



夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部

搜题组：贾思涵 杨昕达

录入组：李雨恒 张彬泽 吴俊 李怡龙

统稿组：李沐阳



目录

清华大学	4
2015 年直博生招生考试试题	5
2016 年直博生招生考试试题（一）	6
2019 年直博生招生考试试题（一）	7
2019 年直博生招生考试试题（二）	8
2021 年直博生招生考试试题	9
2021 年本校推免考试试题	10
2022 年预推免招生考试试题	11
2023 年直博生招生考试试题	13
2024 年夏令营招生考试试题	14
2024 年夏令营招生考试试题	15
北京大学	16
2011 年直博生招生考试试题	17
2012 年直博生招生考试试题	19
2013 年直博生招生考试试题	21
2015 年直博生招生考试试题	23
2016 年直博生招生考试试题	25
2017 年直博生招生考试试题	26
2019 年直博生招生考试试题	27
复旦大学	28
2019 年直博生招生考试试题	29
2021 年直博生招生考试试题	30
2022 年直博生招生考试试题	31
2023 年夏令营招生考试试题（6 月 25 日）	32
2023 年夏令营招生考试试题（6 月 27 日）	33
2024 年夏令营招生考试试题	34
2025 年学术营笔试	35
上海交通大学	36
2023 年夏令营招生考试试题（应用统计）	37
2024 年夏令营招生考试试题（数学）	38
2024 年夏令营招生考试试题（应用统计）	39
浙江大学	40
2019 年直博生招生考试试题	41
2020 年直博生招生考试试题	42
2021 年直博生招生考试试题	44
2022 年直博生招生考试试题	46
2023 年直博生招生考试试题	47
2024 年直博生招生考试试题	49
2025 年推荐免试直博生招生试卷	50



南京大学	51
2024 年夏令营招生考试试题	52
2023 年夏令营招生考试试题	53
2022 年夏令营招生考试试题	55
2021 年夏令营招生考试试题	58
中国科学技术大学	59
2018 年夏令营招生考试试题	60
2019 年夏令营招生考试试题	63
2021 年夏令营招生考试试题	65
2022 年夏令营招生考试试题	67
2024 年夏令营招生考试试题	69
2026 年夏令营招生考试试题 (回忆版)	72
南开大学	75
夏令营试题	76
中国科学院数学与系统科学研究院	77
2018 年夏令营招生考试试题	78
2019 年夏令营招生考试试题	79
2023 年夏令营招生考试试题	80
2024 年夏令营招生考试试题	81
中国人民大学	82
2022 年夏令营招生考试试题 (统计学)	83
2022 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	84
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	85
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	86
2024 年夏令营招生考试试题 (统计学)	87
2024 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	88



清华大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒



清华大学数学科学系
2015 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

2. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 可逆, A^m 为对角矩阵, 其中 $m > 1$ 为正整数。求证: A 可对角化。

3. V 是全体 $\mathbb{R}$ 上的多项式构成的线性空间, 对 $\forall f \in V$, $\varphi(f) = f + f'$ 。求证 φ 可逆。

4. 设 G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, D 为 G 的紧致子集, 映射 $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的, 且在集合 D 上是单射, 并且

$$\det F'(x) \neq 0, \quad \forall x \in D.$$

求证:

(1) $d(D, \partial G) > 0$;

(2) 存在 $0 < \varepsilon < d(D, \partial G)$, 使得 $F|_{D_\varepsilon}$ 为单射, 其中 $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, D) < \varepsilon\}$ 。

5. 设函数 $f(z)$ 是单位圆盘上的解析函数, $|z| < 1$ 时 $|f(z)| < 1$, α 是满足 $|\alpha| < 1$ 的复数, 且 $f(\alpha) = 0$ 。证明: $|z| < 1$ 时

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$



清华大学数学科学系
2016 年直博生招生考试试题（一）

来源：小红书作者 Relax

1. (1) 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的。试叙述关于 f 的逆映射定理 (包括条件和结论)。
- (2) 试应用逆映射定理证明不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续可微单射。

2. 设

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}} \right),$$

其中 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\vec{n}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面 S^2 的单位外法向量场。试求曲面积分

$$\iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

3. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, $f(x) = x, \forall x \in (-\pi, \pi]$ 。

(1) 试求 f 的 Fourier 级数及 Fourier 级数的和函数, 并说明该级数是否在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。

(2) 试用上述 Fourier 级数及 Parseval 等式求出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的值。

4. 设 $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 为全纯函数, $f(\alpha) = 0, \alpha \in B(0, 1)$ 。

(1) 求证:

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

(2) 求上述不等式中等号成立的充要条件。

5. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $f_A(x)$ 为 A 的特征多项式, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg g(x) = n - 1, g(x) \mid f_A(x)$ 。求 $g(A)$ 所有可能的秩, 并说明理由。

6. 设 V 为 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, φ 为 V 上的幂幺线性变换, 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\varphi^k = I_V$, 又设 W 为 φ -不变子空间。求证: 存在 φ -不变子空间 W' , 使得 $V = W \oplus W'$ 。



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题 (一)

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷满分 100 分。

1. (10 分) 证明不存在一个实可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ 。

2. (15 分) 证明 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

的根都是实数并且包含于区间 $(-1, 1)$ 内。

3. (10 分) 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\int_0^{x^2+y^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dx dy.$$

4. (10 分) 设 A 和 B 是两个 n 阶方阵。证明: AB 和 BA 有相同的特征值。

5. (15 分) 假设 I_n 是 n 阶单位矩阵, A 是一个 n 阶方阵, 令 $f(x) = \det(I_n + xA)$, 计算 $f'(0)$ 。

6. (15 分) 设 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个向量, 并且两两之间的内积满足 $(v_i, v_j) < 0, \forall i \neq j$ 。证明: $v_1, \dots, v_{n+1}$ 中一定存在 n 个向量, 它们组成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

7. (10 分) 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z \sin z}{1 - \cos z} dz.$$

8. (15 分) 设 $f(z)$ 是一个处处非零的全纯函数。证明: 存在一个全纯函数 $g(z)$, 使得 $f(z) = e^{g(z)}$ 。



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题 (二)
来源: 小红书作者 Relax

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求证: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。

2. 证明: Hermite 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

的所有根均为实数。

3. 计算积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

其中 $ad - bc = \sqrt{7}$, L^+ 为椭圆 $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$, 取逆时针方向。

4. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为 $[a, b]$ 上的正值连续函数且 $g(x)$ 严格单调递减, 求证:

$$\frac{\int_a^b x f(x) g(x) dx}{\int_a^b f(x) g(x) dx} < \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

5. 已知 n 阶矩阵 A, B 满足 $A^2 = A$, $B^2 = B$, 且 $I_n - A - B$ 可逆, 求证 $r(A) = r(B)$ 。

6. 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵。

(1) 若 A 可逆, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 若 $AC = CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

7. 定义如下线性变换为仿射变换:

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax + b,$$

其中 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ 。

(1) 证明: φ 可逆 $\iff A$ 可逆。

(2) 若 φ 可逆, 求出 φ^{-1} , 并证明 φ^{-1} 亦为仿射变换。

(3) 证明: 仿射变换的复合仍是仿射变换。

8. 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - \frac{1}{4}} dz.$$

9. 设 f 为整函数。若存在正整数 n 和正常数 C , 使得对模长充分大的 z 有 $|f(z)| \leq C|z|^n$, 证明: $f(z)$ 是次数不超过 n 次的多项式。



清华大学数学科学系
2021 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 三阶实对称矩阵计算题。

2. 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换，求证：

$$\ker \varphi = \ker \varphi^2 \iff \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi^2.$$

3. 设 A, B 是数域 F 上的 n 阶方阵， A, B 都可对角化， $AB = BA$ 。求证： A, B 可同时对角化。并举例说明 $AB \neq BA$ 时结论不一定成立。

4. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集，映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续可微的。求证：

(1) $n > m$ 时， f 不可能是单射。

(2) $n < m$ 时， f 不可能是满射。

5. 设 $f(x), \varphi(x)$ 是周期为 2 的偶函数，并且 $f(x) = x(2-x)$ ， $\varphi(x) = x$ ， $x \in [0, 1]$ 。

(1) 求 $f(x), \varphi(x)$ 的 Fourier 级数。

(2) 求证：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \varphi(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. 设

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

(1) 求 $\operatorname{div} \vec{B}$ 。

(2) 求证：不存在连续可微映射 $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ，使得 $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{B}$ 。

7. 设 $\alpha > 1$,

$$I(\alpha) = - \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx.$$

(1) 求 $I(\alpha)$ 。

(2) 求证：

$$I(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n\alpha - 1)^2}.$$



清华大学数学科学系
2021 年本校推免考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 已知复方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征多项式为 $(\lambda - 1)^n$ 。证明 A 与 A^2 相似。

2. (10 分) 已知实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

二次型 $f(x) = x^T A x$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上何时取到最大值, 最小值?

3. (10 分) 已知域 F 上的有限维线性空间 X, Y, U, V , 以及线性变换

$$\alpha: X \rightarrow Y, \quad \beta: V \rightarrow U, \quad \psi: X \rightarrow U,$$

并且满足

$$\ker \alpha \subset \ker \psi, \quad \operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Im} \beta.$$

那么是否存在线性映射 $\varphi: Y \rightarrow V$ 使得

$$\psi = \beta \circ \varphi \circ \alpha?$$

若是请证明, 否则举出一个反例。

4. (10 分) 已知域 F 上的方阵 $A, B \in M_n(F)$, 满足: A 是可逆矩阵, B 是幂零矩阵。证明: 对任意 $C \in M_n(F)$, 存在 $X \in M_n(F)$, 使得

$$AX - XB = C.$$

5. (10 分) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 并且 E 上的任何连续函数都有界。证明: E 是有界闭集。

6. (10 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的处处非负的黎曼可积函数, 并且

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明: $f(x)$ 几乎处处为 0。

7. (20 分) 计算 $\mathbb{R}^3$ 中的区域

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1, z^2 + x^2 \leq 1\}$$

的体积。

8. (20 分) 已知 $f(z)$ 在单位圆盘 $|z| < 1$ 解析, 并且

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}, \quad \forall |z| < 1.$$

证明: 对任意整数 $n \geq 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)!e.$$



清华大学数学科学系
2022 年预推免招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷仅适用于应用统计硕士生。

数学分析（考试时间 90 分钟，满分 50 分）

1. 求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0)。$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}。$$

2. 设非负函数 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ ，讨论函数 $g(x) = \sqrt{f(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的可微性。

3. 求三元函数

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x + y + z = 1$ 下的极大值和极小值。

4. 定义

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{M \rightarrow +\infty} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz,$$

这里 $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq M^2\}$ 为三维闭球体 ($M > 0$)。

(1) 设 $P(x, y, z)$ 和 $Q(x, y, z)$ 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数，证明：

$$\iint_{\partial B} P(x, y, z) e^{Q(x, y, z)} dy dz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) e^{Q(x, y, z)} dx dy dz.$$

(2) 若 $P(x, y, z)$ 为三元多项式函数，证明：

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial P}{\partial x} e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz = 2 \iiint_{\mathbb{R}^3} x P(x, y, z) e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz.$$

5. 计算定积分

$$\int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{a - x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

线性代数（考试时间 90 分钟，满分 50 分）

6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 - 4x_2x_3$ 。

(1) 若二次型正定，求参数 t 的取值范围。

(2) 若 $t = -2$ ，用正交变换将二次型化为标准型。

7. 设 V 是数域 F 上的有限维向量空间， $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 为 V 上的线性变换，多项式 $f(x), g(x) \in F[x]$ ，它们的最大公因式和最小公倍式分别为 $d(x)$ 和 $m(x)$ 。证明：

$$\text{rank}(f(\mathcal{A})) + \text{rank}(g(\mathcal{A})) = \text{rank}(d(\mathcal{A})) + \text{rank}(m(\mathcal{A})).$$

8. 讨论 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 1 \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多解？并求出有解时的一般解。



9. 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的对称线性变换, 证明: 对 V 中的任何单位向量 α , 有 $\|\sigma(\alpha)\|^2 \leq \|\sigma^2(\alpha)\|$ 。
10. 数域 F 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合记为 $M_n(F)$ 。定义映射 $\varphi: M_n(F) \rightarrow F$, 满足以下条件:
- (1) 对任意 $A, B \in M_n(F)$, 有 $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$ 。
 - (2) 若 $A \in M_n(F)$ 是上三角矩阵, 则 $\varphi(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$, 其中 a_{ii} 为 A 的主对角线元素。
- 证明: 对任意矩阵 $A \in M_n(F)$, 恒有 $\varphi(A) = \det(A)$ 。



清华大学数学科学系
2023 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 A 是三阶实对称矩阵, 且每行元素和为 4, $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$ 为 $(I_3 - A)x = 0$ 的解. 求矩阵 A 以及正交阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵.
2. 设 V 是 n 维线性空间, $\varphi, \psi: V \rightarrow V$ 是线性变换, 且有 $\varphi^2 = \varphi$, $\ker \varphi$ 、 $\operatorname{Im} \varphi$ 均是 ψ -不变子空间, 求证: $\varphi\psi = \psi\varphi$.
3. 设 P 为实矩阵, 求证: 对称分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

的正负惯性指数相等, 且均等于 $\operatorname{rank}(P)$.

4. 设 A 为 n 阶复可逆矩阵, $s \in \mathbb{N}^+$, A^s 可对角化. 求证: A 可对角化, 并说明 A 可逆这个条件不能删去.
5. 若 $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, 解答下列问题:

(1) 证明: $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

(3) 问 $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 是否在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛?

6. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. 求证: f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微.
7. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是开集, 映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续可微, $x_0 \in \Omega$, 并且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+n}}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+n}}(x_0) \end{pmatrix}$$

的秩为 m , 其中 $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 表示 f 的第 i 个分量函数对第 j 个自变量分量求导. 求证: 存在 x_0 的开邻域 $U \subset \Omega$, 并且在 U 上有 C^1 同胚 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$, 使得

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_{m+n}) = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

8. 设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为坐标平面、 $x + y = 1$ 和 $x^2 + z^2 = 1$ 所围成的在第一象限的区域. 计算

$$\int_{\partial D} (2xz \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy),$$

其中 ∂D 取外侧.

9. $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是简单闭曲线, 设 D 为 γ 围成的无界区域, 有 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ 并且 $f(+\infty) = \alpha$, 计算

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

其中 z 在 γ 围成的有界区域内, 并且积分方向取正方向 (γ 逆时针方向).

10. 设 $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 是单位圆盘上的全纯函数, 并且 $f(0) = a$, 使用 Schwarz 引理证明: f 在 $B(0, |a|) = \{z \mid |z| < |a|\}$ 上无零点.



清华大学求真书院
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. (10 分) 是否存在 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 A 同时满足下列条件?

(1) $Ae^A = I_n$ 。

(2) A 的特征值为实数。

2. (10 分) 求出 $I + \alpha vv^T$ 的特征值和特征向量, 其中 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ 。

3. (20 分)

(1) 设 A 为 n 阶实反对称矩阵, B 为 n 阶实对角矩阵, 并且矩阵 B 的主对角线上的元素均大于零, 求证: $|A + B| > 0$ 。

(2) 设 A 是 n 阶正定矩阵, B 是 n 阶非零半正定矩阵, 求证: $|A + B| > |A| + |B|$ 。

4. (15 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导。证明或举例否定:

(1) 导函数在 $[a, b]$ 上连续。

(2) 导函数在 $[a, b]$ 上具有介值性。

5. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的函数, 对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$ 存在, 记该值为 $g(x)$ 。证明:

(1) $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。

(2) $f(x)$ 的间断点至多可数。

6. (10 分)

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(3x)}{3x^2} - \frac{\sin(2x)}{2x^2} \right] dx$$

是否收敛, 若收敛求积分值。

7. (10 分) 求级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1}.$$

8. (10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 中收敛, 求证其存在几乎处处收敛的子列。



清华大学数学科学系
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

试求矩阵 Q ，使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵，并求 A 的谱分解。

2. 设 $AB = BA$ ，求证 $AB^* = B^*A$ ，其中 B^* 表示 B 的伴随矩阵。

3. 设 F 为数域， $A \in M_{m \times m}(F)$ ， $B \in M_{n \times n}(F)$ ，并且

$$\varphi : M_{m \times n}(F) \rightarrow M_{m \times n}(F), \quad X \mapsto AXB.$$

求证：若 λ, μ 分别为 A, B 的特征值，则 $\lambda\mu$ 为 φ 的特征值，并且 φ 的特征值均有此形式。

4. 设 A 为 n 阶矩阵， $\text{rank}(A) = r$ 。求证 $I, A, \dots, A^{r+1}$ 线性相关。

5. 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为局部常值函数，求证 f 为常值函数。

6. 设 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ，试找出 $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ ， $(x, y) \mapsto xy^2$ 的驻点，判断其类型，并求出 u 的最值。

7. 设

$$I(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

试求 α 的范围使得 $I(\alpha)$ 收敛，并求出其收敛时的值。

8. 设 $f, g \in C(\mathbb{R})$ 且周期为 2π ，并且二者具有相同的 Fourier 展开式，求证： $f \equiv g$ 。

9. 设 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯函数，并且 $\text{Im } f(z) > 0$ ， $\forall z \in \mathbb{C}$ 。求证： f 为常值函数。

10. 求

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh x} dx \quad \text{及} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sinh x} dx.$$



北京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒



北京大学数学科学学院
2011 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的凹函数，经过点 $(0, 0), (1, 0), \left(\frac{1}{3}, 2\right)$ ，并且 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ ，试作出 $y = f(x)$ 的图像。

2. (1) 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1)$ 。证明：

$$\forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}, \exists \xi \in [0, 1 - \alpha], \text{ 使得 } f(\xi + \alpha) = f(\xi).$$

(2) 证明：

$$\forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}, \exists g(x) \in C[0, 1], g(0) = g(1), \\ \text{满足 } \forall x \in [0, 1 - \alpha], g(x + \alpha) - g(x) \neq 0.$$

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内连续，以下说法是否成立？

(1) 若 $D_+f(x_0)$ 存在，则 $D_0f(x_0)$ 存在。

(2) 若 $D_0f(x_0)$ 存在，则 $D_-f(x_0)$ 存在。

其中

$$D_+f(x_0) = \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \\ D_0f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ D_-f(x_0) = \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

4. 设 $a_n \geq 0$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散。证明：存在数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$b_n, c_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty$$

使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \text{ 发散}.$$

5. 设

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$$

A_{m+n} 为 $m+n$ 阶方阵，前 m 行是 $f(x)$ 的系数，后 n 行是 $g(x)$ 的系数，即

$$A_{m+n} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\ & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & & \\ & 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix}$$

证明： $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式的次数等于 $m+n - \text{rank}(A_{m+n})$ 。



6. (1) 设 U 是 $ABX = 0$ 的基础解系, 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, X 是 $p \times 1$ 列向量, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $W = \{Y = BX \mid X \in U\}$ 。证明: W 的维数等于 $\text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$ 。

(2) 证明: 对任意矩阵 A, B, C , 有

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC).$$

7. 设 A, B 是 n 阶方阵, A, B 乘法可交换, B 是幂零矩阵, 证明: $A + B$ 和 A 有相同的特征多项式。

8. 设二次曲面 $\Gamma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 平面 $\Sigma(\theta)$ 过直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

且与平面 $z = 0$ 夹角为 θ 。

(1) 当 θ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 连续变化时, $\Sigma(\theta) \cap \Gamma$ 对应的曲线是哪种类型?

(2) 证明: 若平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 与 Γ 的交线为两条直线, 则 $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ 。

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 依次验证下列条件能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(1) $f(x) \in C^\infty[a, +\infty)$ 。

(2) $\int_0^{+\infty} |f(x)|^3 dx$ 收敛。

(3) $\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$ 收敛。

(4) $\int_0^{+\infty} |f''(x)| dx$ 收敛。

10. 求下述几何体的体积:

$$-1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1, \quad -1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1.$$

11. 对任意 n 维列向量 α, β , $\alpha^T A \beta = 0$ 当且仅当 $\beta^T A \alpha = 0$ 。证明: A 为对称矩阵或者反对称矩阵。

12. 平面上三条直线 AA', BB', CC' 互相平行, AB 与 $A'B'$ 交于点 D , BC 与 $B'C'$ 交于点 E , CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明: D, E, F 三点共线。



北京大学数学科学学院
2012 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

- (25 分) $\mathbb{R}^n$ 中集合 S 称为紧集, 如果对于 S 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个元素也覆盖 S 。证明: $S \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集的充分必要条件是 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集。
- (25 分) 叙述和证明多元函数带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展开公式。
- (20 分) 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 。
- (20 分) 假定 $n \geq m > 1$, 问是否存在连续可导的映射 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $p \mapsto F(p)$, 使得 F 的 Jacobi 矩阵的秩处处为 m , 而 $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$? 为什么? 这里 0 表示 $\mathbb{R}^m$ 的原点。
- (20 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是实轴 $\mathbb{R}$ 上一列一致有界的连续函数, 满足对于任意闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0.$$

证明: 对于实轴上的任意闭区间 $[c, d]$, 以及 $[c, d]$ 上绝对可积的函数 $g(x)$, 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d g(x) f_n(x) dx = 0.$$

(注: 原题积分下限写为 a , 但应为 c , 此处已按 $[c, d]$ 修正。)

- (20 分) 设 $F(x, y, z)$ 和 $G(x, y, z)$ 都是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上连续可导的函数, 满足映射 $(x, y, z) \mapsto (F(x, y, z), G(x, y, z))$ 的 Jacobi 矩阵的秩在 D 上处处为 1, 而函数 $F(x, y, z)$ 的梯度向量 $\text{grad } F$ 在 D 上处处不为零。假定在点 $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ 。证明: 存在点 p_0 的邻域 $U \subset D$, 使得在 U 上, 函数方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

与函数方程 $F(x, y, z) = 0$ 是同解方程。问在 D 上这两组方程是否也是同解方程, 为什么?

- (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是区间 (a, b) 上 n 阶可导的函数, 如果在点 $x_0 \in (a, b)$, 成立 $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $\dots$, $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处 k 阶相切。现设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 中互不相同的点 $x_1, \dots, x_t$ 处分别 $k_1 - 1, \dots, k_t - 1$ 阶相切, 而 $n = k_1 + \dots + k_t$ 。证明: 对于任意 $x \in (a, b)$, 存在 $y \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)}(y) - g^{(n)}(y)}{n!} (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_t)^{k_t}.$$

- (25 分) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, 且 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 的某个零化多项式 $g(x)$ 可分解为一次因式幂的乘积的形式:

$$g(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{t_i} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j).$$

证明: 若存在 $h(x) \in \mathbb{P}[x]$, 使得

$$(x - \lambda_i)^{t_i} \mid [h(x) - \lambda_i], \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

则

(1) $h(\mathcal{A})$ 可对角化;



(2) $h(\mathcal{A}) - \mathcal{A}$ 是幂零变换 (原文写“幂等变换”, 根据上下文此处应为幂零, 已按题意修正)。

9. (25 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, $D = AB - BA$ 且 D 与 A 乘法可交换, 证明 $D^n = O$ 。

10. (25 分) 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间, $W_1, \dots, W_k$ 为 V 的真子空间, 证明:

(1) 存在 V 中的元素 α 不属于任何一个 $W_j, j = 1, \dots, k$;

(2) 存在 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 满足 $\alpha_i \notin \bigcup_{j=1}^k W_j, \forall i = 1, 2, \dots, n$;

(3) 若 U 为 V 的真子空间, 令 $C_U = \{W \mid W \text{ 为 } V \text{ 的子空间且 } W \oplus U = V\}$, 则 C_U 中含有无穷多个元素。

11. (25 分) 设 V 为 n 维欧氏空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正交变换。

(1) 证明: V 可以分解为一些 1 维或 2 维的两两正交的 $\mathcal{A}$ -子空间的直和 (即 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$, 其中 V_i 为 $\mathcal{A}$ 的维数为 1 或 2 的不变子空间, 且若 $i \neq j$, 则 $V_i \perp V_j$)。

(2) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 为 V 的两组标准正交基, 且

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)A.$$

证明:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_1, \eta_1) & \cos(\varepsilon_2, \eta_1) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_1) \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_2) & \cos(\varepsilon_2, \eta_2) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_m) & \cos(\varepsilon_2, \eta_m) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_m) \end{pmatrix},$$

这里 (α, β) 表示向量 α, β 在欧氏空间中的夹角。

(3) 确定二维欧氏空间上的第一类正交矩阵及第二类正交矩阵的一般形式, 并由此给出 n 维欧氏空间上正交变换的相似标准形 (即某种简化的表示形式)。

12. (15 分) 求与三直线

$$l_1: \begin{cases} y - x = 0, \\ z - 1 = 0, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} y + x = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

都相交的直线所产生的曲面的方程。

13. (20 分) 设给出的仿射变换为

$$\begin{cases} x' = x + y + 3z, \\ y' = x + 5y + z, \\ z' = 3x + y + z. \end{cases}$$

求 3 个互相正交的向量, 使得在此变换下, 它们仍变为 3 个互相正交的向量。并将所给的仿射变换表示成一个正交变换和分别对 3 个互相正交的方向施行的伸缩变换的乘积。

14. (15 分) 证明: 分别属于双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 上两族互相垂直的直母线交点的轨迹是原双曲抛物面与平面 $2z = b^2 - a^2$ 的交线, 并且是一条双曲线。



北京大学数学科学学院
2013 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (20 分) 设 f 是 $[0, 2]$ 上的上凸可导函数, 过 $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$ 点, 问 f 与 x 轴围成面积的下确界是多少? 该下确界能达到吗?

2. (20 分) 设有方程 $y + \sin y = x$ 。

(1) 证明: 该方程在 $x = 0$ 附近可以唯一确定 $y = f(x)$ 。

(2) 将 y 表示为 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ 。

3. (20 分) 构造定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 f , 满足 f 只在其中一点可导, 在其它各点都不连续。

4. (20 分) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的收敛性。

5. (35 分) 函数 $f_n(x)$ 定义在 $[0, 2]$ 上, 满足

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \left(x - \frac{2k-1}{n}\right)^2}, \quad x \in \left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

(1) 求 f_n 的弧长 l_n 。

(2) 求证: f_n 一致收敛于某 f 。

(3) 求 f 的弧长 l 。

(4) l_n 收敛于 l 吗? 解释原因。

6. (35 分) 定义函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 如下:

$$f(x) = 0.0a_1a_2a_3\cdots, \quad x = 0.a_1a_2a_3\cdots.$$

这里 $x \in [0, 1]$ 都表示无限小数 (比如 $0.1 = 0.09$)。请自由探索 f 的性质。

7. (25 分)

(1) $x^6 + x^3 + 1$ 在有理数域上是否可约, 给出详细理由。

(2) 如果 α 是 $x^6 + x^3 + 1 = 0$ 的根, 求多项式 $f(x)$, 满足 $\deg(f) < 6$, 且 $\alpha^8 + \alpha^5 = f(\alpha)$ 。

(3) (2) 中所求 $f(x)$ 唯一吗? 为什么?

(4) 求多项式 $g(x)$, 满足 $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^8 + \alpha^5}$, 其中 $g(x)$ 是有理多项式。

8. (25 分)

(1) 设 A, B 是半正定矩阵。证明:

$$|A + B| \geq |A|, \quad |A + B| \geq |B|.$$

(2) 设 A 是正定矩阵, D 是由 A 第 $i_1, \dots, i_s$ 行和第 $i_1, \dots, i_s$ 列构成的子式, M 是 D 的代数余子式。证明: $|A| \leq DM$ 。

9. (25 分) n 维空间至多有多少个两两成钝角的向量?



10. (25 分) 设 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, 证明: $e^{|A|} = e^{\text{tr}(A)}$ 。
11. (30 分) 已知双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的一支 $z > 0$, M 是与该双曲面相交于封闭曲线的任意平面, M_0 是与 M 平行的一族平面, 证明 M_0 与 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ($z > 0$) 的交线都是椭圆, 且椭圆的中心在 xOy 平面上的投影都在 x 轴上。
12. (20 分) 平面上直线 AA', BB', CC' 平行, AB 和 $A'B'$ 交于点 D , BC 与 $B'C'$ 交于点 E , CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明: D, E, F 共线。



北京大学数学科学学院
2015 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (90 分) 设 $y = f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, 对任意正数 $k \geq 0$, 记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|,$$

设 m 和 n 为两整数, $0 \leq m < n$, 试分别就下列情况, 给出你的结论和证明。

- (1) 如果 M_m 和 M_n 均有界, 那么对哪些正数 k , M_k 有界? 对哪些整数 k , M_k 可以无界?
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 存在有限极限, 而 M_n 有界, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?
- (3) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(n)}(x)|$ 都存在有限极限, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?

2. (30 分) 判断级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的敛散性, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的取整。

3. (30 分) 证明:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(xy)^{xy}} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{x^y} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

4. (25 分) 设 A 是一个 n 阶方阵, 且 $n \geq 3$, A^* 是 A 的伴随矩阵 (即 A 的代数余子式所组成的矩阵)。试证明: 若 $(A^*)^* \neq 0$ (零矩阵), 则 A 可逆, 且此时 $(A^*)^*$ 是 A 的一个纯量倍。
5. (25 分) 设 A 是一个 3 阶实方阵, 考虑 A 所定义的线性变换 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha \mapsto A\alpha$ (α 是列向量)。试证明: 若 $AA^T = A^T A$ (其中 A^T 是指 A 的转置矩阵), 则上述线性变换必有一个 2 维不变子空间。
6. (25 分) 设 A 和 B 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的两个 n 阶方阵, 并且 A 有 n 个特征值 $1, 2, \dots, n$, B 也有 n 个特征值 $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$, 其中 $p_1, \dots, p_n$ 是前 n 个素数 (比如 $p_1 = 2, p_2 = 3$ 等)。试证明: $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $X \mapsto AXB$ 是可以对角化的。

7. (25 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

试找出两个没有常数项的多项式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 使得下列三个条件同时成立:

- (1) $f(A)$ 可对角化;
- (2) $\varphi(A)$ 是幂零矩阵;
- (3) $A = f(A) + \varphi(A)$ 。

8. (几何部分, 共 5 小题, 每题 10 分)

- (1) 三维欧氏空间中取定直角坐标系。有一直线 l 过点 $(1, 0, 0)$ 且方向向量为 $(0, 1, 1)$ 。绕 z 轴旋转生成一个二次曲面 S 。试写出此二次曲面的代数方程 (形如 $f(x, y, z) = 0$)。
- (2) 设有一固定平面 Σ , 具有以下性质: 上述直线 l 在绕 z 轴旋转过程中总是与 Σ 相交。考虑与 Σ 平行的平面族 Σ_t , $t \in \mathbb{R}$, $\Sigma_0 = \Sigma$ 。试证明 $\Sigma_t \cap S$ 总是椭圆。



- (3) 试证明 t 值变化过程中, 上述各椭圆中的中心总落在一个过原点的空间定直线 L 上。
- (4) 固定 L 上任一点 p , 试证明: 由 p 向曲面 S 作的各条切线的切点都落在一条椭圆 Γ_p 上, 且椭圆 Γ_p 所在平面是 Σ_t 之一。
- (5) S 把它在空间的补集分成内外两个连通分支, 其中外部区域不包含原点。取上一小题所述椭圆 Γ_p 所在平面落在 S 外部的一点 $\hat{p}$ 。试证明: 从 $\hat{p}$ 向 S 所作的各条切线之切点落在一条双曲线 Γ 上, 且 Γ 所在平面过 p 点。



北京大学数学科学学院
2016 年直博生招生考试试题

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷满分 200 分, 考试时间 120 分钟。

1. (证明题, 共 30 分, 每小题 15 分)

(1) 若 $f(x)$ 在实轴上可导且 $f'(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有一个零点。

(2) 若 $f(x)$ 处处二阶可导且 $f''(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有两个零点。

2. (30 分) 假设 $\varphi(x, y, z)$ 是原点 O 某个邻域上 C^∞ 函数, 且 $\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}$ 在 O 点为 0, $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}$ 在 O 点为 1, $\varphi_{xy}(O) = \frac{1}{2}, \varphi_z(O) = -\frac{1}{2}, \varphi(x, y, z) = 0$ 的隐函数记为 $z = z(x, y)$ (已知 $z(0, 0) = 0$)。请讨论 $z = z(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点附近的极值问题。

3. (40 分) 设 $z = z(x, y)$ 是题 2 中的隐函数, Ω_δ 是 $(0, 0)$ 点的 δ 邻域, 当 δ 充分小时, 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy.$$

4. (20 分) 设 A 是一个 2 阶复方阵, 考虑 2 阶复方阵的线性空间 $M_2(\mathbb{C})$ 上的线性变换

$$\varphi_A: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto AX - XA.$$

试确定 $\dim \ker \varphi_A$ 的所有可能的取值。

5. (30 分) 对于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的两个 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

试证明两者是相似的, 并求出一个矩阵 T , 使得 $A = T^{-1}BT$ 。

6. (20 分) $\mathbb{R}[x]$ 中多项式 $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ 。试用系数 a_1, a_2, a_3, a_4 的关系式, 给出 $f(x)$ 能表示成某个不可约二次多项式 $g(x)$ 之平方的充分必要条件。

7. (30 分) 欧氏平面上限定向的等距变换群的一个子群 G , 其中每一个非恒同的变换 g 都没有不动点, 而且每一个平面上的点 p 在群 G 作用下得到的轨道 (即点集 $\{g(p) \mid g \in G\}$) 在平面上都没有聚点。试证明 G 可以由一个或两个平移变换生成, 即

$$G = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{或} \quad G = \{n\alpha + m\beta \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, n, m 为任意整数, α, β 为线性无关的平移向量 (也表示其对应的平移变换)。 $n\alpha + m\beta$ 即对应线性组合所表示的平移。



北京大学数学科学学院
2017 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (1) (10 分) 证明隐函数 $y + \sin(xy) - x = 0$ 在 $x = 0$ 附近可以确定一个函数关系 $y = f(x)$ 。
(2) (5 分) 试简单回答这个函数的光滑度（不必证明）。
(3) (10 分) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的三阶导数 $f'''(0)$ 。
2. (1) (10 分) 叙述积分第一中值定理，并给出一个几何解释。
(2) (10 分) 叙述一个函数 $g(x) = 1$ ，另一个函数 $f(x)$ 单调时的积分第二中值定理（三种情况），并给出一个几何解释。
(3) (5 分) 请问 (2) 中的函数 $f(x)$ 的单调性是实质性条件还是技术性条件（自由畅谈）。如果是实质性的，那么本质是什么？如果是技术性的，在哪方面提供了哪些方便？
3. (25 分) 在考虑函数 $f(x)$ 在给定区间上的傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 的收敛时， $f(x)$ 的光滑性与级数的收敛速度之间有没有一定的关系？请给出一个你自己的理解和描述。
4. (1) (10 分) 试讨论广义积分 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ 的收敛性。
(2) (10 分) 试讨论广义重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$ ，其中 $D = \mathbb{R} \times [0, 1]$ 的敛散性。
(3) (5 分) 请对上述结论给出一个你认为合理且本质的解释。
5. (20 分) 求集合 $\{A \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R}) : A^3 = 0\}$ 中矩阵的秩的最大值。
6. (30 分) 设 V 是有限维实内积空间， $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in V$ 。假设存在非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \alpha, \alpha_i \rangle \beta_i = 0$ 。证明存在非零向量 $\beta \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \beta, \beta_i \rangle \alpha_i = 0$ 。
7. (20 分) 证明：对任意 3×3 复矩阵，存在 3×3 酉矩阵 U ，使得 UAU^{-1} 为形如

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

的矩阵。

8. (30 分) 对于空间仿射坐标系中的马鞍面 $S : z = xy$ ，记 G 为所有保持 S 作为点集不变的空间仿射变换构成的群。试决定空间中所有这样的直线 L ，使得对于任意的 G 中变换 g ，直线 $g(L)$ 都与 L 平行或重合。



北京大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (20 分) 设 $a > 0$, $a_1 = a$, $a_2 = a^a$, $a_3 = a^{a^a}$, $\dots$, $a_{n+1} = a^{a^{\dots}}$, $\dots$, 集合 $S = \{a \mid \text{序列}\{a_n\} \text{ 极限存在}\}$ 。

(1) 证明 S 有上界。

(2) 求 S 的上确界。

2. (共 20 分, 每小题 10 分)

(1) 设 $y = \arctan \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(2) 求定积分 $\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$ 。

3. (20 分) 试参照积分第二中值定理的表述, 给出第一类曲线积分的积分第二中值定理 (注意条件和结论表述的准确性), 并给出相应的证明。

4. (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆为整个实数轴上的连续函数, 其中 $g(x)$ 以 $T > 0$ 为周期。证明: 函数方程 $f(f(x)) = -x^3 + g(x)$ 不可能有连续解。

5. (20 分) 在单位圆盘 D 内, $u = \Delta u$, $u|_{\partial D} = 0$ 。证明: $u \equiv 0$ 。

6. (15 分) 设 a_0, a_1, a_2 为有理数, 且

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 + a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

证明: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。

7. (25 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$ 。

(1) (5 分) 将 f 写成 $x^T Ax$ 的形式, 求实对称矩阵 A 的特征向量与特征值。

(2) (10 分) 求正交矩阵 P 和对角矩阵 D , 使得 $A = PDP^T$ 。

(3) (10 分) 求二次型 $f(x) = x^T Ax$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上取到的最大值, 并确定在何处取到最大值。

8. (20 分) 设矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数均为 n , 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(AB) + n$$

当且仅当 $\text{Ker } A \subseteq \text{Im } B$ 。

9. (10 分) 设 A 为 $M_n(\mathbb{C})$ 中的幂零矩阵, 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $T_A: B \mapsto AB - BA$ 。证明: 若 $(T_A)^2 B = 0$, 则 AB 是幂零矩阵。

10. (30 分) 定义在平面 $y = 0$ 上的圆 $C: (x-2)^2 + z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转成一环面 Γ 。

(1) 求环面 Γ 的一个参数方程。

(2) 环面 Γ 的正等测投影 (其在平面 $x + y + z = 0$ 上的垂直投影) 外周是否为椭圆?



复旦大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽



复旦大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数, $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 判断 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 是否成立.
2. 设 $\mathbb{Z}$ 为整环,

$$A = (3, x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

为 $\mathbb{Z}[x]$ 的理想. 问:

- (1) A 是否为主理想? 请说明理由.
 - (2) $\mathbb{Z}[x]/A$ 是否为整环? 请说明理由.
3. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=2020}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^x n}.$$

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$. 求证: 若 A, B 无公共特征值, 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似于

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

并举例说明去掉条件 A, B 无公共特征值后结论不成立.

5. 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = 10$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(1) = 7$. 问: $f''(x)$ 是否一定能取到某个值, 并说明理由.
6. 设 G 为有限群, $|G|$ 无平方因子, $\varphi: G \rightarrow G$, $g \mapsto g^3$ 是单同态. 求证: G 是循环群.
7. 设 $f \in C[0, 1]$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$

8. 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 求证:

$$|\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|.$$

等号成立当且仅当 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基.



复旦大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^3}{n^4 + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1) 上述条件是否可以确定 $f^{(k)}(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$?

(2) 若 $f_1(x), f_2(x)$ 为满足上述要求的两个函数, 是否存在 $\delta > 0$, 使得 $f_1(x) = f_2(x)$ 在 $[0, \delta]$ 上成立?

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \cos x^n dx$.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上定义, $f([a, b]) \subset (a, b)$, 并存在一个常数 α , 满足 $0 < \alpha < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a, b]$, 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$, 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$.

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a, b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ .

4. (存疑) 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{(1+z)^{1/2}}{z^3} dz$.

5. 设复方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求酉矩阵 U 使得 U^*AU 为对角阵.

6. 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{p \times q}(\mathbb{F})$, $C \in M_{m \times q}(\mathbb{F})$, 证明: 矩阵方程

$$AX - YB = C$$

有解 X, Y 的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

7. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明下列两个结论等价:

(1) V 中任一非零向量都是循环向量, 使 V 成为循环空间.

(2) V 只有平凡的 φ -不变子空间.

8. 设 $A \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$,

$$\begin{aligned} \varphi: M_{m \times n}(\mathbb{F}) &\rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{F}), \\ X &\mapsto AX - XB. \end{aligned}$$

证明: φ 可对角化等价于 A, B 可对角化.



复旦大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上二阶连续可微的有界下凸函数.

(1) 证明: 存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

(2) 计算反常积分 $\int_0^{\infty} x f''(x) dx$.

2. 设 $f(x) \in C^1[-1, 1]$ 是一个正值函数, $f'(x) \neq 0$, 并且当 $x \in [-1, 1]$ 时,

$$\left| x + \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \geq 1.$$

还设 a, b 是 $(-1, 1)$ 中任意两个数, 满足 $a < b$. 证明:

(1) 对于任意 $x \in (a, b)$, 成立 $f(x) < f(a) + f(b)$.

(2) $\frac{1+a}{1+b} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq \frac{1-a}{1-b}$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可以展开为收敛的幂级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0),$$

其中 $r_0 > 0$. 证明: 对任意 $x_1 \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$, $f(x)$ 在 x_1 也可以展开为收敛的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_1)^n, \quad \forall x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1),$$

其中 $r_1 \geq \frac{1}{2}(r_0 - |x_1 - x_0|)$.

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵, 且 A 有 n 个不同的特征值. 设 V_A 是 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 中所有形如 $BA - AB$ 的矩阵全体构成的子空间. 求 V_A 作为复线性空间的维数.

5. 记 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的空间. 令

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

是 n 阶复方阵. 定义线性变换 $T: M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$

$$M \mapsto AMB.$$

(1) 求 T 的所有特征值 (记代数重数) 之和, 答案用 a_{ij}, b_{ij} 表示.

(2) 证明: T 幂零当且仅当 A 或 B 至少有一个幂零.

6. 设 A 是 n 阶可逆实方阵. 证明:

(1) 存在唯一的 n 阶正交阵 P 和实对称正定阵 H , 使得 $A = PH$.

(2) 在 (1) 中, $PH = HP$ 当且仅当 $AA^T = A^T A$.



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 25 日)
来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于学术学位营员, 考试时间 120 分钟.

1. 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-r_n)^{\frac{1}{3}}}{2^n}$, 其中 $\{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中有理数的一个排列, 证明:

(1) $f \in C(\mathbb{R})$.

(2) f 在 $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ 上可导.

(3) $\forall x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, 存在 $\{r_n\}$ 的一个排列, 使得 f 在 x_0 处可导.

2. 设 V 是由点 $(2, -1, -1), (2, 1, 1), (1, 0, 0)$ 构成的三角形绕 y 轴旋转得到的几何体.

(1) 记 $x_0 = (3, 0, 0)$, 求点 x_0 到 V 的最短距离.

(2) 求 V 的体积.

3. (1) 设 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy = 1$, 求 k 的值.

(2) 在 (1) 的条件下, 证明:

$$\left(\iint_{D_1} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) \left(\iint_{D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) < \iint_{D_1 \cap D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy.$$

其中区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid |y| \leq 1\}$.

4. 设 $\mathcal{T}$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换, $A \in M_n(\mathbb{C})$, 并且 $\mathcal{T}$ 可逆当且仅当 A 可逆, 证明:

$$\exists c \in \mathbb{C}, \text{ s.t. } \det(\mathcal{T}A) = c \cdot \det A.$$

5. 设 A 为 n 阶复方阵, 定义 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. 证明:

(1) $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

(2) e^A 可对角化的充分必要条件是 A 可对角化.

(3) 对任意行列式为 1 的 2 阶实方阵 A , 都存在矩阵 B 使得 $A = e^B$.

6. 设 Q 为 $n \times m$ 实矩阵且满足 $Q^\top Q = I_m$, A 为 n 阶实正定矩阵. 证明:

$$Q^\top A^{-1} Q - (Q^\top A Q)^{-1}$$

半正定.



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 27 日)

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于专业学位营员, 考试时间 120 分钟.

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

2. 设 $f(x) = (e^x \cos \sqrt{3}x)$, 求 $f^{(98)}(x)$.

3. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 + y^2 - xy) dx dy.$$

其中区域 $D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$.

4. 求函数 $f(x) = \sin^2 x$ 在 $x = \pi$ 处的 Taylor 展开式, 并确定其收敛区间.

5. 设 $y(x)$ 为下述常微分方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = e^{3x}$ 满足 $y(0) = y'(0) = 0$ 的解, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - 2(\arctan x)^2}{y(x)}.$$

6. 设

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

计算 $f'_+(0)$ 的值.

7. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

且 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

是 $f(x)$ 的傅里叶级数, 求 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 的值.

8. 计算二重积分

$$\iint_D (x-y)^2 \tan^2(x+y) dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$.

9. 求满足

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

的二次连续可微函数 $f(x)$.

10. 设数列 $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.



复旦大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：考试时间 120 分钟.

1. 填空题 (12 分)

(1) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则参数 t 的取值范围为____.(存疑)

(2) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2b & -b-1 & 1 \end{pmatrix}$ 可对角化, 则 b 的取值范围为_____.

(3) 设 A 是 6 阶矩阵, 满足 $A^2 = O$, $\text{rank } A = 3$, 则 A 的 Jordan 标准形为_____.

2. 计算题 (30 分)

(1) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的原函数.

(2) 计算二重积分 $\iint_{0 \leq x \leq y \leq \pi} \ln |\sin(x-y)| dx dy$.

(3) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\ln(1-x)}$.

3. 解答题 (58 分)

(1) 已知 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 求积分

$$\int_0^1 (1+x^2)f^2(x) dx$$

能取到的最小值, 并求出此时的 $f(x)$.

(2) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续并且一阶可导, $f'(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得

$$f'(\xi) = 2024(f(\xi) - f(0)).$$

(3) 已知方阵 $C \in M_m(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$, 对于任意矩阵 A, B 都有

$$\text{rank}(C - AB) + n = \text{rank}(D - BA) + m.$$

证明: 存在非零数 k 使得 $C = kI_m$, $D = kI_n$.

(4) 已知 A, B 为 n 阶复方阵, 存在正整数 m 使得

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = O,$$

证明: $|A| = |B|$.



复旦大学数学科学学院

2025 年学术营笔试

来源：小红书作者 Relax

回忆版整理

1. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为实内积空间, $T: V \rightarrow V$ 为线性映射。

(a) 写出 T 的伴随算子 T^* 的定义。

(b) 考虑 $V = \mathbb{R}^2$ 及其一组基 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, 设 V 上两个线性映射在这组基下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

若它们在 V 的某个内积下均成为自伴随算子, 求该内积在上述基下的矩阵。

2. 求 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ 。

3. 求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & (x_2 + \cdots + x_n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & (x_1 + \cdots + x_{n-1})^{n-2} \end{vmatrix}.$$

4. 分析 $\int_0^{+\infty} \sin \left(x^p + \frac{1}{x^p} \right) dx$ 在何时绝对收敛、条件收敛和发散。

5. 设 a_n 为方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 的正实根, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 的收敛域 D , 并问其在 D 中是否绝对收敛和一致收敛。

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

(a) 问: A 是否可对角化?

(b) 设 $\varphi: M(3, \mathbb{R}) \rightarrow M(3, \mathbb{R}), X \mapsto A^{-1}XA$, 求 $\text{tr}(\varphi^{100})$ 。

7. 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\int_0^x \frac{t}{\arctan t} dt - \frac{1}{\pi} x^2 - \frac{4}{\pi^2} x - \frac{8}{\pi^3} \ln x + A \right) = B.$$

求 A 的表达式及 B 的值。



上海交通大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽



上海交通大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)

来源: 小红书作者 Relax

1. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sqrt{\sin x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所得旋转体体积.

2. 设积分

$$\oint_L 2[xf(y) + g(y)]dx + [x^2g(y) + 2xy^2 - 2xf(y)]dy = 0,$$

其中 L 为任意一条平面曲线, 求可微函数 $f(y), g(y)$ 满足 $f(0) = -2, g(0) = 1$.

3. 设 $e < a < b < e^2$, 证明: $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $W_1, W_2, \dots, W_s$ 为 V 的 s 个子空间, $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s$. 证明: W 为 V 的子空间的充分必要条件是存在某个 $i (1 \leq i \leq s)$, 使得 $W = W_i$.

5. 设 A 是 3 阶方阵, 线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中

$$\beta = (1, 2, 3)^\top, \gamma_0 = (1, 0, 1)^\top, \eta_1 = (2, -1, 0)^\top, \eta_2 = (1, 0, -1)^\top,$$

试求矩阵 A .

6. 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 $r(A) + r(B) \leq n$. 证明: 存在 n 阶可逆阵 M 使得 $AMB = O$.

7. 设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 求统计量 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 和 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 的相关系数. 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是样本均值.

8. 叙述随机变量四种收敛性的定义及相互关系.

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(0, 1)$, 试求第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$ 的密度函数, 并求出 $E(X_{(k)})$ 和 $Var(X_{(k)})$.

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 试给出参数 $\ln \sigma$ 的估计并讨论其相合性.

11. 甲乙两人进行一项竞技游戏, 初始时甲持有 10 元, 乙持有 20 元. 每局游戏规则如下: 若甲获胜, 乙向甲支付 1 元; 若乙获胜, 甲向乙支付 1 元, 且每局甲乙获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$. 游戏持续进行, 直至某一方资金归零之时终止, 此时另一方获胜. 求甲最终获胜的概率.

12. 叙述 UMVUE 的定义并写出几种常见的求解方法.



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题（数学）
来源：小红书作者 Relax

1. 设 $\{a_n\}$ 为一数列, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明: $|l| \leq 1$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 令 $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$.
 - (1) 求 $g'(x)$.
 - (2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.
3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = 0$. 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$.
4. 设函数项级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n + x^2}$.
 - (1) 求函数 $S(x)$ 的定义域.
 - (2) 讨论 $S(x)$ 在定义域内的连续性.
 - (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ 是否存在? 给出证明.
5. 设 $\partial\Omega$ 为区域 Ω 的边界曲面, 分片光滑, u, v 在 $\bar{\Omega}$ 上二阶连续可微, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u 在 $\mathbf{n}$ 方向上的方向导数.
 - (1) 证明:

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy dz = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$
 - (2) 设 $\Delta u = 0$, p_0 为 Ω 的内点. 证明:

$$u(p_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{\cos(p - p_0, \mathbf{n})}{\|p - p_0\|^2} u + \frac{1}{\|p - p_0\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$
6. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.
 - (1) 若 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$. 证明: $r(\mathbf{A}) = n$.
 - (2) 进一步设 $\mathbf{A}$ 的主对角元素均大于零, 证明: $|\mathbf{A}| > 0$.
7. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为正定矩阵, 证明: 矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 有唯一解 $\mathbf{X} = \mathbf{C}$, 并且 $\mathbf{C}$ 是正定矩阵.
8. 设 V 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 6 维线性空间, φ 是 V 上的一个线性变换, 其极小多项式 $m(x) = x^3 + x - 3$.
 - (1) 求线性变换 φ 的特征多项式.
 - (2) 求线性变换 φ 的有理标准型.
9. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 为三个实数域上两两互素的非常数多项式, 记 $\text{rad } f(x)$ 为多项式 $f(x)$ 在复数域上不相同的根的个数.
 - (1) 证明: 若 $f(x) + g(x) = h(x)$, 则 $\max\{\deg f(x), \deg g(x), \deg h(x)\} \leq \text{rad}(f(x)g(x)h(x)) - 1$.
 - (2) 证明: 若 $[f(x)]^n + [g(x)]^n = [h(x)]^n$, 则 $n = 1$ 或 2 .
10. 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 且 $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq n - 1$. 证明: 对任意自然数 k , 有

$$\text{rank}(\mathbf{A}^k) + \text{rank}(\mathbf{B}^k) \geq 2\text{rank}(\mathbf{AB}).$$



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题 (应用统计)
来源: 小红书作者 Relax

1. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 - y^2) e^{(x+y)^2} dx dy,$$

$$\text{其中区域 } D = \left\{ (x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right].$$

3. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.

$$(1) \text{ 若 } |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n. \text{ 证明: } r(A) = n.$$

$$(2) \text{ 进一步设 } A \text{ 的主对角元素均大于零, 证明: } |A| > 0.$$

4. 设 n 阶实方阵 A 的所有 1 阶主子式之和, 2 阶主子式之和均为 0. 证明:

$$(1) A \text{ 的特征值全为 } 0.$$

$$(2) A^n = O.$$

5. 设 $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, 证明: 事件 A 与 B 独立的充要条件是 $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\bar{B})$.

6. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. 定义 $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$, 求 S_n 的特征函数 $\varphi_n(t)$ 并求当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限分布.

7. 设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布 $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, 记

$$U = \begin{cases} 1, & X \geq 0, \\ -1, & X < 0, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1, & Y \geq 0, \\ -1, & Y < 0. \end{cases}$$

求 U 和 V 的相关系数 $\text{Corr}(U, V)$.

8. $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, \theta)$, $Y_1, \dots, Y_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, 2\theta)$, 试求 θ 的无偏估计中方差最小的统计量, 给出构造思路, 并证明其方差最小.

9. 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是从两点分布族 $\{b(1, p) : 0 < p < 1\}$ 中抽取的简单样本, 且 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ 为充分完备统计量, 求 $g(p) = p(1-p)$ 的 UMVUE.

10. 设 $x_1, \dots, x_n$ 为来自 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 试求假设 $H_0 : \sigma^2 = 1$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ 的似然比检验.



浙江大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽



浙江大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题
来源: 小红书作者 Relax

数学分析 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 用定义证明数列 $\{\cos n\}$ 发散.
2. (10 分) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (r > 0)$ 的面积.
3. (10 分) 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

4. (10 分) 设 $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

求证: 存在 $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 使得

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^2[0, 2]$,

$$|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [0, 1].$$

求证: $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in [0, 2]$.

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 给定空间中由 4 个向量所构成的向量组, 求该向量组张成的子空间的基和维数.
2. (10 分) 设 A 为实对称矩阵, 其主子式均非负. 求证: 二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 半正定.
3. (15 分) 设 V 为复线性空间, 映射 $\varphi: V \rightarrow V$ 满足

$$(1) \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

$$(2) \varphi(av) = \bar{a}\varphi(v), \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V.$$

$$(3) \varphi^2 = -I_V.$$

求证:

$$(1) \forall 0 \neq v \in V, v \text{ 与 } \varphi(v) \text{ 线性无关.}$$

$$(2) V \text{ 可分解为有限个二维 } \varphi\text{-不变子空间的直和.}$$

4. (15 分) 设 V, U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 为线性映射, $\varphi^2 \neq \mathbf{0}, \varphi^3 = \mathbf{0}$. 求证:

$$(1) \text{ 若 } \text{Ker } \varphi^2 = \{\mathbf{0}\}, \text{ 则 } \varphi \text{ 为单射.}$$

$$(2) \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi^3 \leq 2 \dim \text{Ker } \varphi^2.$$



浙江大学数学科学学院
2020 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 利用上下确界定义实数列 $\{x_n\}$ 的上下极限如下：

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k.$$

(1) 证明：对于任意的实数列 $\{x_n\}$ ，其上下极限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 在广义实数系下存在。

(2) 证明：

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

（上式中每个不等式成立是指不等式左右两边都有意义的前提下）

2. (10 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的二次可微函数。记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad k = 0, 2.$$

其中 $f^{(k)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 k 阶导数。

(1) 证明： $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < +\infty$ ，且 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$ 。

(2) 设 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。证明： $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。

3. (10 分) 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})} dx,$$

其中 t 是给定的实数。

4. (10 分) 设 $f(x, y)$ 是 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的二次连续可微函数，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$ 。计算积分

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可微函数，满足 $f(0) = 0$ ， $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ 。假设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，证明：对任意 $\alpha > 1$ ， $\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx$ 收敛，并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx \leq \left[\int_0^{+\infty} f(x) dx \right]^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$



2. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 且均非对角阵. 试问什么条件下一定存在 n 阶可逆实矩阵 C , 使得 $C^T A C, C^T B C$ 都是对角阵.

3. (10 分) 设

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

是两个实系数多项式, 且 $a_3 b_2 \neq 0$. 这两个多项式的结式定义为如下的行列式:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}.$$

判断是否存在两个多项式 $u(x), v(x)$, 其中 $\deg(u(x)) < 2, \deg(v(x)) < 3$, 使得

$$R(f, g) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

4. (10 分) 设 U 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, $\text{End}_{\mathbb{P}}(U)$ 是所有定义在 U 上的线性变换的全体所构成的线性空间. 试问该线性空间中是否有一组全部由可逆的线性变换所成的基?

5. (10 分) 求 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形.



浙江大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n (n \geq 0)$, 试用两种方法证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.
2. (10 分) 举例说明一个在 $\mathbb{R}^2$ 上取值恒正的二元多项式 $P(x, y)$ 可以没有最小值.
3. (15 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的实函数. 若对任何 $0 < \varepsilon < A < +\infty$, $\int_{\varepsilon}^A \frac{f(x)}{x} dx$ 存在, 考虑 Frullani 积分

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx.$$

其中 $\alpha, \beta > 0$ 为常数. 证明:

- (1) 如果 $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 以及 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $I(\alpha, \beta) = (f(+\infty) - f(0+)) \ln \frac{\alpha}{\beta}$.
 - (2) 如果 $f(0+)$ 存在, $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $I(\alpha, \beta) = -f(0+) \ln \frac{\alpha}{\beta}$.
 - (3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $I(\alpha, \beta) = f(+\infty) \ln \frac{\alpha}{\beta}$.
4. (15 分)
- (1) 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 可积且绝对可积, 若 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, 证明:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

是以 2π 为周期的连续函数, 且 $F(x)$ 可以写成两个单调函数之和.

- (2) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛是三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

成为某个在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件.

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 设多项式 $f(x) = x^3 + px + q$ 的三个根为 x_1, x_2, x_3 , 已知多项式 $g(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ 的三个根为 $(x_1 + x_2)^2, (x_1 + x_3)^2, (x_2 + x_3)^2$, 请用 $f(x)$ 的系数表示 r .
2. (10 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是 A 的一个 Moore-Penrose 广义逆, 证明:

- (1) 证明: 当线性方程组 $Ax = \beta$ 有解时, 其通解可以写成

$$x = A^+ \beta + (I_n - A^+ A)y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

- (2) 试问 $A^+ \beta \perp (I_n - A^+ A)y$ 是否对任意的 $y \in \mathbb{R}^n$ 均成立? 请说明详细理由.

3. (10 分) 设 A 是实方阵且特征值不为 0 和 -1 , 证明: A 是正交矩阵当且仅当

$$(A^T + I)^{-1} + (A + I)^{-1} = I.$$

4. (10 分) 设三阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -5 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$



(1) 求 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形.

(2) 求 $\mathbf{A}$ 的所有不变因子, 初等因子及行列式因子.

5. (10 分) 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ 1 & 3 & & \\ & 1 & 3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

的最小多项式并简要说明求解理由.



浙江大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题
来源: 小红书作者 Relax

数学分析 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

- (10 分) 计算 $\iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx dy$, 其中 D 为由 $xy = 1$, $xy = 3$, $x = y^2$, $3x = y^2$ 所围成有界区域.
- (10 分) 设 $\{F_k\}_{k \geq 1}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一族非空有界闭集, 单调下降 (即 $F_k \supset F_{k+1}$, $k \geq 1$). 请用实数连续性定理的任一种等价刻画方式来证明: $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.
- (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f(x)$ 在 0 处的右导数 $f'_+(0) < 0$, 在 1 处的左导数 $f'_-(1) < 0$, $f(0) = f(1) = c$. 证明: $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点.
- (10 分) 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续可微.
- (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上黎曼可积, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx$.

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

- (10 分) 求可逆矩阵 P, Q 使得 PAQ 是 A 的等价标准形, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (10 分) 下列命题是否正确? 若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例.

(1) 设

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}, S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$$

是 n 维欧氏空间 V 的两组线性无关的向量, 满足

$$(\alpha_i, \beta_j) = 0, \forall 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$$

成立, 那么 $s + t \leq n$.

(2) 存在 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 使得该变换分别将 $(-1, 1, 0)$, $(2, -1, 4)$, $(0, 1, 4)$ 映射为 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$.

- (10 分) 证明: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - x + 1$ 为有理数域上的不可约多项式.
- (10 分) 已知 A, B 都是 3 阶方阵, 证明:

$$|AB - BA| = \frac{1}{3} \text{tr}((AB - BA)^3).$$

- (10 分) 设 A 和 B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵. 证明: $A = B$ 的充分必要条件是对所有的 n 阶对称矩阵 C 都有

$$|A + C| = |B + C|.$$



浙江大学数学科学学院
2023 年直博生招生考试试题
来源: 小红书作者 Relax

数学分析 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

2. (10 分) 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx$ 满足 $|f(x)| \leq |\sin x|$. 求证: $\left| \sum_{k=1}^n k a_k \right| \leq 1$.

3. (10 分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $y + 2y^2 + y^3 = e^{-x} + x - 1$ 确定, 且

$$y = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3).$$

求 A, B 的值.

4. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可导.

5. (10 分) 已知 $f(x) \in C[0, 1]$, $A = \int_0^1 f(x) dx$,

$$h_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3n}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}nx, & \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_n\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) S_n(x) dx$ (用 A 表示).

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 A 的极小多项式并证明在复数域上该矩阵可以对角化.

2. (10 分) 设矩阵 $A = P^T P$, $B = -Q^T Q$, 其中 P, Q 都是数域上满秩方阵. 若方阵 C 满足 $AC = CB$, 求矩阵 C .

3. (10 分) 假设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量, 计算行列式

$$|2I_n + \alpha\beta^T + \gamma\delta^T|.$$

4. (10 分) 假设 V 是实数域上由 $\{1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x\}$ 张成的线性空间,

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} (x-1)f(x)dx$$



是线性映射. 证明: 存在唯一的 $g(x) \in V$ 使得

$$\varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x) \in V$$

并求出函数 $g(x)$.

5. (10 分) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

令 W 是该 4 个向量张成的线性空间, U 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间, 求 $W + U$ 以及 $W \cap U$ 的维数和一组基.



浙江大学数学科学学院
2024 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 利用有限覆盖定理证明：闭区间上连续函数必一致连续.
2. (10 分) 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛, 且 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致有界. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.
3. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续. 若对 $\forall x \in (0, 1)$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > 0,$$

证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调递增.

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数, 且在 $[0, \pi]$ 上可积. 证明:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

高等代数（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 假如 T 是实数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $T^2 + I_V = O$, 定义 $(a + bi)v = av + bT(v)$. 证明: V 关于上述运算构成复数域上的线性空间, 并求其在复数域上的维数.
2. (10 分) 设 A, B, C 是 n 阶复方矩阵, 满足 $AB - BA = \overline{C}C^T$, 其中 $\overline{C}$ 是 C 共轭矩阵, C^T 是 C 的转置矩阵, a, b 是两个复数, 且对所有满足 $f(A, B) = O$ 的多项式 $f(x, y)$ 都成立 $f(a, b) = 0$. 证明: 存在非零向量 v 满足 $Av = av$ 且 $Bv = bv$.
3. (10 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个互素的多项式, A 是一个 n 阶方阵, 证明: $f(A)g(A) = O$ 的充分必要条件是 $r(f(A)) + r(g(A)) = n$.
4. (10 分) 设 V 是次数不大于 2 的实系数多项式的全体组成的线性空间, 在 V 中求多项式 $q(x)$ 使得对 V 中所有 $p(x)$, 等式 $\int_{-1}^1 p(x)q(x)dx = \int_{-1}^1 p(x)\cos(\pi x)dx$ 都成立.
5. (10 分) 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 3$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i & , i = j \\ 3i + 1 & , i < j \\ 2 - 3j & , i > j \end{cases}.$$

证明: 行列式 $\det(A)$ 是 3 的倍数. (题目有误)



浙江大学数学科学学院
2025 年推荐免试直博生招生试卷
来源：小红书作者 Relax

数学分析部分 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中有定义, 记

$$w_f(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in D \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|,$$

证明 f 在 D 上一致连续的充要条件是 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(\delta) = 0$.

2. 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 有连续的左导数 $f'_-(x)$ 且 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'_-(\xi) = 0$.

3. 设 f 是 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的函数, 且在 $x = 1$ 处可导, $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

4. 求证含参变量积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} \cos x dx$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 并计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x dx.$$

5. 设 $0 < f(x) < 1$, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ 均收敛. 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

高等代数部分 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. 设数域 F 上的 n 阶方阵 A, B 的极小多项式分别为 $p(x), q(x)$, $\deg p = \deg q = n$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 的最大公因式为 $d(x)$, $d(x) \neq 1$, 求 $AX - XB = 0$ 的解空间维数.

2. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵, 满足: $(1, 2, \dots, n)A = 0$, $A(1, 2, \dots, n)^T = 0$. 证明 A^* 可表示为 $\alpha\alpha^T$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

3. 设 S, T 为有限维欧氏空间 V 上可交换的线性变换, U 是 T 的不变子空间, W 是 U 在 V 中的正交补空间, 且对任意 $u, v \in V$, 成立 $(Tu, v) = (u, Sv)$. 证明 W 也为 T 的不变子空间.

4. 求

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - a)^n & b & f(\lambda) \\ & (\lambda - a) & b \\ & & (\lambda - a) \end{pmatrix}$$

的等价标准形, 其中 a, b 为给定的复数, $f(\lambda)$ 是给定的多项式.

5. 设 a, b, c, d 为 $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ 的 4 个根, 求以 a^2, b^2, c^2, d^2 为根的首一四次多项式.



南京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊



南京大学数学学院
2024 年夏令营招生考试试题
数学分析 (满分 50 分)

1. 计算题。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx.$$

$$(4) \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)^{3/2}} dx dy.$$

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 敛散性 (包括绝对收敛和条件收敛)。

3. 设有界函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足 $|f'(x)| < 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)。

(1) 证明: 方程 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一解 x_0 。

(2) 设初始值 $a_0 \in \mathbb{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 由递推关系 $a_n = f(a_{n-1})$ 生成, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ 。

4. 设函数 $f(x), g(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} f(x), g(x) \in C[0, 1]; \\ f(0) = 1, f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1. \end{cases}$$

证明: 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$ 。

高等代数 (满分 50 分)

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 \\ \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 & \cos 5 \\ \cos 5 & \cos 6 & \cos 7 & \cos 8 \\ \cos 9 & \cos 10 & \cos 11 & \cos 12 \end{vmatrix}$$

的值。

2. 设 $V = \mathbb{R}^n$ 为 n 维实向量空间, A 是 $n \times n$ 实对称矩阵, 其特征值按升序排列为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. 设 W 是 V 的任意 k 维子空间, 证明: 存在单位向量 $x \in W$, 使得二次型满足

$$x^T A x \geq \lambda_k.$$

3. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 的符号差。

4. 设 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $F_\alpha = \mathbb{Q}(\alpha)$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上包含 α 的最小扩域。定义线性变换 $L_\alpha : F_\alpha \rightarrow F_\alpha$, 其作用为 $L_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ ($\forall \beta \in F_\alpha$)。求 L_α 的特征多项式。

5. 设 m 阶矩阵 A 与 n 阶矩阵 B 没有公共的特征值, 又 C 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似。



南京大学数学学院
2023 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 50 分)

1. (16 分) 计算下列各题。

$$(1) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos^2 x)}{\ln(\sin x)}.$$

2. (10 分) 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^{n^2}}{n^2}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}.$$

3. (8 分) 计算曲线积分

$$I = \oint_C \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \cos y + y \sin x) dx + (x \sin y + y \cos x) dy],$$

其中 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 积分沿逆时针方向进行。

4. (8 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件:

(1) $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$;

(2) $f(0) = 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立;

(3) f 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ 在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处正定。

证明:

(a) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上仅有一个零点, 且存在常数 $c > 0$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $f(x) \geq c\|x\|$ 。

(b) 梯度映射 $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 即 $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ 是单射。

5. (8 分) 设函数列 $f_n(x) = x^n + 2023x$ 。

(a) 证明: 方程 $f_n(x) = 2023$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一的实根 x_n 。

(b) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

(c) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^n}{\ln n}$ 。

高等代数 (满分 50 分)

1. (20 分) 设 c 是有理系数多项式的根, 定义集合 $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(c) = 0\}$ 。

(1) (10 分) 证明: 存在唯一的首一多项式 $p(x)$, 使得对任意 $f(x) \in I$, 均有 $p(x) \mid f(x)$ 。

(2) (5 分) 证明: $p(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

(3) (5 分) 若 $c = \sqrt{2} + i$, 求 $p(x)$ 。



2. (10 分) 设矩阵 $A \in M_7(\mathbb{C})$ 的最小多项式为 $\lambda^2(\lambda-1)^3$, 求 A 所有可能的 Jordan 标准型。
3. (10 分) 定义 n 阶幻方 $V \subset M_n(\mathbb{C})$ 是所有满足每行、每列以及两个对角线元素和相等的矩阵全体构成的集合, 即对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 矩阵 $A = (a_{ij}) \in V$ 满足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{n+1-j,j} = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

证明:

- (1) V 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间。
- (2) 求 $\dim V$ 。
4. (10 分) 设 V 是区间 $[-1, 1]$ 上所有次数不超过 n 的实系数多项式构成的线性空间, 在 V 中定义二元函数:

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x), g(x) \in V.$$

- (1) 验证上述定义是 V 的一个内积, 从而 V 是一个欧氏空间。
- (2) 求 V 的一组标准正交基 (由基 $1, x, x^2, x^3$ 出发作正交化)。

概率论 (仅限应用统计专业, 满分 50 分)

1. (10 分) 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求 $Z = X - Y$ 的密度函数。

2. (10 分) 设在区间 $(0, a)$ 上随机地取 n 个点, 求相距最近的两点间距离的数学期望。
3. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U(0, 1)$ 。证明:

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{2/n} \xrightarrow{P} c,$$

其中 c 为常数, 并求出 c 。

4. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且满足 $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$, 证明:

$$\frac{\max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0.$$



南京大学数学学院

2022 年夏令营招生考试试题

注: 数学分析和高等代数必做, 其余科目可选一。

数学分析 (满分 50 分)

1. (10 分) 设 $a_1 > 2$, 且当 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$ 。讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。
2. (10 分) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{k} = O(\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$ 。
3. (15 分) 设 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 1$ 。证明: $|f'(x)|^2 \leq 2f(x)$ 。
4. (15 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 处处可微, 且 $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ 。证明:

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

高等代数 (满分 50 分)

1. (10 分) 求由三维空间中四点

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (8, 4, 2), \quad C = (27, 9, 3), \quad D = (64, 16, 4)$$

组成的三棱锥的体积。

2. (10 分) 已知 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$$

的特征值。

3. (10 分) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

4. (10 分) 假设 A, B 是两个具有相同的秩和极小多项式的 6 阶幂零矩阵, 证明: A, B 相似。
5. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 令 $C = AB - BA$, 如果 $AC = CA$, 证明: 存在正整数 m , 使得 $C^m = O$ 。

实变函数 (满分 50 分)

1. (15 分) 设 $f(x), f_n(x), x \in [0, 1]$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ 是定义在闭区间 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 可积函数。试分别给出 $f_n(x)$ 几乎处处收敛、依测度收敛和在 $L^1([0, 1])$ 中收敛于 $f(x)$ 的定义, 并讨论这三种收敛性之间的关系。
2. (10 分) 试构造闭区间 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 使得下面两个条件成立:

(a) $f_n(x)$ 是 $L^1([0, 1])$ 意义下的 Cauchy 列, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $m, n > N$ 有

$$\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon.$$



(b) 不存在 Riemann 可积函数 $f(x)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ 。

3. (10 分) 设 $f(x)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的有界变差函数, 证明: $f(x)$ 是绝对连续函数当且仅当对任意满足 $g(0) = 0, g(1) = 0$ 的连续可微函数 $g(x)$, 下述分部积分公式成立

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = - \int_0^1 f'(x)g(x)dx.$$

4. (15 分) 设 $L^2([0, 1])$ 为定义在区间 $[0, 1]$ 上的平方可积函数空间, 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L^2([0, 1])$ 弱收敛于 $f(x) \in L^2([0, 1])$, 若对任意 $g(x) \in L^2([0, 1])$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

证明下列命题:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ 当且仅当 $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 和 $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx$ 收敛于 $\int_0^1 |f(x)|^2 dx$ 同时成立。

(b) $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 当且仅当对任意的 $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x)dx = \int_0^t f(x)dx$ 。

近世代数 (满分 50 分)

- (14 分) 设 P 是有限群 G 的一个 Sylow p -子群。
 - (7 分) 证明: $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$, 其中 $N_G(\cdot)$ 表示群的正规化子。
 - (7 分) 设 H 是 G 的一个子群且 $H \supseteq N_G(P)$, 证明: $N_G(H) = H$ 。
- (6 分) 证明: $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 是无理数。
- (15 分) 令 F 是一个域, 定义集合

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

- (5 分) 证明: 在矩阵加法和乘法下, R 是一个含么交换环。
 - (10 分) 当 F 分别为 $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$ 时判断 R 是否构成域。
4. (15 分) 设 K 是一个域, $F \subseteq K$ 为子域, 且 F 包含集合 $\{a^2 \mid a \in K\}$ 。
- (5 分) 证明: 当 K 的特征不为 2 时, $F = K$ 。
 - (5 分) 证明: 若 K 的特征为 2 且 K 是有限域, 仍有 $F = K$ 。
 - (5 分) 若 K 的特征为 2 但 K 不是有限域, 判断是否仍有 $F = K$ 并说明理由。

概率论 (满分 50 分)

- (15 分) 设 X, Y 为独立同分布的随机变量, 且 X 服从参数为 1 的指数分布, 求 $U = \frac{X}{X+Y}$ 的密度函数。
- (10 分) 设 ξ 为取自然数值的随机变量, $\varphi(t)$ 为其特征函数, 证明:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



3. (10 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的 Poisson 分布, 对 X 独立重复观察 n 次, Y 表示观察值大于 1 的次数, 求 $\mathbb{E}(Y^2)$ 。
4. (15 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为独立同分布的随机变量, 其概率密度函数均为 $p(x)$ 。证明:
- (a) $\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} = X_1) = \frac{1}{n}$ 。
- (b) 随机变量 $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 与 $I\{X_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}\}$ 相互独立。

数值分析 (满分 50 分)

1. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 试构造三次多项式 $H_3(x)$ 满足插值条件:

$$H_3(a) = f(a), \quad H_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad H_3(b) = f(b), \quad H_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

并求余项 $f(x) - H_3(x)$ 的表达式。

2. (10 分) 确定常数 A, B, C 及正数 a , 使得如下求积公式

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx Af(-a) + Bf(0) + Cf(a)$$

具有尽可能高的代数精度, 并判断该公式是否为 Gauss 型求积公式。

3. 求二级二阶隐式 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 = f(t_n, y_n), \\ K_2 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)\right) \end{cases}$$

的绝对稳定区间。

4. (10 分) 设线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

已知其精确解为 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。回答以下问题:

- (a) 计算矩阵 A 基于无穷范数的条件数 $\text{Cond}_\infty(A)$ 。
- (b) 当右端向量 b 有微小扰动 $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时, 方程组变为 $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, 求新的解 $x + \Delta x$ 。
- (c) 计算相对误差 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和 $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 并解释这两个值的差异反映了矩阵 A 的何种性质。
5. (10 分) 设初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

对区间 $[a, b]$ 进行等距划分, 步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 节点为 $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 变形 Euler 方法定义为

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right).$$

- (a) 证明: 该方法具有二阶精度。
- (b) 求出其局部截断误差主项。



南京大学数学学院
2021 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 设 $a_0 \in \mathbb{R}$, 当 $n \geq 0$ 时, $a_{n+1} = \arctan a_n$, 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。

2. 计算定积分

(a) $\int_0^1 x^2 \ln x \, dx$ 。

(b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$ 。

3. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 可微且恒有

$$\|f(x, y) - f(0, 0)\| \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

证明: f 在原点的 Jacobi 矩阵非退化。

4. 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上定义的正值连续函数, 且无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛。

(a) 判断是否必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 并说明理由。

(b) 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)^{1-\frac{1}{x}} \, dx$ 是否收敛并说明理由。

高等代数

1. 设 3 阶正定矩阵 A 的三个特征值为 $6, 3, 3$ 。又 $x = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 6 的特征向量。

(a) 求 A 的属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量。

(b) 求 A 。

2. 设 $\alpha = (1, 2, 3), \beta = (0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$, 求

$$\{\gamma \in \mathbb{R}^3 \mid \exists A \in M_3(\mathbb{R}), \text{ s.t. } |A| = 0, \alpha A = \beta, \beta A = \gamma, \gamma A = \alpha\}.$$

3. 判断多项式

$$f(x) = 2021 + \prod_{i=1}^{2020} (x - i)^2$$

在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约, 并说明理由。(提示: $2021 = 43 \times 47$)

实变函数

1. 证明: 存在闭集 $C \subset (0, 1)$, 使得 C 不含任何有理数且其测度等于 $\frac{1}{2}$ 。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 处处可导, 判断 $f'(x)$ 是否为 Lebesgue 可测函数。

3. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 记

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \arctan y \, dy.$$

证明: $g(x)$ 二阶可导, 且 $g''(x)$ 为有界函数。

4. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上且满足 $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ 。

(a) 若 $f(x)$ 在任何闭区间都可积, 证明: $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$ 。

(b) 当 $f(x)$ 是可测函数时, 上述结论是否成立? 请给出理由。



中国科学技术大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊



中国科学技术大学数学科学学院
2018 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 计算下列各题:

(a) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3(1+x)^5}$.

(b) 设 $z = f(\ln \frac{y}{x}, xy)$, 其中 $f(u, v)$ 具有一阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

(c) 求 $\iint_{\Omega} (y+x^2) d\sigma$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, $R > 0$.

(d) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是 Gauss 公式中的闭区域, 向量场 $f \in C^2(\bar{\Omega})$ 在 Ω 中处处不为零, 且满足

$$\nabla f \cdot \nabla f = 2f, \nabla \cdot (f \nabla f) = f.$$

其中 $\vec{n}$ 为 Ω 的单位外法向量, 求 $\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 证明:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且取正值. 证明:

(a) 存在唯一 $c \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^c f(t) dt = \int_c^1 \frac{1}{f(t)} dt.$$

(b) 对每一个 $n \in \mathbb{N} (n \geq 2)$, 存在唯一 $x_n \in (\frac{1}{n}, 1)$, 使得

$$\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)} dx,$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

4. 证明: 在有限区间 I 上 $f(x)$ 一致连续的充要条件是对每一 I 上的 Cauchy 列 $\{x_n\}, \{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 列.

5. 设 $f(t) = \int_1^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$, 证明:

(a) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(c) $\int_0^\pi f(t) \sin t dt \leq 0$.

(d) $f(t)$ 在 $(0, \pi)$ 上至少有一个零点.

线性代数



1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \{B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AB = BA\}$$

求 $\dim V$.

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $\det A$ 与 A^{-1} .

3. 设 A, B 为 n 阶方阵, 证明: $\text{rank}(AB - I_n) \leq \text{rank}(A - I_n) + \text{rank}(B - I_n)$.

4. 设 $\mathcal{A}$ 为线性空间 V 上的线性变换, 若存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得

$$\text{Im } \mathcal{A}^k = \text{Im } \mathcal{A}^{k+1} = \dots = \text{Im } \mathcal{A}^{k+l} \quad (\forall l \in \mathbb{N}^+)$$

成立, 设 k 为使得 $\text{Im } \mathcal{A}^k = \text{Im } \mathcal{A}^{k+1}$ 成立的最小正整数, 问 k 与 $\mathcal{A}$ 的极小多项式有何关系?

5. 设

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},$$

设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 到 V 上的正交投影变换, 求 $\mathcal{A}$ 在自然基下的矩阵与特征值.

6. 设 A, B 为实对称正定阵, 证明: $\det \left(\frac{A+B}{2} \right) \geq \sqrt{\det A \cdot \det B}$.

实变函数

1. 设 A 是 $\mathbb{R}^p$ 中可测集, B 是 $\mathbb{R}^q$ 中可测集, 证明: $A \times B$ 是 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中可测集, 且有

$$m(A \times B) = mA \cdot mB,$$

其中 m 为 Lebesgue 测度.

2. 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中上的可测函数, 证明: $f(x-y)$ 为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中的可测函数.

3. 设 $f(x)$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的非负可测函数, 证明: 若 $f(x) \in L(E)$, 则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限.

4. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集, $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 证明: 若 $f(x) \in L(E)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在具有紧支集的连续函数 $g_\varepsilon(x)$ 使得

$$\int_E |f(x) - g_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon.$$

$f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, 且 $f'(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处成立, 证明: 则 $f(x)$ 必为常值函数.

复变函数



1. 计算题:

(a) 计算积分

$$\int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$$

(b) 利用留数定理计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

2. 叙述 Schwarz 引理, 并用之证明: 若 $f(z)$ 是 $D = \{z : |z| < 1\}$ 上的全纯函数满足 $f(0) = 0$, 且 $\operatorname{Re} f(z) \leq 1, \forall z \in D$, 则

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}.$$

3. 叙述 Rouché 定理, 并证明方程

$$(z+1)e^{-z} = z+2$$

在右半平面没有根.

4. 叙述亚纯函数的定义, 并证明: 若 $f(z)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 且满足

$$|f(z)| = 1, \forall |z| = 1,$$

则 $f(z)$ 为有理函数.

近世代数

1. 在 $\mathbb{F}_3[x]$ 中将 $x^3 + x + 2$ 表示成不可约的首一多项式的乘积, 其中 $\mathbb{F}_3$ 是仅有 3 个元素的有限域.

2. (a) 设 A, B, C 是群 G 的子群, 且 $A \subset B \cup C$. 证明: $A \subset B$ 或 $A \subset C$.

(b) 设 A, B 是群 G 的子群, 证明: $A \cup B$ 是 G 的子群 $\iff A \subset B$ 或 $B \subset A$.

(c) 证明: 任何一个群不能表示为两个真子群的并, 并举一个可以表示为 3 个真子群的并群的例子.

3. 给出群 G 中的正规子群的定义, 并证明群 G 中指数为 2 的子群一定正规, 最后举一个指数为 3 但不是正规子群的例子.

4. 设 p 是一个素数, n 是一个正整数, $\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 是有限域 $\mathbb{F}_p$ 上 n 阶可逆矩阵构成的一般线性群.

(a) 求群 $\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 的阶数.

(b) 找出 $\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 的一个 Sylow p -子群.



中国科学技术大学数学科学学院
2019 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 请写出一个具体的定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数 $f(x, y)$, 使得下式左右两边都有意义, 但是却不相等.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) dy.$$

能否找到一个二元连续函数 $f(x, y)$ 满足如上要求? 并说明理由.

2. 设某函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n (n > 1)$ 有一阶连续偏导数, 而且存在 $C > 0$, 对于 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|.$$

证明: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, f 在 x 点的 Jacobi 矩阵 $Df(x)$ 可逆.

3. 设有二阶连续可导的函数 $f(x, y)$ 满足

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

而且

$$f(1, 1) = f(1, -1) = f(-2, 0),$$

证明:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2019, \quad \forall x^2 + y^2 \leq 1.$$

4. 设函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛, 且对于任何 $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 收敛. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上是否一致收敛, 请给出理由.

线性代数 (满分 80 分)

1. 二次曲面在直角坐标系下的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 2z - 1 = 0,$$

利用正交变换和平移将其化为标准方程, 并判断这是什么类型的曲面.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, 考虑复线性映射 $\varphi: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $X \mapsto AX - XA$. 试计算 φ 的特征多项式以及特征向量, 并判断 φ 是否可对角化.

3. 考虑 $\mathbb{R}^4$ 中的向量组

$$S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 1, 1), \alpha_3 = (2, 1, 1, 0), \alpha_4 = (3, 3, 2, 1), \alpha_5 = (1, -1, 1, 1)\}.$$

计算 S 中包含向量 α_2 的所有极大线性无关组.

4. 设 n 阶复方阵 A, B 乘法可交换. 证明: 存在可逆复方阵 P , 使得 PAP^{-1} 和 PBP^{-1} 同时为上三角阵.



实变函数 (满分 40 分)

1. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的可测函数列, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, a.e. 若 $1 \leq q < p < \infty$, 并且 $\|f_n(x)\|_{L^p}$ 是有界的. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^q dx = 0$$

2. 设 $E \subset \mathbb{R}$, $m^*E > 0$, 其中 m^* 是 Lebesgue 外测度. 证明: $\forall \alpha \in (0, 1)$, 存在开区间 $I \subset \mathbb{R}$, 使得

$$m^*(I \cap E) \geq \alpha m^*I.$$

复变函数 (满分 40 分)

1. 判断方程 $z^4 - 8z - 10 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 3$ 内根的个数并说明理由.

2. 设 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

$$f \in H(D) \cap C(\overline{D}), |f(z)| = 1, \forall z \in \partial D.$$

证明: $f(z)$ 可解析延拓为有理函数.

微分几何 (满分 40 分)

1. 设区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(D)$, 考虑三维欧式空间 $\mathbb{E}^3$ 中的曲面

$$S : (x_1, x_2, f(x_1, x_2)), (x_1, x_2) \in D.$$

(a) 求曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式.

(b) 称平均曲率为零的曲面为极小曲面. 证明: 若 f 满足方程

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_i}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0,$$

则曲面 S 为极小曲面.

2. (a) 二维平面与三维单位闭球是否等距同构? 并说明理由.

(b) 测地线是否为最短线? 并说明理由.

近世代数 (满分 40 分)

1. 设 S_4 中 $(1, 2)(3, 4)$ 所在的共轭类为 C , 求 C 中所有元素在共轭作用下的稳定子群.

2. 设 $\mathbb{F}^2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. 问: $\mathbb{F}^2/(t^2)$, $\mathbb{F}^2/(t^2 + t + \overline{1})$, $\mathbb{F}^2/(t^2 + \overline{1})$ 三者之间是否存在环同构? 请说明理由.



中国科学技术大学数学科学学院
2021 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 判断开区间 $(0, 1)$ 上的有界凸函数是否在 $(0, 1)$ 上一致连续. (若问题正确, 请给予严格证明; 否则, 请给出反例.)

2. 设

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n! \pi x) \text{ 收敛} \right\}.$$

证明: Ω 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 而且 $\Omega \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

3. 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 并且 f' 在 $[0, 1]$ 上恒不为 1, 若 $f(0) = f(1) > 1$ 且

$$f(1) + \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} - nf(1).$$

4. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$$F(t) = \int_0^t \left[\int_0^t f(xy) dx \right] dy.$$

证明: $tF''(t) + F'(t) - 4tf(t^2)$ 恒为常数.

线性代数 (满分 80 分)

1. 设给定二次曲面在直角坐标系下的方程为 $xy + xz - yz + 2x - z + 1 = 0$. 请利用正交变换以及平移将其化为标准方程, 并判断这是什么类型的曲面.

2. 设 $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 试证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})}$ 存在, 并且计算该极限值. 这里 tr 表示矩阵的迹.

3. 设 $M_2(\mathbb{R})$ 为全体 2×2 实方阵的实线性空间. 对于任意 $A \in M_2(\mathbb{R})$, 定义线性函数

$$\varphi_A: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto \text{tr}(AX).$$

设 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, 若 $\varphi_A = \varphi_B$, 证明: $A = B$.

4. 设 X, Y 为两个 n 阶正定对称实方阵, 证明: $\det(X + Y) > \det(X)$.

实变函数 (满分 40 分)

1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + |x|} f(x - n) dx$.

2. 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. 证明:

(a) 积分 $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t) dt$ 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$ 存在, 且 $h \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.



复变函数 (满分 40 分)

1. 用留数法计算积分

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta.$$

2. 设
- $f(z)$
- 是整函数, 满足: 只要
- $|z_n| \rightarrow \infty$
- 就有
- $|f(z_n)| \rightarrow \infty$
- . 证明:
- $f(z)$
- 是多项式.

微分几何 (满分 40 分)

1. 将欧式空间
- $\mathbb{E}^3$
- 中
- xz
- 平面上的圆圈

$$S_r(a) = \{(x, y, z) \mid (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$$

绕 z -轴旋转一周生成环面, 记为 $\mathbb{T}_{a,r}$, 其中 $a > r > 0$.

- (a) 请写出 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的参数表示, 并计算 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的第一、第二基本形式.
- (b) 计算 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的面积和高斯曲率, 并找出 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的椭圆点和双曲点的区域.
- (c) 计算点 $(a, 0, r)$ 绕 z -轴生成的圆在 $\mathbb{T}_{a,r}$ 上的测地曲率, 并判断其是否为测地线.
2. 请判断如下结论是否正确, 并说明理由.

- (a) 设 $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ 是 $\mathbb{E}^3$ 中曲面 Σ_1, Σ_2 间的光滑映射, 且在对应点处具有相同的高斯曲率, 即

$$K_{\sigma_1}(p) = K_{\sigma_2}(f(p)), \quad \forall p \in \Sigma_1,$$

则 Σ_1 与 Σ_2 局部等距.

- (b) 设 Σ 是 $\mathbb{E}^3$ 中具有正高斯曲率的紧致连通曲面, γ_1, γ_2 为 Σ 上两条简单闭测地线, 则 γ_1, γ_2 会相交.

近世代数 (满分 40 分)

1. 考虑交错群
- A_4
- , 以及元素
- (123)
- 所在的共轭类
- C
- . 考虑
- A_4
- 在
- C
- 上的共轭作用

$$A_4 \times C \rightarrow C, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}.$$

$x \in C$ 的稳定化子定义为

$$\text{Stab}(x) = \{g \in A_4 \mid g \cdot x = x\}.$$

试具体计算 (123) 的稳定化子, 并列出 C 中的所有元素.

2. 考虑三元域 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, 以及一元多项式环 $\mathbb{F}_3[t]$, 其中 t 为变元, 考虑商环 $K = \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1)$. 问: K 是否为整环? 请具体列出 K 的所有含单位元的子环.



中国科学技术大学数学科学学院
2022 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

- (20 分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的可微函数, 满足对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $0 < f(x) < 1$ 且 $f'(x) \neq 1$. 证明: 存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.
- (20 分) 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$.
- (20 分) 记圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 被平面 $z = a$ 和 $z = b$ ($0 < a < b$) 所夹的部分为 Σ , 假设 Σ 具有均匀密度 1. 求 Σ 对原点处单位质点的引力沿 z 轴方向的分量.
- (20 分) 若 $\mathbb{R}^2$ 上定义的二元函数 $f(x, y)$ 分别是单变量 x 及 y 的连续函数.
 - 判断 $f(x, y)$ 是否为二元连续函数, 证明或举出反例说明结论.
 - 若进一步假设对任意固定的 x , $f(x, y)$ 是 y 的单调函数, 证明: $f(x, y)$ 是二元连续函数.

线性代数 (满分 80 分)

- (20 分) 设二次曲面 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xz = 0\}$. 求 S 中包含的线性子空间的最大维数, 并给出一个达到该维数的子空间.
- (20 分) 设 $\mathfrak{sl}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ 为迹零矩阵构成的线性空间, 定义对称双线性型

$$Q: \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(AB).$$

求 Q 的正惯性指数与负惯性指数.

- (20 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 满足对任意多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 矩阵 $I_n - f(A)A$ 均可逆. 证明: A 是幂零矩阵.
- (20 分) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 若对任意复数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及正整数 m , 矩阵 $(\lambda I_n - A)^m$ 与 $(\lambda I_n - B)^m$ 的秩相等. 证明: A 与 B 在 $\mathbb{R}$ 上相似.

实变函数 (满分 40 分)

- (10 分) 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在任意区间上绝对连续, 证明: f 将任意 Lebesgue 零测集映射为 Lebesgue 零测集.
- (10 分) 证明: 若点集 $A \subset [0, 1]$ 满足 $m^*(A) + m^*([0, 1] \setminus A) = 1$, 则 A 可测. 其中 m^* 表示 Lebesgue 外测度.
- (20 分) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 且存在 $r > 0$ 及常数 M 使得对任意 k , 有 $\int_a^b |f_n(x)|^r dx \leq M$.
 - 证明: 对任意 $0 < p < r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0$.
 - 若将区间 $[a, b]$ 改为 $\mathbb{R}$, 判断上述结论是否仍成立.



复变函数 (满分 40 分)

- (15 分) 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$ 的收敛域为右半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, 且对任意 $\varepsilon > 0$, 该级数在区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}$ 上一致收敛.
- (15 分) 利用留数定理计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$.
- (10 分) 证明或否定: 对每个正整数 n , 存在整函数 $f_n(z)$, 使得

$$\max_{1 \leq |z| \leq 2} |\operatorname{Re} f_n(z) - \ln |z|| < \frac{1}{n}.$$

微分几何 (满分 40 分)

- (10 分) 设 S 为正则光滑曲面, P 为其上一点. 记 $k_n(\theta)$ 为点 P 处沿方向 θ (这里 $\theta \in [0, 2\pi)$ 为与主方向的夹角) 的法曲率, 并记 H 为曲面 S 在点 P 处的平均曲率. 假定 $H \neq 0$. 试计算

$$\frac{1}{H} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta.$$

- (15 分) 设 S 为正则光滑曲面, 在测地平行坐标系 (u, v) 下曲面 S 的第一基本形式为 $I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2$.
 - 计算 Christoffel 符号 Γ_{jk}^i , 并写出测地线方程.
 - 计算高斯曲率 $K(u, v)$.

- (15 分) 记 $\mathbb{S}^2$ 为三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点的单位球面.
 - 判断 $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ 上是否存在光滑单位切向量场.
 - 判断 $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ 上是否存在沿所有光滑曲线均平行的非零光滑切向量场.

近世代数 (满分 40 分)

- (15 分) 设 $A = \langle a \rangle$ 为 m 阶循环群, $B = \langle b \rangle$ 为 n 阶循环群.
 - 证明: 所有群同态 $f: A \rightarrow B$ 均可由自然数 k 唯一确定, 满足 $f(a) = b^k$. 进一步, 请描述由固定 k 所决定的同态性质.
 - 证明: 自然数 k 可定义上述同态当且仅当 $n \mid km$.
- (10 分) 设 R 为主理想整环, p 为 R 的素元. 证明: 商环 $R/(p)$ 是一个域.
- (15 分) 设 R 是一个么环, 满足对任意 $a \in R$ 有 $a^2 = a$ (这样的环称作布尔环).
 - 证明: R 的特征为 2.
 - 证明: R 是交换环.
 - 对任意 $a \in R$, 证明环同构 $R \cong (a) \times (1 - a)$.
 - 举例说明存在非整环的布尔环.
 - 证明: R 的每个有限生成理想均为主理想.



中国科学技术大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 已知函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

求偏导数 f_x, f_y .

2. 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $(0, 1)$ 上的收敛性和一致收敛性.

3. 利用二重积分计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i^2 + j^2}$.

4. (a) 设函数 $f \in C^1[a, b]$, 且 $f(a) = 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

(b) 若函数 $f \in C^1(D)$, 其中 $D = [a, b] \times [c, d]$, 且 $f(x, c) = 0$, 证明:

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq \frac{(c-d)^2}{2} \iint_D (f_y(x, y))^2 dx dy.$$

5. (a) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单位圆盘, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x, y) = 0$. 证明:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x f_x + y f_y}{x^2 + y^2} dx dy = f(0, 0),$$

其中 $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0))$.

(b) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通区域, 且原点 $(0, 0) \in D$. 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x, y) = 0$. 计算

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{x f_x + y f_y}{x^2 + y^2} dx dy,$$

其中 $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0))$.

线性代数 (满分 80 分)

1. 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵.

2. 证明: n 阶矩阵 A 是幂零矩阵的充要条件是 $\text{tr}(A^k) = 0$ ($1 \leq k \leq n$).

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个幂零矩阵, 定义矩阵 $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. 证明: $\exp(A)$ 是可逆矩阵, 且 $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.



4. 设 V 为有限维线性空间, $\Phi: V \rightarrow V$ 是幂零线性变换. 证明: 存在唯一的线性子空间链

$$\{0\} = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k = V,$$

满足以下条件:

- (a) $\Phi(W_i) \subset W_{i+2}$ 对所有 $-1 \leq i \leq k-2$ 成立.
 (b) $W_{i+1}/W_i \cong W_{k-i}/W_{k-i-1}$ 对所有 $0 \leq i \leq k-1$ 成立.

实变函数 (满分 40 分)

1. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Borel/Lebesgue 可测函数, 讨论复合函数 $g \circ f$ 的可测性.
 2. 设 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} n t^{-(n+1)} f(t) dt = f(1).$$

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 中收敛, 证明其存在几乎处处收敛的子列.

复变函数 (满分 40 分)

1. 设整函数 $f(z)$ 满足 $\int_{\mathbb{C}} |f(z)| dA(z) < +\infty$ ($dA(z)$ 为复平面面积测度), 证明: $f(z) \equiv 0$.
 2. 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上的全纯函数, 且满足当 $|z| \rightarrow 1^-$ 时, $|f(z)| \rightarrow 1$. 证明: 存在有限个复数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ 和实数 $t \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(z) = e^{it} \prod_{i=1}^n \left(\frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z} \right)^{n_i},$$

其中 $n_i \in \mathbb{N}^+$.

3. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为有界闭区域, 全纯映射 $f: D \rightarrow D$ 存在不动点 $z_0 \in D$. 证明: $|f'(z_0)| \leq 1$.

微分几何 (满分 40 分)

1. 设球面方程为 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, 其上任取一条大圆 (即球面的测地线).
 (a) 求此大圆作为空间曲线的曲率和挠率.
 (b) 求球面 S^2 的 Gauss 曲率.
 (c) 求此大圆在球面上的测地曲率.
 2. 设曲面 S 的方程为 $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$, 其中 $f(u, v)$ 为光滑函数.
 (a) 计算曲面的第一基本形式 I 和第二基本形式 II.
 (b) 当 $f(u, v) = \ln \cos u - \ln \sin v$ 时, 求曲面的平均曲率 H .
 3. 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是紧致, 无边, 可定向的曲面.
 (a) 若 S 上存在处处非零的光滑切向量场, 构造 S 上的整体正交活动标架.



(b) 说明球面 $\mathbb{S}^2$ 是否存在处处非零的光滑切向量场, 并给出理由.

近世代数 (满分 40 分)

1. 求 Abel 群 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24}$ 的不变因子和初等因子.

2. 设 H 和 K 是群 G 的正规子群, 且 $HK = G$. 证明:

$$G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

3. 证明: 有限含么交换环的素理想必是极大理想.

4. 设 $f(x, y) \in K[x, y]$ 是不可约多项式.

(a) 证明: $f(x, y)$ 在 $K(y)[x]$ 中要么是不可约元, 要么是单位.

(b) 已知 $g(x, y) \in K[x, y]$ 且 $f(x, y) \nmid g(x, y)$, 证明: 方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

在 K 上只有有限个解.



中国科学技术大学数学科学学院
2026 年夏令营招生考试试题（回忆版）

上午 (8:30—11:30)

数学分析 (80 分)

1. (20 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > a_0 > 0$, 且

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}}.$$

求证: $\{a_n\}$ 收敛, 且极限为正。

2. (20 分) 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 有非负的三阶导数, 满足方程

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) - 1.$$

求所有满足条件的 $f(x)$ 。

3. (20 分) 计算积分

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy.$$

4. (10 分) 定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的函数 $f(x, y)$ 连续可微, 且在边界上恒为 0, 求证:

$$\left| \iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \frac{1}{6} \max_{[0,1] \times [0,1]} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

5. (10 分) 定义在 $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 的函数 f 二阶连续可微, 满足 $f(0, 0) = 0$, $\Delta f = x + x^2 + y^2$, 计算积分

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

线性代数与解析几何 (80 分)

1. (20 分) 曲线

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 0, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

在变换 $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + 2z, z + 3x)$ 下变换为椭圆, 求该椭圆的中心、法向量与面积。

2. (20 分) 分块方阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 满足 $B^T D$ 为对称矩阵, 求证:

$$\det M = \det(A^T D - C^T B).$$

3. (20 分) 记 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求方阵

$$M = \begin{pmatrix} B & B & O \\ O & B & B \\ O & O & B \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形。



4. (20 分) 设 $V = \mathfrak{sl}_3 := \{A \in M_3(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} A = 0\}$, V 上的线性变换 $\mathcal{P}(X) = P^{-1}XP$, 求 $\mathcal{P}$ 的特征多项式, 这里

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

下午 (14:30—17:30)

实分析 (40 分)

1. (10 分) 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, g 是 $\mathbb{R}$ 上有界可测函数, 定义

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) \, dy,$$

求证: $f * g$ 有界且一致连续。

2. (15 分) 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上绝对连续函数。求证:

- f 把零测集映为零测集;
- f 把可测集映为可测集。

3. (15 分) 设 E_1, E_2 为 $\mathbb{R}^2$ 上正测度集。求证: 存在 $h \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

复分析 (40 分)

1. (10 分) 设 D 为 $\mathbb{C}$ 上边界光滑的区域, f 为 D 上全纯函数, 连续延拓到 ∂D 。证明:

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z) - \bar{z}| \geq \frac{2 \operatorname{Area}(D)}{\operatorname{Length}(\partial D)}.$$

2. (15 分) 设 $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, Δ 为 $\mathbb{C}$ 上单位圆盘。证明 $f(z)$ 为单射, 并求值域。

3. (15 分) 设整函数 $f(z)$ 满足条件

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^{2029}} \, dA(z) < \infty.$$

这里 $dA(z)$ 为面积元。证明: $f(z)$ 是次数不超过 2026 的多项式。

近世代数 (40 分)

1. (10 分) 分类所有 360 阶有限 Abel 群。

2. (10 分) 设 u 是方程 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的一根。

- 证明: $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$;
- 将 $(1+u)^{-1}$ 表示为 $\{1, u, u^2\}$ 的 $\mathbb{Q}$ -线性组合。



3. (10 分) 设 R 为含么交换环, P 为其素理想。理想 $I_1, I_2, \dots, I_n$ 满足

$$\bigcap_{i=1}^n I_i = P.$$

证明: 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得 $I_i = P$ 。

4. (10 分) 设 $C(G)$ 为 G 的中心, 即与 G 中任意元素均交换元素构成的子群。证明: 若 $G/C(G)$ 为循环群, 则 $G = C(G)$ 。

微分几何 (40 分)

1. (15 分) 设 $\mathbf{r}(s)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中以 s 为弧长参数的光滑曲线, $s \in I$, 其曲率满足 $0 \leq \kappa(s) \leq \kappa_0$, 这里 κ_0 是一个常数。设其 Frenet 标架为 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 。取足够小的 ρ ($0 \leq \rho \leq 1/\kappa_0$), 考虑管形曲面

$$\mathbf{r}(s, v) = \mathbf{r}(s) + \rho(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}), \quad s \in I, v \in [0, 2\pi].$$

- 若 $\mathbf{r}(s)$ 的长度为 ℓ , 求管形曲面的面积;
- 证明 $\mathbf{r}_s$ 是一个主方向, 求其主曲率。进一步, 证明 $\mathbf{r}(s, v)$ 是一个 Weingarten 型曲面, 即存在不全为零的实数 a, b, c 使得 $aH + bK = c$ 。

2. (10 分) 设单位球面 $\mathbb{S}^2$ 的一个标准参数表示为

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

- 选取参数 $u = \ln \tan \frac{\theta}{2}$, $v = \varphi$, 用新参数给出曲面的参数表示 $\mathbf{r}(u, v)$, 并证明其与平面 $\mathbb{R}^2$ 局部共形;
- 称 $\mathbb{S}^2$ 上的曲线 $\Gamma: \mathbf{r}(s)$ 为斜航线, 若其与经度 φ 固定的参数曲线所成角始终相同。设 C_1, C_2, C_3 是不过南北极点的三条斜航线, 两两相交成一个三角形, 求该三角形的内角和。

3. (15 分) 设 $\mathbf{r}(s)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个简单光滑闭曲线, 称其主法向量 $\mathbf{n}(s)$ 在单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上绘成的曲线为曲线的主法标线。

- 求主法标线在单位球面上的测地曲率 $\bar{k}_g$;
- 用 Gauss-Bonnet 定理证明: 该主法标线把单位球面分为面积相同的两半。



南开大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙



南开大学
夏令营试题

1. 什么是假设检验?
2. 数学分析中最重要的定理是什么?
3. 请解释什么是有限覆盖定理?



中国科学院数学与系统科学研究院夏令营 试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙



中国科学院数学与系统科学研究院

2018 年夏令营招生考试试题

注: 本试卷满分 100 分, 考试时间 120 分钟

1. (15 分) 设 Ω_n 是含有 n 个元素的集合, $\{A_1, \dots, A_r\}$ 称为 Ω_n 的一个覆盖, 如果 $\bigcup_{i=1}^r A_i = \Omega_n$, $A_i \subset \Omega_n$ 非空, $A_i \neq A_j$, $r = 1, 2, \dots$. 记 C_n 为 Ω_n 的不同覆盖的个数. 例如 $C_1 = 1$, $C_2 = 5$, 求 C_3 .

2. (10 分) 通过研究极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ 证明 e 是无理数.

3. (15 分) 设 P 为区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 到 $[0, 1]$ 的单调递增连续可微函数 $p(\theta)$ 全体构成的集合, 且 $p(0) = 0$, $p(\frac{\pi}{2}) = 1$. 定义

$$I(p(\theta)) = \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{p(\theta)} \right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{1-p(\theta)} \right)^2.$$

- (1) 求解极值问题 $\inf_{p(\cdot) \in P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(p(\theta)) d\theta$.

- (1) 若 $I(p(\theta))$ 与 θ 无关, 求 $p(\theta)$.

4. (15 分) 请问以下函数是否是超越函数 (说明理由)? [注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 a_{ij} , ($i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$), 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$.]

- (1) 多项式.

- (1) 三角函数 $\sin x$.

5. (15 分) 设 $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 均为 $n \times n$ 复矩阵, A^* 表示 A 的共轭转置.

- (1) 讨论等式 $AB = AC$ 与 $A^*AB = A^*AC$ 的关系.

- (1) 讨论等式 $A^2B = A$ 与 $B^2A = B$ 的关系.

- (1) 讨论等式 $A^2B = BA^2$ 与 $AB = BA$ 的关系, 其中 A 为正定矩阵.

6. (15 分) 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 为任意 $n \times n$ 复矩阵, 满足 $AA^* = A^*A$. 是否一定存在多项式 f 使得 $A^* = f(A)$? 说明理由.

7. (15 分) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}$ 为 n 阶正定矩阵, 定义哈达玛乘积 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$. 判断以下论断的对错, 并给出理由.

- (1) $A \circ B$ 为正定矩阵.

- (1) $A \circ A^{-1} \succeq I$.

- (1) $A^{\frac{1}{2}} \circ B^{\frac{1}{2}} \preceq I$, 此处正定矩阵 A, B 对角线上的元素均为 1.



中国科学院数学与系统科学研究院

2019 年夏令营招生考试试题

注：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分) 集合 $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个分划是指一族非空集合 $\{B_i\}$, 满足 $\bigcup B_i = \Omega_n$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ (空集), $j \neq k$, $\{\Omega_n\}$ 也算 Ω_n 的一个分划。记 T_n 为 Ω_n 的分划个数, 例如 $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5, \dots$ 。
求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{T_n n!}$ 。

2. (5 分) 设 $0 < a_k < \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, $k = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 。刻画数列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 的子序列和 (即 $\sum_{n \in S} a_n$ 的子级数) 构成的集合。

3. (10 分) 设 f 为 $[0, 2\pi]$ 上连续可微函数, $f(0) = f(2\pi)$, 且 $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ 。探讨 $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ 与 $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ 的关系, 并解函数方程

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

4. (15 分) 设 $0 < a < b < +\infty$ 为实数, $K_{a,b}$ 为区间 $[a, b]$ 上满足 $\int_a^b f(t) dt = 1$, 且 $af(a) = bf(b)$ 的非负单调递减函数全体。求

$$\sup_{f, g \in K_{a,b}} \int_a^b \max\{f(t), g(t)\} dt.$$

5. (10 分) 设 A 为方阵, $\text{tr}(A)$ 为迹 (A 的对角元之和)。讨论以下两个条件之间的关系:

(1) 存在正整数 k 使得 $A^k = O$ 。

(1) 对任何正整数 k 都有 $\text{tr}(A^k) = 0$ 。

6. (5 分) 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{2019}$ 。

7. (10 分) 设 A 为复数域上 n 阶矩阵, 非零列向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 满足 $Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ 。设 $y \in \mathbb{C}^n$ 。讨论矩阵 A 的特征值与矩阵 $A + xy^\top$ 的特征值之间的关系。

8. (10 分) 设 V, W 都是有限维线性空间, V^* 为 V 的对偶空间, $\mathcal{L}(V^*, W)$ 是从 V^* 到 W 的线性映照全体, $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 是从 $V \times W$ 到复数域 $\mathbb{C}$ 的双线性映照全体。讨论 $\mathcal{L}(V^*, W)$ 与 $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 之间的关系。

9. (10 分) 设 n 为正整数, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, 分别求以下级数之和:

$$(1) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2.$$

$$(1) \sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k}.$$



中国科学院数学与系统科学研究院

2023 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (10 分)

(1) 已知 $f'(a)$ 存在, $f(a) \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$.(1) 求不定积分 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.2. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且严格单调增加, 求证

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二次连续可微, 并且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明不等式

$$M^2 \leq \frac{(b-a)^3}{2} \int_a^b |f''(x)|^2 dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.4. (10 分) 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 AB 和 BA 均为实对称矩阵. 求证: AB 和 BA 相似.5. (10 分) 设 x, y 都是复数域上 n 阶方阵, 定义 $x^{(0)} = x$, $x^{(1)} = [x, y] = xy - yx$, $x^{(j)} = [x^{(j-1)}, y]$. 证明:

$$\sum_{i=0}^k y^i x y^{k-i} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j+1} y^{k-j} x^{(j)}.$$

6. (20 分) 定义 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Delta r = \partial_x^2 r + \partial_y^2 r + \partial_z^2 r$.

(1) (10 分) 证明如下两个等式成立:

$$\Delta r = \frac{2}{r}, \quad \frac{1}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \nabla r.$$

注: 这里的 $\cdot$ 表示两个向量做内积.(1) (10 分) 假设 u 是一个在无穷远处为零的一次连续可微函数, 且使得积分 $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz$ 和 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz$ 存在. 证明如下不等式成立

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz.$$

注: $|\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla u$.7. (20 分) 证明 $\cos x$ 是超越函数. [注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 a_{ij} , ($i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$), 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$.]



中国科学院数学与系统科学研究院

2024 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分)

(1) 设数列 $a_n > 0$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_n}}{n} \right)^n.$$

(1) 对 $\alpha \geq 2$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t^\alpha} dt - \sin x}{\sin x - x}.$$

2. (20 分)

(1) 设 n 为正整数, 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta$.(1) 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.3. (15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导函数, $f(0) = f(1) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \neq 0$ 。
证明:

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

4. (10 分) 设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ 为实数域上 n 阶方阵, $(AB)^7 = C$, $|C| \neq 0$ 且 $[A, C] = O$ 或 $[B, C] = O$, 求 $(BA)^{14}$ 与 C 的关系, 其中 $[X, Y] := XY - YX$.5. (20 分) 令 x, y, z 表示三维空间中的点。设定义在三维空间中的开区域 D 上的函数 $u(x)$ 二阶连续可导, 且满足调和条件 $\Delta u = 0$ 。对任意的 $x \in D$, 定义如下关于半径 r 的函数

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y).$$

其中, $B(x, r)$ 表示以 x 为球心, r 为半径的球。 $\partial B(x, r)$ 表示这个球的外表面。这里 r 充分小使得 $B(x, r) \subseteq D$.(1) 证明: $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$.(1) 证明: $u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y)$.(1) 证明: $u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{B(x, r)} u(y) dy$.

6. (20 分) 证明如下两个结论:

(1) 设 f 是 n 维欧氏空间 V 上的一个正交变换, 证明: f 的不变子空间的正交补也是 f 的不变子空间。(1) 令 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ 。若 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, 则有 $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.



中国人民大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙



中国人民大学统计学院
2022 年夏令营招生考试试题（统计学）

1. 计算定积分 $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.
2. 设数列 a_n 满足条件 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 的收敛性.
3. 设矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有三个不同的特征值, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbf{A}$ 的列向量且满足 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.
 - (1) 证明: $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$.
 - (1) 已知向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3$, 求解线性方程组 $\mathbf{A}x = \beta$.
4. 现有两枚硬币, 硬币 A 正面和反面出现的概率均为 $\frac{1}{2}$, 硬币 B 正面和反面出现的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$. 随机选择一枚硬币进行抛掷, 若前三次结果均为正面, 求第四次抛掷出现正面的概率.
5. 有 m 种不同的卡片, 每次抽到第 i 种卡片的概率为 p_i , 且满足 $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. 现有放回地抽取 n 次, 定义随机变量 X 为抽到的不同卡片种类数, 求 $\mathbb{E}(X)$.
6. 设总体 X 服从均匀分布 $U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$, 令 $X_1, \dots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单样本.
 - (1) 证明: 均值 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 均为 θ 的无偏估计.
 - (1) 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的方差, 并说明哪一个更有效.



中国人民大学统计学院
2022 年夏令营招生考试试题（应用统计）

1. 计算积分 $\int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$.
2. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中积分区域 D 由直线 $x = -2$, $y = 2$, $y = 0$ 和半圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ($x < 0$) 共同围成.
3. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & a \end{pmatrix}$ 有一个特征值为 10.
 - (1) 求参数 a 的值.
 - (1) 求 $\mathbf{A}$ 的全部特征值.
 - (1) 求正交矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ 为对角矩阵.
4. 现有两枚硬币, 硬币 A 正面和反面出现的概率均为 $\frac{1}{2}$, 硬币 B 正面和反面出现的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$. 随机选择一枚硬币进行抛掷, 若前三次结果均为正面, 求第四次抛掷出现正面的概率.
5. 有 m 种不同的卡片, 每次抽到第 i 种卡片的概率为 p_i , 且满足 $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. 现有放回地抽取 n 次, 定义随机变量 X 为抽到的不同卡片种类数, 求 $\mathbb{E}(X)$.
6. 设总体 X 服从均匀分布 $U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$, 令 $X_1, \dots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单样本.
 - (1) 证明: 均值 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 均为 θ 的无偏估计.
 - (1) 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的方差, 并说明哪一个更有效.



中国人民大学统计学院
2023 年夏令营招生考试试题（应用统计）

注：考试时间 120 分钟。

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$ ，其中 n 是给定的正整数。

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的和函数。

3. 已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -a & 1 & -a \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量。

(1) 当 $a = 0.6$ 时，判断是否存在随机向量 (X, Y, Z) 使其协方差矩阵恰好为 $\mathbf{A}$ 。

4. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 结构如下

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ x_{100} & x_{99} & x_{98} & \cdots & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

项目的收益 $Y = |\mathbf{A}|$ ，随机变量 X_i ($i = 1, 2, \dots, 100$) 独立同分布于标准正态分布 $N(0, 1)$ 。现需确定储备资金 M 的最小值，使得项目不破产的概率满足 $\mathbb{P}(Y + M \geq 0) \geq 0.95$ ，求满足上述条件的 M 的最小值（标准正态分布的 0.95 分位数取 1.645）。

5. 在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人带了一件礼物，且假定各人带的礼物都不相同。晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件，试求抽中自己礼品的人数 X 的均值和方差。

6. 设某场景中有两种型号的电池，其使用时长分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布。随机选取电池时，选中型号 1 的概率为 p_1 ，选中型号 2 的概率为 p_2 （满足 $p_1 + p_2 = 1$ ）。已知在时刻 t 电池仍能正常工作，求该电池后续能继续使用至少 s 小时的条件概率。

7. 设随机变量 X 服从对数正态分布，即其对数变换 $Z = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

(1) 计算均值 $\mathbb{E}(X)$ 。

(1) 已知 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是从该对数正态分布中抽取的独立同分布样本，求 μ 和 σ^2 的最大似然估计。

(1) 当 $n = 20$ 时，给定具体样本值

52	24	15	67	15	22	63	26	16	32
7	33	28	14	7	29	10	6	59	30

求均值 $\mathbb{E}(X)$ 的最大似然估计。



中国人民大学统计与大数据研究院
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)

1. (1) 证明: $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = 2 \int_a^b f(x) \left(\int_a^x f(t)dt\right) dx.$

(1) 判断 $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的连续性和一致连续性.

(1) 判断下列命题的正确性, 并给出证明或反例.

i. 若方阵 A 满足 $A^2 = O$, 则 $A = O$.

i. 若矩阵 A, B, C 满足 $AB = AC$, $A \neq O$, 则 $B = C$.

2. 设 $\Phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数和密度函数. 证明下列命题:

(1) $\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0.$

(1) 当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq 1 - \Phi(x) \leq \varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right).$

3. f 为正定二次函数 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$, $\mathbf{d}^k$ 为下降方向, $\mathbf{x}^k$ 为当前迭代点.

(1) 试求出精确线搜索步长 $\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k).$

(1) 证明: 最速下降法的步长 $\alpha_k = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|^2}{\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{A} \nabla f(\mathbf{x}^k)}.$

4. 设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1, p_1)$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1, p_2)$, 其中 $B(1, p)$ 表示 0-1 二项分布. 定义统计量

$$n_1 = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 1\}, \quad n_0 = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 0\}, \quad m_1 = \sum_{j=1}^m \mathbb{I}\{Y_j = 1\}, \quad m_0 = \sum_{j=1}^m \mathbb{I}\{Y_j = 0\}.$$

(1) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2),$$

其中 $\sigma^2 > 0$ 和 μ 均为有限数. $g(x)$ 的一阶导函数 $g'(x)$ 在 $x = \mu$ 处连续且非零, 证明:

$$\sqrt{n}[g(X_n) - g(\mu)] \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2).$$

(1) 针对以下两个参数, 构造其点估计并给出统计量的极限分布.

$$OR = \ln\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right) - \ln\left(\frac{p_2}{1-p_2}\right), \quad RR = \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

(1) 基于 (2) 中结果求 OR 和 RR 的置信水平为 95% 的置信区间.



中国人民大学统计与大数据研究院
2024 年夏令营招生考试试题（统计学）

注：考试时间 120 分钟。

1. (1) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 2025} - \sqrt{x^2 + x + 2024} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

(1) 计算二重积分 $\iint_{|x|+|y|\leq 2} f(x, y) dx dy$, 其中函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}.$$

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 证明:

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du \right) dt.$$

(1) 证明: 行满秩矩阵具有右消去律, 即若矩阵 A 行满秩且 $AC = C$, 则 $A = I$ 。

2. 考虑线性混合模型

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \alpha_j \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\alpha^2), \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

其中所有 α_j 与 ε_{ij} 相互独立, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ 。

(1) 给出 $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})^\top$ 的分布。

(1) 若 σ_ε^2 已知, 求 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \beta)^\top$ 的最大似然估计。

(1) 若 σ_ε^2 未知, 写出给定 $\mathbf{y}_j$ 时 α_j 的条件分布, 并求 $\mathbb{E}(\alpha_j | \mathbf{y}_j)$ 和 $\text{Var}(\alpha_j | \mathbf{y}_j)$ 。

(1) 若 σ_ε^2 未知, 设计算法估计 β 和 σ_ε^2 的值。

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单样本, 定义统计量

$$Y_k = \frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

另设 $U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \dots \leq U_{(n)}$ 是来自均匀分布 $U(0, 1)$ 总体的次序统计量。

(1) 证明: $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{k}{n}$ 。

(1) 设总体分布为指数分布 $\text{Exp}(1)$, 判断 $U_{(k)}$ 与 Y_k 是否具有相同的分布。

(1) 设总体分布为指数分布 $\text{Exp}(1)$, 证明: Y_k 与 $\sum_{i=1}^n X_i$ 相互独立。

(1) 证明: $n(1 - U_{(n)}) \xrightarrow{L} \text{Exp}(1)$ 。



中国人民大学统计与大数据研究院
2024 年夏令营招生考试试题 (应用统计)

注: 考试时间 120 分钟。

1. (1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}$.
- (1) 证明: 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在区间 $[-\pi, 0)$ 和 $(0, \pi]$ 均为一致连续, 但在 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 上不一致连续.

2. 设随机变量 X 服从 Pareto 分布, 概率密度函数

$$f(x) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}\{x \geq \alpha\} \quad (\alpha > 0, \beta > 2).$$

- (1) 计算 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\text{Var}(X)$.
- (1) 求随机变量 $Y = 2\beta(\ln X - \ln \alpha)$ 的分布。
3. 设独立观测样本满足以下条件:
- (a) $X_i^{(1)}$ 和 $X_i^{(0)}$ 分别服从参数为 λ_1, λ_0 的 Poisson 分布 $P(\lambda_1), P(\lambda_0)$.
- (b) T_i 服从两点分布 $B(1, p)$, 且与 $X_i^{(1)}, X_i^{(0)}$ 独立。

观测值为 $X_i = T_i X_i^{(1)} + (1 - T_i) X_i^{(0)}$.

- (1) 求 λ_0 和 λ_1 的无偏估计量 $\hat{\lambda}_0$ 和 $\hat{\lambda}_1$, 并证明其无偏性。
- (1) 推导 $\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0$ 和 $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}$ 的渐近分布.
- (1) 确定 p 的取值, 使得 $\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0$ 和 $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}$ 的渐近方差最小.
- (1) 构造 $\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0$ 和 $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间.