ 上光滑, 由链式法则 g 在 x_0 可导, 且

$$g'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

(ii) 若 $f(x_0) = 0$: 因 $f \geq 0$, x_0 是 f 的 (全局) 最小值点, 故 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) \geq 0$ 。由 Taylor 展开

$$f(x_0 + h) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2).$$

• 若 $f''(x_0) > 0$: 则 $\sqrt{f(x_0 + h)} \sim \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}|h|$, 从而

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{h} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}, & h \rightarrow 0^+, \\ -\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}, & h \rightarrow 0^-, \end{cases}$$

左右导数不相等, g 在 x_0 不可导;

• 若 $f''(x_0) = 0$: 则 $f(x_0 + h) = o(h^2)$, $\frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{h} = o(1) \rightarrow 0$, 故 g 在 x_0 可导且 $g'(x_0) = 0$ (若 $f \equiv 0$ 于 x_0 附近则更显然)。

综上: g 在 $f > 0$ 处可导; 在 $f = 0$ 处可导当且仅当 $f'' = 0$ (此时 $g' = 0$)。

□



3. 求三元函数

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x + y + z = 1$ 下的极大值和极小值。

解答 约束集是单位球面与平面 $x + y + z = 1$ 的交——一个圆，紧致，故最值存在。用 Lagrange 乘数法：

$$\nabla(xy + yz) = \lambda \nabla(x^2 + y^2 + z^2) + \mu \nabla(x + y + z),$$

即

$$\begin{cases} y = 2\lambda x + \mu, \\ x + z = 2\lambda y + \mu, \\ y = 2\lambda z + \mu. \end{cases}$$

第一、三式相减得 $2\lambda(x - z) = 0$ 。

情形一： $\lambda = 0$ 。则 $y = \mu = x + z$ ，结合 $x + y + z = 1$ 得 $y = \frac{1}{2}$ ， $x + z = \frac{1}{2}$ ；代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ： $x^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ 。由 $(x + z)^2 - 2xz = \frac{3}{4}$ 得 $xz = -\frac{1}{4}$ ，解得 $\{x, z\} = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$ 。此时

$$f = y(x + z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

情形二： $x = z$ 。代入约束： $y = 1 - 2x$ ， $2x^2 + (1 - 2x)^2 = 1$ ，即 $6x^2 - 4x = 0$ ，得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}$ 。对应两点：

$$(0, 1, 0): f = 0; \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right): f = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}.$$

比较三个候选值 $\frac{1}{4}$, 0 , $-\frac{4}{9}$ ，得

$$\text{极大值} = \frac{1}{4}, \quad \text{极小值} = -\frac{4}{9}.$$

□

4. 定义

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{M \rightarrow +\infty} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz,$$

这里 $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq M^2\}$ 为三维闭球体 ($M > 0$)。

(1) 设 $P(x, y, z)$ 和 $Q(x, y, z)$ 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数，证明：

$$\iint_{\partial B} P(x, y, z) e^{Q(x, y, z)} dy dz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) e^{Q(x, y, z)} dx dy dz.$$

(2) 若 $P(x, y, z)$ 为三元多项式函数，证明：

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial P}{\partial x} e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz = 2 \iiint_{\mathbb{R}^3} x P(x, y, z) e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz.$$

解答 (1) 对向量场

$$\vec{G} = (P e^Q, 0, 0)$$

在 B 上用 Gauss 公式 (∂B 取外法向)：

$$\iint_{\partial B} \vec{G} \cdot \vec{n} dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{G} dV.$$

而 $\vec{G} \cdot \vec{n} dS$ 的第一分量形式即 $P e^Q dy \wedge dz$ ，且

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial}{\partial x} (P e^Q) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) e^Q,$$



即得所证。

(2) 在 (1) 中取 $Q = -x^2 - y^2 - z^2$ ($\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$):

$$\iint_{\partial B} P e^{-x^2-y^2-z^2} dydz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} - 2xP \right) e^{-x^2-y^2-z^2} dV.$$

令 $M \rightarrow \infty$ 。左端的边界项: P 是多项式, 设 $\deg P = d$, 则 $|P| \leq C(1+r)^d$, 在 ∂B 上 $e^{-x^2-y^2-z^2} = e^{-M^2}$, 故

$$\left| \iint_{\partial B} P e^{-x^2-y^2-z^2} dydz \right| \leq C(1+M)^d e^{-M^2} \cdot 4\pi M^2 \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow \infty).$$

右端的三重积分收敛 (被积函数被 $C(1+r)^d e^{-r^2}$ 控制), 故

$$0 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - 2xP \right) e^{-x^2-y^2-z^2} dV,$$

即

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial P}{\partial x} e^{-x^2-y^2-z^2} dV = 2 \iiint_{\mathbb{R}^3} xP e^{-x^2-y^2-z^2} dV.$$

□

5. 计算定积分

$$\int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{a-x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解答 (设 $a > b$; $a \leq b$ 时积分在 $x = a$ 处发散。) 作替换 $x = b \sin \theta$:

$$I = \int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{a-x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{b \cos \theta}{a - b \sin \theta} \cdot b \cos \theta d\theta = b^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{a - b \sin \theta} d\theta.$$

(若 $a > b$, 分母恒正, 积分收敛。) 再把 $\sin \theta$ 的奇部分对称抵消:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{a - b \sin \theta} d\theta = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{a^2 - b^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

令 $t = \tan \theta$, 则 $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2}$, $d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(a^2 + (a^2-b^2)t^2)} &= \frac{1}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2 + (a^2-b^2)t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{b^2} \left(\pi - \frac{a^2-b^2}{a\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \pi \right) = \frac{\pi}{b^2} \left(1 - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \right). \end{aligned}$$

于是

$$I = b^2 \cdot a \cdot \frac{\pi}{ab^2} \left(a - \sqrt{a^2-b^2} \right) = \pi \left(a - \sqrt{a^2-b^2} \right).$$

□

线性代数 (考试时间 90 分钟, 满分 50 分)

6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 - 4x_2x_3$ 。

(1) 若二次型正定, 求参数 t 的取值范围。

(2) 若 $t = -2$, 用正交变换将二次型化为标准型。



解答 (1) 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

二次型正定当且仅当 A 的顺序主子式全为正:

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} = 2 - t^2 > 0, \quad |A| = 1 \cdot (6 - 4) - t \cdot (3t - 0) = 2 - 3t^2 > 0.$$

由 $2 - 3t^2 > 0$ 得 $|t| < \sqrt{\frac{2}{3}}$ (此时 $2 - t^2 > 0$ 自动满足)。故 t 的取值范围为

$$|t| < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(2) $t = -2$ 时

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

特征值为 $5, 2, -1$ 。对应特征向量:

$$\lambda = 5: (1, -2, 2)^T; \quad \lambda = 2: (-2, 1, 2)^T; \quad \lambda = -1: (2, 2, 1)^T.$$

(可验证它们两两正交。) 单位化得正交矩阵

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

作正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, 二次型化为标准型

$$f = 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2.$$

□

7. 设 V 是数域 F 上的有限维向量空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 为 V 上的线性变换, 多项式 $f(x), g(x) \in F[x]$, 它们的最大公因式和最小公倍式分别为 $d(x)$ 和 $m(x)$ 。证明:

$$\text{rank}(f(\mathcal{A})) + \text{rank}(g(\mathcal{A})) = \text{rank}(d(\mathcal{A})) + \text{rank}(m(\mathcal{A})).$$

解答 (在 F 的代数闭包上考察。) 取基使 $\mathcal{A}$ 化为 Jordan 标准形, 则问题化为逐块验证。设一个 Jordan 块为 $J = J_k(\lambda)$, 对任一多项式 p :

$$p(J) = (p(\lambda)I + p'(\lambda)N + \cdots),$$

若 $p(\lambda) \neq 0$, 则 $p(J)$ 可逆, 秩为 k ; 若 λ 是 p 的 s_p 重根, 则 $p(J) = (J - \lambda I)^{s_p} u(J)$ ($u(\lambda) \neq 0$, $u(J)$ 可逆), 故

$$\text{rank } p(J) = \text{rank}(J - \lambda I)^{s_p} = \max(0, k - s_p).$$



记 λ 在 f, g 中的重数分别为 s_f, s_g , 则其在 $d = \gcd(f, g)$ 中的重数为 $\min(s_f, s_g)$, 在 $m = \text{lcm}(f, g)$ 中的重数为 $\max(s_f, s_g)$ 。于是该块对四个秩的贡献之和满足

$$\max(0, k - s_f) + \max(0, k - s_g) = \max(0, k - \min(s_f, s_g)) + \max(0, k - \max(s_f, s_g)),$$

(不妨设 $s_f \leq s_g$, 上式即 $(k - s_f)_+ + (k - s_g)_+ = (k - s_f)_+ + (k - s_g)_+$, 显然成立)。对全部 Jordan 块求和, 即得所证等式。□

8. 讨论 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 1 \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多解? 并求出有解时的一般解。

解答 方程组即 $\lambda x_i + (x_1 + x_2 + x_3) = 1$ ($i = 1, 2, 3$), 系数矩阵为 $\lambda I_3 + J$ (J 为全 1 矩阵), 其行列式为

$$|\lambda I + J| = (\lambda + 3)\lambda^2.$$

(J 的特征值为 $3, 0, 0$ 。)

情形一: $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 。系数矩阵可逆, 有唯一解。由对称性 $x_1 = x_2 = x_3 = x$, 代入得 $(\lambda + 3)x = 1$, 故唯一解为

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 3}.$$

情形二: $\lambda = 0$ 。方程组化为 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (系数矩阵秩为 1, 增广矩阵秩也为 1), 有无穷多解, 一般解为

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2, \quad x_1, x_2 \text{ 任意}.$$

情形三: $\lambda = -3$ 。方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

三式相加得 $0 = 3$, 矛盾, 故无解。

综上: $\lambda \neq 0, -3$ 时有唯一解 $(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3})$; $\lambda = 0$ 时有无穷多解 ($x_1 + x_2 + x_3 = 1$); $\lambda = -3$ 时无解。□

9. 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的对称线性变换, 证明: 对 V 中的任何单位向量 α , 有 $\|\sigma(\alpha)\|^2 \leq \|\sigma^2(\alpha)\|$ 。

解答 由 σ 对称 (自伴随) 及 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\|\sigma(\alpha)\|^2 = \langle \sigma\alpha, \sigma\alpha \rangle = \langle \alpha, \sigma^2\alpha \rangle \leq \|\alpha\| \cdot \|\sigma^2\alpha\| = \|\sigma^2(\alpha)\|,$$

(最后一步用到 $\|\alpha\| = 1$)。证毕。

(注: 等号情形可进一步刻画: 设 σ 的特征值为 λ_i , $\alpha = \sum c_i e_i$ ($\sum c_i^2 = 1$), 则 $\|\sigma\alpha\|^2 = \sum \lambda_i^2 c_i^2$, $\|\sigma^2\alpha\| = (\sum \lambda_i^4 c_i^2)^{1/2}$, 由 Cauchy 不等式 $(\sum \lambda_i^2 c_i^2)^2 \leq \sum \lambda_i^4 c_i^2$ 即得。) □

10. 数域 F 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合记为 $M_n(F)$ 。定义映射 $\varphi: M_n(F) \rightarrow F$, 满足以下条件:

(1) 对任意 $A, B \in M_n(F)$, 有 $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$ 。



(2) 若 $A \in M_n(F)$ 是上三角矩阵, 则 $\varphi(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$, 其中 a_{ii} 为 A 的主对角线元素。

证明: 对任意矩阵 $A \in M_n(F)$, 恒有 $\varphi(A) = \det(A)$ 。

解答 先看初等矩阵。记三类初等矩阵:

- 换行矩阵 (对换第 i, j 行) P_{ij} : $P_{ij}^2 = I$, 故 $\varphi(P_{ij})^2 = \varphi(I) = 1$, $\varphi(P_{ij}) = \pm 1$;
- 倍乘矩阵 $D_i(c)$ (对角矩阵, 第 i 个对角元为 $c \neq 0$, 其余为 1): 它是上三角矩阵, $\varphi(D_i(c)) = c$;
- 消元矩阵 $E_{ij}(c)$ (I 的第 (i, j) 元换成 c , $i \neq j$): 当 $i < j$ 时它是上三角矩阵且对角元全 1, 故 $\varphi = 1$; 当 $i > j$ 时, $E_{ij}(c) = P_{ij}E_{ji}(c)P_{ij}$, 故

$$\varphi(E_{ij}(c)) = \varphi(P_{ij})^2 \varphi(E_{ji}(c)) = 1.$$

再定 $\varphi(P_{ij}) = -1$: 利用标准分解 (把对换写成上三角消元、下三角消元与一个倍乘矩阵的乘积),

$$P_{ij} = E_{ij}(1) E_{ji}(-1) E_{ij}(1) D_i(-1)$$

(在 2×2 情形即 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)。于是

$$\varphi(P_{ij}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

故 φ 在全部三类初等矩阵上与 $\det$ 取值相同。

对任意矩阵 A , 由 Gauss 消元, A 可写成初等矩阵与一个对角形矩阵

$$D_r = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ 个}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ 个}})$$

的乘积: $A = E_1 E_2 \cdots E_k D_r$ (先用行变换化为行阶梯形, 其行阶梯形经列置换即 D_r ; 列置换也是初等矩阵)。 D_r 是上三角矩阵, $\varphi(D_r) = \det(D_r)$ ($r < n$ 时两者都为 0, $r = n$ 时为 1)。由 φ 的乘法性,

$$\varphi(A) = \varphi(E_1) \cdots \varphi(E_k) \varphi(D_r) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(D_r) = \det(A).$$

证毕。 □



清华大学数学科学系
2023 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设 A 是三阶实对称矩阵，且每行元素和为 4， $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$ 为 $(I_3 - A)x = 0$ 的解。求矩阵 A 以及正交阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵。

解答 每行元素和为 4 即 $A(1, 1, 1)^T = 4(1, 1, 1)^T$ ，故 4 是 A 的特征值， $v_1 = (1, 1, 1)^T$ 是特征向量。又 $(I_3 - A)\alpha_i = 0$ 即 $A\alpha_i = \alpha_i$ ，故 α_1, α_2 是特征值 1 的特征向量，它们线性无关（显然不成比例）。 A 为对称矩阵，不同特征值的特征向量正交，且 $\alpha_1 \cdot v_1 = 1 - 1 + 0 = 0$ ， $\alpha_2 \cdot v_1 = 1 - 2 + 1 = 0$ ，一致。于是 A 的特征值为 4, 1, 1。取标准正交特征向量基：

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T,$$

在 α_1, α_2 张成的平面内取与 q_2 正交的单位向量：

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T$$

（即对 $(1, -2, 1)$ 作 Gram-Schmidt 后再单位化）。令

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则 Q 正交且

$$Q^T A Q = \text{diag}(4, 1, 1).$$

谱分解（还原 A ）：

$$A = 4q_1q_1^T + q_2q_2^T + q_3q_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

（验证：每行和为 4， $A\alpha_1 = \alpha_1$ ， $A\alpha_2 = \alpha_2$ 。）

□

2. 设 V 是 n 维线性空间， $\varphi, \psi: V \rightarrow V$ 是线性变换，且有 $\varphi^2 = \varphi$ ， $\ker \varphi$ 、 $\text{Im } \varphi$ 均是 ψ -不变子空间，求证： $\varphi\psi = \psi\varphi$ 。

解答 由 $\varphi^2 = \varphi$ ， φ 是投影， $V = \ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi$ （ $v = \varphi v + (v - \varphi v)$ ，其中 $\varphi v \in \text{Im } \varphi$ ， $v - \varphi v \in \ker \varphi$ ）。任取 $v \in V$ ：

$$\psi v = \psi(\varphi v) + \psi(v - \varphi v),$$

其中 $\psi(\varphi v) \in \text{Im } \varphi$ （ $\text{Im } \varphi$ 是 ψ -不变的）， $\psi(v - \varphi v) \in \ker \varphi$ （ $\ker \varphi$ 是 ψ -不变的）。于是

$$\varphi\psi(v) = \varphi(\psi(\varphi v)) + \varphi(\psi(v - \varphi v)) = \psi(\varphi v) + 0 = \psi(\varphi(v)) = \psi\varphi(v)$$

（ $\psi(\varphi v) \in \text{Im } \varphi$ 且 φ 在其上为恒等）。由 v 的任意性， $\varphi\psi = \psi\varphi$ 。

□

3. 设 P 为实矩阵，求证：对称分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

的正负惯性指数相等，且均等于 $\text{rank}(P)$ 。

解答 记 $S = \begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}$ 。



设 P 为 $m \times n$ 实矩阵, 作奇异值分解 $P = U\Sigma V^T$, 其中 $U \in O(m)$, $V \in O(n)$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$, $r = \text{rank } P$, $\sigma_i > 0$ 。则

$$S = \begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^T \\ \Sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & V^T \end{pmatrix}.$$

故 S 正交合同于 $\begin{pmatrix} 0 & \Sigma^T \\ \Sigma & 0 \end{pmatrix}$, 后者是分块对角矩阵, 块为 $\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ ($i = 1, \dots, r$) 与零块。每个 2×2 块 $\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\pm\sigma$, 正、负各一。故 S 的正惯性指数 = 负惯性指数 = $r = \text{rank } P$ 。□

4. 设 A 为 n 阶复可逆矩阵, $s \in \mathbb{N}^+$, A^s 可对角化。求证: A 可对角化, 并说明 A 可逆这个条件不能删去。

解答 设 A 的 Jordan 形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_t}(\lambda_t))$ 。因 A 可逆, $\lambda_i \neq 0$ 。对每个块 $J_k(\lambda) = \lambda I + N$,

$$J_k(\lambda)^s = \lambda^s I + s\lambda^{s-1}N + \binom{s}{2}\lambda^{s-2}N^2 + \dots,$$

其幂零部分的第一超对角线元素为 $s\lambda^{s-1} \neq 0$, 故 $J_k(\lambda)^s$ 仍是一个大小为 k 的 Jordan 块 ($J_k(\lambda)^s \sim J_k(\lambda^s)$)。因此 A^s 的 Jordan 块与 A 的 Jordan 块大小一一对应。题设 A^s 可对角化, 故所有块的大小为 1, 从而 A 可对角化。

“可逆”不能删去: 取幂零矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = O$ 可对角化, 但 A 不可对角化 (幂零非零矩阵)。
□

5. 若 $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, 解答下列问题:

- (1) 证明: $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛。
- (2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 。
- (3) 问 $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 是否在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛?

解答 记 $S(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!}$, 则题设级数即 $e^{-x}S(x)$ 。

- (1) 因 $\{a_n\}$ 收敛故有界, 设 $|a_n| \leq M$ 。对任意固定的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| a_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq M \frac{|x|^n}{n!},$$

而 $\sum \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|} < +\infty$, 故 $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛, $S(x)$ 良定义, 原级数 (乘上 e^{-x}) 在 $\mathbb{R}$ 上收敛。

- (2) 因 $e^{-x} \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1$,

$$e^{-x}S(x) - \alpha = e^{-x} \sum_{n=0}^\infty (a_n - \alpha) \frac{x^n}{n!}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 N 使 $n > N$ 时 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ 。则

$$\left| e^{-x} \sum_{n>N} (a_n - \alpha) \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon e^{-x} \sum_{n>N} \frac{x^n}{n!} \leq \varepsilon \quad (x > 0),$$

而前有限项部分

$$e^{-x} \sum_{n=0}^N |a_n - \alpha| \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$



(有限个 $e^{-x}x^n$ 之和趋于 0)。故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} S(x) = \alpha.$$

(3) 不一定一致收敛。反例：取 $a_0 = 1$, $a_n = 0$ ($n \geq 1$)，则 $a_n \rightarrow \alpha = 0$ ，而

$$e^{-x} S(x) = e^{-x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} S(x) = 0.$$

部分和序列 $S_N(x)e^{-x} = \sum_{n=0}^N a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} = e^{-x}$ (对一切 $N \geq 0$)，

$$\sup_{x \in (0, \infty)} |S_N(x)e^{-x} - 0| = \sup_{x > 0} e^{-x} = 1 \not\rightarrow 0,$$

故在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛。 $\square$

6. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数，在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上可微，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。求证： f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微。

解答 只需证 f 在原点可微且 $df(0) = 0$ 。任取 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ，考虑 $g(t) = f(tx)$ ($t \in [0, 1]$)，它在 $[0, 1]$ 上连续、在 $(0, 1]$ 上可微。由 Lagrange 中值定理，存在 $\theta \in (0, 1)$ 使

$$f(x) - f(0) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \nabla f(\theta x) \cdot x.$$

由条件 $\nabla f(y) \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$)，当 $x \rightarrow 0$ 时 $\theta x \rightarrow 0$ ，故

$$\frac{|f(x) - f(0) - df(0) \cdot x|}{|x|} = \frac{|\nabla f(\theta x) \cdot x|}{|x|} \leq |\nabla f(\theta x)| \rightarrow 0.$$

因此 f 在 0 处可微 (且 $f(0) = 0$ 时导数为 0 向量；一般地 $df(0) = 0$)。 $\square$

7. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是开集，映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续可微， $x_0 \in \Omega$ ，并且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+n}}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+n}}(x_0) \end{pmatrix}$$

的秩为 m ，其中 $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 表示 f 的第 i 个分量函数对第 j 个自变量分量求导。求证：存在 x_0 的开邻域 $U \subset \Omega$ ，并且在 U 上有 C^1 同胚 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ，使得

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_{m+n}) = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

解答 (秩定理。) 秩为 m 说明 Jacobi 矩阵的 m 行线性无关，即存在 m 列构成可逆的 $m \times m$ 子矩阵。对自变量坐标作一个置换 (记置换后的坐标为 $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $x = (u, v)$ 至多重排分量)，使

$$\det \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) \neq 0.$$

定义

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}, \quad \Phi(u, v) = (f(u, v), v).$$

则 Φ 是 C^1 的，且

$$\Phi'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

其行列式 $= \det \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) \neq 0$ 。由逆映射定理，存在 x_0 的邻域 U 使 $\Phi|_U: U \rightarrow \Phi(U)$ 为 C^1 同胚。取 $\varphi = \Phi|_U$ (并记新坐标 $y = (y_1, \dots, y_{m+n}) = \Phi(u, v) = (f(u, v), v)$)，则

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_{m+n}) = f(\Phi^{-1}(y)) = (\Phi \circ \Phi^{-1}(y)) \text{ 的前 } m \text{ 个分量} = (y_1, \dots, y_m).$$

证毕。 $\square$



8. 设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为坐标平面、 $x + y = 1$ 和 $x^2 + z^2 = 1$ 所围成的在第一象限的区域。计算

$$\int_{\partial D} (2xz \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy),$$

其中 ∂D 取外侧。

解答 (Stokes/Gauss 公式。) 对微分形式 $\omega = 2xz \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy$,

$$d\omega = \left(\frac{\partial(2xz)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (1 + 4z) \, dx \wedge dy \wedge dz.$$

区域

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

由 Gauss 公式:

$$\int_{\partial D} \omega = \iiint_D (1 + 4z) \, dx \, dy \, dz.$$

按 x, z 先积分 y ($0 \leq y \leq 1 - x$):

$$\begin{aligned} \iiint_D (1 + 4z) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x} (1 + 4z) \, dy \, dz \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)(1 + 4z) \, dz \, dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) \left[\sqrt{1-x^2} + 2(1-x^2) \right] dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) \sqrt{1-x^2} \, dx + 2 \int_0^1 (1 - x)(1 - x^2) \, dx \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) + 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(其中 $\int_0^1 (1 - x) \sqrt{1 - x^2} \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx - \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$, $\int_0^1 (1 - x)(1 - x^2) \, dx = \frac{5}{12}$ 。) 故

$$\int_{\partial D} \omega = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

□

9. $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是简单闭曲线, 设 D 为 γ 围成的无界区域, 有 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ 并且 $f(+\infty) = \alpha$, 计算

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi,$$

其中 z 在 γ 围成的有界区域内, 并且积分方向取正方向 (γ 逆时针方向)。

解答 记 $g(\xi) = f(\xi) - \alpha$, 则 g 在无界区域 D 上解析, $g(\infty) = 0$ 。取 R 充分大, 使 z 与 γ 都在 $|\xi| < R$ 内。 $g(\xi)/(\xi - z)$ 在 γ 与 $|\xi| = R$ 之间的环域上解析, 由 Cauchy 定理 (环域的两个边界分量, 外圆取逆时针、内圆 γ 取顺时针时积分之和为 0):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma, \text{逆时针}} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

令 $R \rightarrow \infty$:

$$\left| \oint_{|\xi|=R} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \right| \leq \sup_{|\xi|=R} |g(\xi)| \cdot \frac{2\pi R}{R - |z|} \rightarrow 0 \quad (\text{因 } g(\xi) \rightarrow 0).$$

故

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi) - \alpha}{\xi - z} \, d\xi = 0.$$



又由 Cauchy 积分公式 (常数 α 在 γ 内部解析),

$$\int_{\gamma} \frac{\alpha}{\xi - z} d\xi = \alpha \cdot 2\pi i.$$

相加得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \alpha.$$

(验证: 如 γ 为单位圆, $f(\xi) = \alpha + \frac{1}{\xi}$, $|z| < 1$ 时 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} \frac{\alpha + 1/\xi}{\xi - z} d\xi = \alpha$.) □

10. 设 $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 是单位圆盘上的全纯函数, 并且 $f(0) = a$, 使用 Schwarz 引理证明: f 在 $B(0,|a|) = \{z \mid |z| < |a|\}$ 上无零点。

解答 反证: 设存在 z_0 , $|z_0| < |a|$, 使 $f(z_0) = 0$ 。对圆盘自同构

$$\varphi_{z_0}(w) = \frac{w - z_0}{1 - \overline{z_0}w}$$

应用 Schwarz-Pick 引理 (f 映圆盘到圆盘):

$$|f(z_0)| \leq |\varphi_{z_0}(z_0)| = 0$$

不产生矛盾; 改用在 $z = 0$ 处的 Schwarz-Pick 不等式:

$$\frac{|f(0) - f(z_0)|}{|1 - \overline{f(z_0)}f(0)|} \leq \left| \frac{0 - z_0}{1 - \overline{z_0} \cdot 0} \right| = |z_0|.$$

由 $f(z_0) = 0$, $f(0) = a$, 左端为 $\frac{|a|}{|1 - \overline{0} \cdot a|} = |a|$, 故

$$|a| \leq |z_0| < |a|,$$

矛盾。故 f 在 $B(0,|a|)$ 上无零点。

(更直接地: 若 $f(z_0) = 0$, 由 Schwarz-Pick 引理,

$$|f(0)| = |\varphi_{z_0}(f(z_0)) \cdots|$$

的变形即 $|a| \leq |\varphi_{z_0}(0)| = |z_0|$, 同样矛盾。) □



清华大学求真书院
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. (10 分) 是否存在 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 A 同时满足下列条件?

- (1) $Ae^A = I_n$ 。
- (2) A 的特征值为实数。

解答 存在。取 $A = \lambda_0 I_n$ ，其中 λ_0 为方程 $xe^x = 1$ 的唯一实数解（存在唯一： $h(x) = xe^x$ 在 $[0, \infty)$ 上严格递增， $h(0) = 0$ ， $h(1) = e > 1$ ，故存在唯一 $\lambda_0 \in (0, 1)$ ， $\lambda_0 \approx 0.5671$ ）。则

$$Ae^A = \lambda_0 I_n \cdot e^{\lambda_0} I_n = \lambda_0 e^{\lambda_0} I_n = I_n,$$

且 A 的 n 个特征值均为 λ_0 （实数）。故这样的矩阵存在。

（事实上 $A = \lambda_0 I_n$ 是唯一解：若 $Ae^A = I_n$ ，则 A 与 e^A 可交换， $A = e^{-A}$ ； A 的特征值 λ 满足 $\lambda e^\lambda = 1$ ，实数特征值只能为 λ_0 ；若 A 有大小 ≥ 2 的 Jordan 块，则 $Ae^A = I$ 还要求 $(xe^x)'|_{x=\lambda_0} = 0$ ，但 $e^{\lambda_0}(1 + \lambda_0) \neq 0$ ，故 A 只能为 $\lambda_0 I_n$ 。） $\square$

2. (10 分) 求出 $I + \alpha vv^T$ 的特征值和特征向量，其中 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ ， $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ 。

解答 记 $M = I + \alpha vv^T$ 。

- 对向量 v 本身： $Mv = v + \alpha v(v^T v) = v + \alpha \|v\|^2 v = (1 + \alpha \|v\|^2)v$ 。故 v 是特征向量，特征值为 $\lambda_1 = 1 + \alpha \|v\|^2$ ；
- 对任意 $u \in v^\perp$ ($n - 1$ 维子空间)： $Mu = u + \alpha v(v^T u) = u$ 。故 $v^\perp$ 中任意非零向量都是特征向量，特征值为 1 ($n - 1$ 重)。

（若 $1 + \alpha \|v\|^2 = 1$ ，即 $\alpha = 0$ ，与题设矛盾，故 $\lambda_1 \neq 1$ ，上述已列出全部特征值。）综上，特征值为 $1 + \alpha \|v\|^2$ （一重，特征向量为 v 的倍数）与 1 ($n - 1$ 重，特征向量为 $v^\perp$ 中的非零向量）。 $\square$

3. (20 分)

- (1) 设 A 为 n 阶实反对称矩阵， B 为 n 阶实对角矩阵，并且矩阵 B 的主对角线上的元素均大于零，求证： $|A + B| > 0$ 。
- (2) 设 A 是 n 阶正定矩阵， B 是 n 阶非零半正定矩阵，求证： $|A + B| > |A| + |B|$ 。

解答 (1) 对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ，因 A 反对称， $x^T A x = 0$ ，故

$$x^T (A + B) x = x^T A x + x^T B x = x^T B x = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 > 0$$

（ B 的对角元全为正）。所以 $A + B$ 是正定矩阵，其特征值全为正，行列式

$$|A + B| = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A + B) > 0.$$

(2) 令 $C = A^{-1/2} B A^{-1/2}$ ($A^{1/2}$ 为 A 的唯一正定平方根)，则 C 半正定且 $C \neq O$ 。设 C 的特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ （不全为 0）。则

$$|A + B| = |A| \cdot |I + C| = |A| \prod_{i=1}^n (1 + \mu_i),$$



而 $|B| = |A||C| = |A| \prod_i \mu_i$ 。因 $\mu_i \geq 0$ 且至少一个 > 0 ，展开

$$\prod_{i=1}^n (1 + \mu_i) = 1 + \sum_i \mu_i + (\text{正的非负交叉项}) + \prod_i \mu_i > 1 + \prod_i \mu_i,$$

故

$$|A + B| > |A| \left(1 + \prod_i \mu_i \right) = |A| + |A| \cdot |C| = |A| + |B|.$$

□

4. (15 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导。证明或举例否定:

- (1) 导函数在 $[a, b]$ 上连续。
- (2) 导函数在 $[a, b]$ 上具有介值性。

解答 (1) 否定。取

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(在 $[-1, 1]$ 上)。 $x \neq 0$ 时 $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$; 在 $x = 0$ 处

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h^2)}{h} = 0.$$

但 $f'(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时无极限 ($\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ 无界振荡), 故 f' 在 0 处不连续。所以可导函数的导函数可以不连续。

(2) 肯定: 导函数具有介值性 (Darboux 定理)。证明: 设 f 在 $[a, b]$ 可导, $f'(a) < c < f'(b)$ (其余情形类似)。考虑 $g(x) = f(x) - cx$, 则 g 可导, $g'(a) < 0 < g'(b)$ 。 g 在 $[a, b]$ 连续, 故在 $[a, b]$ 上取得最小值; 因 $g'(a) < 0$, $g(a)$ 不是最小值 (a 附近右侧有更小值), 因 $g'(b) > 0$, $g(b)$ 也不是最小值, 故最小值在 (a, b) 内某点 ξ 取到, $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = c$ 。所以 f' 取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值。□

5. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的函数, 对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$ 存在, 记该值为 $g(x)$ 。证明:

- (1) $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。
- (2) $f(x)$ 的间断点至多可数。

解答 (1) 任取 $x_0 \in [0, 1]$ 与 $\varepsilon > 0$ 。由 $g(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |t - x_0| < \delta$ 时 $|f(t) - g(x_0)| < \varepsilon$ 。对任意满足 $0 < |y - x_0| < \delta$ 的 y , 取 $t \rightarrow y$ (且 $0 < |t - x_0| < \delta$), 由 $f(t) \rightarrow g(y)$:

$$|g(y) - g(x_0)| \leq \limsup_{t \rightarrow y} |f(t) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

故 g 在 x_0 连续。

(2) f 的间断点必满足 $f(x) \neq g(x)$ 。对每个 $n \in \mathbb{N}^+$, 令

$$E_n = \left\{ x : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{n} \right\}.$$

若 $x \in E_n$, 由 $g(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |t - x| < \delta$ 时 $|f(t) - g(x)| < \frac{1}{2n}$, 结合 g 的连续性知该邻域内 $|f(t) - g(t)| \leq \frac{1}{n}$ 对 $t \neq x$ 成立, 即 $(x - \delta, x + \delta) \cap E_n = \{x\}$ 。故 E_n 的每个点都是孤立点, E_n 至多可数 (数轴上孤立点集可数: 每个孤立点可取一个含它的有理开区间互不相交)。于是

$$\{f \text{ 的间断点} \} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

至多可数。

□



6. (10 分)

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(3x)}{3x^2} - \frac{\sin(2x)}{2x^2} \right] dx$$

是否收敛, 若收敛求积分值。

解答 收敛且值为 $\ln \frac{2}{3}$ 。先看收敛性: 在 $x \rightarrow 0^+$ 处,

$$\frac{\sin(3x)}{3x^2} - \frac{\sin(2x)}{2x^2} = \frac{2\sin(3x) - 3\sin(2x)}{6x^2} = \frac{-\frac{5}{2}x^3 + O(x^5)}{6x^2} = -\frac{5}{12}x + O(x^3) \rightarrow 0,$$

为可去奇点; 在 $x \rightarrow +\infty$ 处被积函数的绝对值 $\leq \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{5}{6x^2}$, 绝对收敛。故积分收敛。

求值: 分部积分 (取 $u = \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(2x)}{2}$, $dv = \frac{dx}{x^2}$):

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{x} \left(\frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x} dx \\ &= 0 + \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x} dx. \end{aligned}$$

(边界项: $x \rightarrow 0$ 时括号内为 $O(x^3)$, 除以 x 后 $O(x^2) \rightarrow 0$; $x \rightarrow \infty$ 时趋于 0。) 由 Frullani 公式 (对 $a, b > 0$, $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$):

$$I = \ln \frac{2}{3}.$$

□

7. (10 分) 求级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1}.$$

解答 先作分解:

$$\frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1} = \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} + \frac{n}{n^4 + 1}.$$

因 $\frac{n}{n^4 + 1}$ 是奇函数且级数绝对收敛, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{n^4 + 1} = 0$ 。又

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} + 1.$$

用熟知的展开 (由 $\pi \cot \pi z$ 的部分分式展开取 z 的适当值求导可得):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 1} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sinh(\pi\sqrt{2}) + \sin(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})} - \frac{1}{2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sinh(\pi\sqrt{2}) - \sin(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

于是

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} + 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{2 \sinh(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \pi \sinh(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})}.$$

故

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1} = \frac{\sqrt{2} \pi \sinh(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})}.$$

□



8. (10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 中收敛, 求证其存在几乎处处收敛的子列。

解答 设 $f_n \rightarrow f$ 于 L^p ($1 \leq p < \infty$)。归纳选取子列 f_{n_k} : 先取 n_1 使 $\|f_{n_1} - f\|_p < 1$; 再取 $n_{k+1} > n_k$ 使 $\|f_{n_{k+1}} - f\|_p < 2^{-(k+1)}$ 。则由三角不等式,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\|f_{n_{k+1}} - f\|_p + \|f - f_{n_k}\|_p) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-(k+1)} + 2^{-k}) < \infty.$$

由 Minkowski 不等式 (单调收敛),

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty,$$

故 $\sum_k |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < +\infty$ 几乎处处成立, 从而级数 $\sum_k (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ 几乎处处绝对收敛。由

$$f_{n_m} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}),$$

$\{f_{n_m}\}$ 几乎处处收敛 (且极限几乎处处等于 f)。证毕。 □



清华大学数学科学系
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

试求矩阵 Q ，使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵，并求 A 的谱分解。

解答 注意到 $A = 2J - 5I$ (J 为全 1 矩阵)。 J 的特征值为 3 (一重, 特征向量 $(1, 1, 1)^T$) 与 0 (二重, 特征子空间为平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$)，故 A 的特征值为 $2 \cdot 3 - 5 = 1$ (一重) 与 $2 \cdot 0 - 5 = -5$ (二重)。

取标准正交特征向量基：

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T.$$

(q_2, q_3 为平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的一组标准正交基。) 令

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵，且

$$Q^T A Q = \text{diag}(1, -5, -5).$$

谱分解：

$$A = 1 \cdot q_1 q_1^T + (-5)(q_2 q_2^T + q_3 q_3^T) = q_1 q_1^T - 5(I - q_1 q_1^T) = 6 q_1 q_1^T - 5I = \frac{2}{3}J - 5I.$$

(展开 $q_1 q_1^T = \frac{1}{3}J$ ，即回到 $A = 2J - 5I$ 。)

□

2. 设 $AB = BA$ ，求证 $AB^* = B^*A$ ，其中 B^* 表示 B 的伴随矩阵。

解答 由 Cayley-Hamilton 定理，设 B 的特征多项式为 $f_B(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$ ，则

$$B^n + c_1 B^{n-1} + \cdots + c_{n-1} B + c_n I = O.$$

由伴随矩阵的定义 $BB^* = B^*B = |B|I$ 及上式，有

$$B^* = (-1)^{n+1} (B^{n-1} + c_1 B^{n-2} + \cdots + c_{n-1} I)$$

(当 B 可逆时显然： $B^* = |B|B^{-1}$ 代入 Cayley-Hamilton 式；一般情形由两边都是矩阵元素的多项式、在可逆矩阵稠密处相等得恒等)。故 B^* 是 B 的多项式 $p(B)$ 。因 $AB = BA$ ， A 与 B 的每个幂 (从而与 $p(B)$) 可交换：

$$AB^* = A p(B) = p(B) A = B^* A.$$

□

3. 设 F 为数域， $A \in M_{m \times m}(F)$ ， $B \in M_{n \times n}(F)$ ，并且

$$\varphi : M_{m \times n}(F) \rightarrow M_{m \times n}(F), \quad X \mapsto AXB.$$



求证: 若 λ, μ 分别为 A, B 的特征值, 则 $\lambda\mu$ 为 φ 的特征值, 并且 φ 的特征值均有此形式。

解答 (在 F 的代数闭包 $\overline{F}$ 上考虑。) 先证 $\lambda\mu$ 是特征值: 设 $Au = \lambda u$, $u \neq 0$, 且 $B^T v = \mu v$, $v \neq 0$ 。令 $X = uv^T \in M_{m \times n}(\overline{F})$, $X \neq O$, 则

$$\varphi(X) = AXB = Auv^T B = \lambda u (B^T v)^T = \lambda u (\mu v)^T = \lambda\mu uv^T = \lambda\mu X.$$

故 $\lambda\mu$ 是 φ 的特征值。

再证反包含: 把 $M_{m \times n}$ 与 F^{mn} 等同 (按列展开), φ 的矩阵是 Kronecker 积 $A \otimes B^T$ 。对 A, B 分别作上三角化 (在 $\overline{F}$ 上), 则 $A \otimes B^T$ 也是上三角矩阵, 其对角元恰为 $\lambda_i \mu_j$ (λ_i 为 A 的特征值, μ_j 为 B 的特征值, 计重数)。故 φ 的特征多项式为

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (t - \lambda_i \mu_j),$$

即 φ 的特征值全部形如 $\lambda_i \mu_j$ 。□

4. 设 A 为 n 阶矩阵, $\text{rank}(A) = r$ 。求证 $I, A, \dots, A^{r+1}$ 线性相关。

解答 只需证 A 的极小多项式 $m_A(x)$ 的次数不超过 $r+1$, 因为多项式空间 $\text{span}\{I, A, A^2, \dots\} \cong F[x]/(m_A)$ 的维数等于 $\deg m_A$, 其中 $r+2$ 个元素 $I, A, \dots, A^{r+1}$ 必线性相关。

设 A 的 Jordan 标准形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s))$ 。记零特征值的块 (若有) 中最大的阶为 k_0 , 非零特征值的互异值为 $\lambda'_1, \dots, \lambda'_t$ (重数不计)。则

$$\deg m_A = k_0 + t.$$

而

$$r = \text{rank } A = \underbrace{\sum_{\lambda'_i \neq 0} k_i}_{\geq t} + \underbrace{\sum_{\lambda_i = 0} (k_i - 1)}_{\geq k_0 - 1}$$

(非零特征值块每个至少贡献秩 1, 且块数 $\geq t$, 故 $\sum_{\lambda'_i \neq 0} k_i \geq t$; 零块最大阶 k_0 贡献秩 $k_0 - 1$)。故

$$r \geq t + (k_0 - 1) = \deg m_A - 1,$$

即 $\deg m_A \leq r+1$ 。因此 $I, A, \dots, A^{r+1}$ ($r+2$ 个元素) 在 $\leq (r+1)$ 维空间中线性相关。□

5. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为局部常值函数, 求证 f 为常值函数。

解答 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 令

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}.$$

$S \neq \emptyset$ ($x_0 \in S$)。 S 开: 若 $x \in S$, 由局部常值性, 存在 x 的邻域 U 使 $f|_U \equiv f(x) = f(x_0)$, 故 $U \subset S$ 。
 S 闭: 若 $x \notin S$, 即 $f(x) \neq f(x_0)$, 同样存在 x 的邻域 U 使 $f|_U \equiv f(x) \neq f(x_0)$, 故 $U \cap S = \emptyset$, 即补集开。因 $\mathbb{R}^n$ 连通, 既开又闭的非空子集只能是全空间, 故 $S = \mathbb{R}^n$, $f \equiv f(x_0)$ 为常值。□

6. 设 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 试找出 $u: B \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy^2$ 的驻点, 判断其类型, 并求出 u 的最值。

解答 求驻点: $\nabla u = (y^2, 2xy) = (0, 0) \iff y = 0$ 。故驻点为 B 内部 $y = 0$ 上的所有点 $(x, 0)$ ($|x| < 1$)。在 $(x, 0)$ 处 Hessian 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}.$$



- $0 < x < 1$: H 半正定 (秩 1), 且 $u(x+h, k) = (x+h)k^2 \geq 0 = u(x, 0)$ 当 $h > -x$ 时, 故 $(x, 0)$ 是非严格极小点;
- $-1 < x < 0$: 同理为非严格极大点;
- $x = 0$: $u(h, k) = hk^2$ 在 $(0, 0)$ 附近可正可负 (h 变号), 故 $(0, 0)$ 是鞍点。

求最值: 在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上令 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, 则 $u = \cos \theta \sin^2 \theta = \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$ 。记 $t = \cos \theta \in [-1, 1]$, $v(t) = t(1 - t^2) = t - t^3$, $v'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \iff t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。比较 $v(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 与端点值 $v(\pm 1) = 0$, 得

$$\max_B u = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \min_B u = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

最大值在 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$ 处取得, 最小值在 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$ 处取得。 $\square$

7. 设

$$I(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

试求 α 的范围使得 $I(\alpha)$ 收敛, 并求出其收敛时的值。

解答 作极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$I(\alpha) = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin(r^2)}{r^{2\alpha}} r dr = 2\pi \int_0^\infty r^{1-2\alpha} \sin(r^2) dr = \pi \int_0^\infty t^{-\alpha} \sin t dt \quad (t = r^2).$$

在 $t \rightarrow 0^+$ 处: $\sin t \sim t$, 被积函数 $\sim t^{1-\alpha}$, $\int_0^1 t^{1-\alpha} dt$ 收敛当且仅当 $\alpha < 2$ 。在 $t \rightarrow +\infty$ 处: 由 Dirichlet 判别法 ($\sin t$ 的积分有界, $t^{-\alpha} \downarrow 0$), $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ 收敛当且仅当 $\alpha > 0$ 。故 $I(\alpha)$ 收敛当且仅当

$$0 < \alpha < 2.$$

求值: 利用 $\int_0^\infty t^{s-1} \sin t dt = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$ ($0 < s < 1$; 对 $1 \leq s < 2$ 由解析延拓/Abel 和亦成立), 取 $s = 1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 2$ 时 $-1 < s < 1$):

$$\int_0^\infty t^{-\alpha} \sin t dt = \Gamma(1 - \alpha) \sin \frac{\pi(1 - \alpha)}{2} = \Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}.$$

故

$$I(\alpha) = \pi \Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 2.$$

(验证: $\alpha \rightarrow 1^+$ 时 $\Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 与 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ 一致。) $\square$

8. 设 $f, g \in C(\mathbb{R})$ 且周期为 2π , 并且二者具有相同的 Fourier 展开式, 求证: $f \equiv g$ 。

解答 令 $h = f - g$, 则 h 连续、以 2π 为周期, 且其全部 Fourier 系数为 0。由 Parseval 恒等式 (对连续函数成立),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(h)|^2 = 0.$$

因 $|h|^2$ 连续非负且积分为 0, 得 $h \equiv 0$, 即 $f \equiv g$ 。(若未假设 Parseval 等式, 也可用 Fejér 核: h 的 Fourier 级数的算术平均 (Fejér 平均) 一致收敛于 h , 而所有 Fejér 平均为 0, 故 $h \equiv 0$ 。) $\square$



9. 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯函数, 并且 $\operatorname{Im} f(z) > 0, \forall z \in \mathbb{C}$ 。求证: f 为常值函数。

解答 定义

$$g(z) = \frac{f(z) - i}{f(z) + i}.$$

因 $\operatorname{Im} f > 0, f(z) \neq -i, g$ 为整函数; 且

$$|g(z)|^2 = \frac{|f - i|^2}{|f + i|^2} = \frac{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f - 1)^2}{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f + 1)^2} = \frac{\operatorname{Im} f^2 - 2 \operatorname{Im} f + 1 + \dots}{\dots} < 1$$

(因 $(\operatorname{Im} f - 1)^2 < (\operatorname{Im} f + 1)^2$ 当 $\operatorname{Im} f > 0$), 故 $|g| < 1$ 于 $\mathbb{C}$, g 是有界整函数。由 Liouville 定理, g 为常数 c ($|c| < 1$), 从而

$$f(z) = \frac{i(1 + g(z))}{1 - g(z)} = \frac{i(1 + c)}{1 - c}$$

为常数。($1 - g(z) \neq 0$ 因 $|c| < 1$ 。)

□

10. 求

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh x} dx \quad \text{及} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sinh x} dx.$$

解答 第一个积分:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\cosh x} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} = 4 \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = 4 \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \quad (u = e^x) \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \pi. \end{aligned}$$

第二个积分 (被积函数为偶函数, $x = 0$ 处可去奇点):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sinh x} dx &= 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{2x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx = 4 \int_0^{\infty} x \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)x} dx \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(2k+1)x} dx = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 4 \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(其中 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 可由 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 得到; 逐项积分由单调收敛定理合法。)

□