



夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部

搜题组：贾思涵 杨昕达

录入组：李雨恒 张彬泽 吴俊 李怡龙

统稿组：李沐阳



目录

清华大学	4
2015 年直博生招生考试试题	5
2016 年直博生招生考试试题（一）	7
2019 年直博生招生考试试题（一）	10
2019 年直博生招生考试试题（二）	13
2021 年直博生招生考试试题	17
2021 年本校推免考试试题	21
2022 年预推免招生考试试题	25
2023 年直博生招生考试试题	31
2024 年夏令营招生考试试题	36
2024 年夏令营招生考试试题	40
北京大学	44
2011 年直博生招生考试试题	45
2012 年直博生招生考试试题	55
2013 年直博生招生考试试题	63
2015 年直博生招生考试试题	70
2016 年直博生招生考试试题	77
2017 年直博生招生考试试题	82
2019 年直博生招生考试试题	88
复旦大学	95
2019 年直博生招生考试试题	96
2021 年直博生招生考试试题	98
2022 年直博生招生考试试题	100
2023 年夏令营招生考试试题（6 月 25 日）	103
2023 年夏令营招生考试试题（6 月 27 日）	105
2024 年夏令营招生考试试题	108
2025 年学术营笔试	111
上海交通大学	113
2023 年夏令营招生考试试题（应用统计）	114
2024 年夏令营招生考试试题（数学）	117
2024 年夏令营招生考试试题（应用统计）	120
浙江大学	123
2019 年直博生招生考试试题	124
2020 年直博生招生考试试题	127
2021 年直博生招生考试试题	131
2022 年直博生招生考试试题	134
2023 年直博生招生考试试题	138
2024 年直博生招生考试试题	141
2025 年推荐免试直博生招生试卷	144



南京大学	147
2024 年夏令营招生考试试题	148
2023 年夏令营招生考试试题	152
2022 年夏令营招生考试试题	158
2021 年夏令营招生考试试题	167
中国科学技术大学	171
2018 年夏令营招生考试试题	172
2019 年夏令营招生考试试题	178
2021 年夏令营招生考试试题	184
2022 年夏令营招生考试试题	190
2024 年夏令营招生考试试题	196
2026 年夏令营招生考试试题 (回忆版)	204
南开大学	212
夏令营试题	213
中国科学院数学与系统科学研究院	214
2018 年夏令营招生考试试题	215
2019 年夏令营招生考试试题	218
2023 年夏令营招生考试试题	221
2024 年夏令营招生考试试题	224
中国人民大学	227
2022 年夏令营招生考试试题 (统计学)	228
2022 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	231
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	234
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	237
2024 年夏令营招生考试试题 (统计学)	240
2024 年夏令营招生考试试题 (应用统计)	243



清华大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒



清华大学数学科学系
2015 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

解答 利用不等式 $\ln(1-x) \leq -x$ ($x < 1$) 得

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^{n \ln(1-k/n)} \leq e^{-k}.$$

又当 $k \leq n^{2/3}$ 时,

$$n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) + k = n\left(-\frac{k}{n} - \frac{k^2}{2n^2} + O\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right) + k = -\frac{k^2}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right) = O\left(\frac{n^{4/3}}{n}\right) = O(n^{-2/3}) \rightarrow 0,$$

即 $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \rightarrow e^{-k}$, 且对 $k \leq n^{2/3}$ 一致。于是

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1},$$

而尾部

$$0 \leq \sum_{k=\lfloor n^{2/3} \rfloor + 1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leq \sum_{k > \lfloor n^{2/3} \rfloor} e^{-k} \rightarrow 0.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1}.$$

□

2. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 可逆, A^m 为对角矩阵, 其中 $m > 1$ 为正整数。求证: A 可对角化。

解答 先看一个 Jordan 块 $J = J_k(\lambda) = \lambda I + N$ (N 为 k 阶幂零 Jordan 块)。因 A 可逆, $\lambda \neq 0$ 。由二项式展开,

$$J^m = (\lambda I + N)^m = \lambda^m I + m\lambda^{m-1}N + \binom{m}{2}\lambda^{m-2}N^2 + \dots.$$

其幂零部分 $P := m\lambda^{m-1}N + \binom{m}{2}\lambda^{m-2}N^2 + \dots$ 的第一超对角线上元素为 $m\lambda^{m-1} \neq 0$, 故 P 的秩为 $k-1$ 且 P 幂零 ($P^k = 0, P^{k-1} \neq 0$), 即 P 的 Jordan 形为 $J_k(0)$ 。于是 $J^m \sim J_k(\lambda^m)$: m 次幂保持 Jordan 块的大小。

设 A 的 Jordan 形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s))$, 则 A^m 的 Jordan 形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1^m), \dots, J_{k_s}(\lambda_s^m))$ 。题设 A^m 可对角化, 故所有块的大小 $k_i = 1$, 从而 A 本身可对角化。 □

3. V 是全体 $\mathbb{R}$ 上的多项式构成的线性空间, 对 $\forall f \in V, \varphi(f) = f + f'$ 。求证 φ 可逆。

解答 设 D 为求导算子, 则 $\varphi = I + D$ 。对任一多项式 g (设 $\deg g = m$), $D^{m+1}g = 0$, 定义

$$\psi(g) = \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^n g$$

(对每个具体的 g 都是有限和)。则

$$\varphi(\psi(g)) = (I + D) \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n)} = \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n)} + \sum_{n=0}^m (-1)^n g^{(n+1)} = g$$



(交错和两两相消)。故 φ 满射。又若 $f + f' = 0$, 设 $f \neq 0$ 且 $\deg f = m$, 则 $f + f'$ 的首项仍为 f 的首项 (求导降低次数), $f + f' \neq 0$, 矛盾, 故 $\ker \varphi = \{0\}$, φ 单射。因此 φ 可逆, 且

$$\varphi^{-1}(g) = g - g' + g'' - \cdots + (-1)^{\deg g} g^{(\deg g)}.$$

□

4. 设 G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, D 为 G 的紧致子集, 映射 $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的, 且在集合 D 上是单射, 并且

$$\det F'(x) \neq 0, \quad \forall x \in D.$$

求证:

$$(1) d(D, \partial G) > 0;$$

$$(2) \text{ 存在 } 0 < \varepsilon < d(D, \partial G), \text{ 使得 } F|_{D_\varepsilon} \text{ 为单射, 其中 } D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, D) < \varepsilon\}.$$

解答 (1) 因 $D \subset G$ 且 G 开, $D \cap \partial G = \emptyset$ 。 D 紧致, ∂G 闭, 紧集与不交闭集的距离为正 (若 $d(D, \partial G) = 0$, 则存在 $x_k \in D, y_k \in \partial G$ 使 $|x_k - y_k| \rightarrow 0$; 由 D 紧致取子列 $x_k \rightarrow x \in D$, 则 $y_k \rightarrow x \in \partial G$, 与 $D \cap \partial G = \emptyset$ 矛盾)。故 $d(D, \partial G) > 0$ 。

(2) 反证: 若结论不成立, 则对任意 ε 都有两点 $x_\varepsilon \neq y_\varepsilon \in D_\varepsilon$ 使 $F(x_\varepsilon) = F(y_\varepsilon)$ 。取 $\varepsilon_k \rightarrow 0^+$, 得 $x_k \neq y_k, d(x_k, D), d(y_k, D) \rightarrow 0, F(x_k) = F(y_k)$ 。由 D 紧致, $d(x_k, D) \rightarrow 0$ 蕴含 x_k 有子列收敛于 D 中点; 同理 y_k 亦然, 且由 $d(x_k, y_k) \leq d(x_k, D) + d(y_k, D) + \text{diam } D$ 有界, 故可设 $x_k \rightarrow x_0, y_k \rightarrow y_0$, 其中 $x_0, y_0 \in D$ 。由 F 的连续性, $F(x_0) = F(y_0)$, 而 F 在 D 上单射, 故 $x_0 = y_0 =: p$ 。

因 $\det F'(p) \neq 0$, 由逆映射定理, F 在 p 的某邻域 $B(p, \delta)$ 上是微分同胚, 从而单射。但当 k 充分大时 $x_k, y_k \in B(p, \delta)$, $x_k \neq y_k$ 而 $F(x_k) = F(y_k)$, 与局部单射矛盾。故存在 $\varepsilon > 0$ (可取 $\varepsilon < d(D, \partial G)$) 使 $F|_{D_\varepsilon}$ 为单射。 □

5. 设函数 $f(z)$ 是单位圆盘上的解析函数, $|z| < 1$ 时 $|f(z)| < 1$, α 是满足 $|\alpha| < 1$ 的复数, 且 $f(\alpha) = 0$ 。证明: $|z| < 1$ 时

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$

解答 记单位圆盘的自同构

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |z| < 1.$$

它是把 $|z| < 1$ 映到自身的双全纯映射 (Möbius 变换), 且 $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ 。令

$$g(w) = f(\varphi_\alpha^{-1}(w)),$$

则 g 在 $|w| < 1$ 上全纯, $|g(w)| < 1$, 且

$$g(0) = f(\alpha) = 0.$$

由 Schwarz 引理,

$$|g(w)| \leq |w|, \quad |w| < 1.$$

令 $w = \varphi_\alpha(z)$, 得

$$|f(z)| = |g(\varphi_\alpha(z))| \leq |\varphi_\alpha(z)| = \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$

证毕。(这就是 Schwarz-Pick 引理在 $f(\alpha) = 0$ 时的情形。) □



清华大学数学科学系
2016 年直博生招生考试试题 (一)
来源: 小红书作者 Relax

1. (1) 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续可微的。试叙述关于 f 的逆映射定理 (包括条件和结论)。
- (2) 试应用逆映射定理证明不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续可微单射。

解答 (1) **逆映射定理**: 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射, $x_0 \in D$, 且 $\det f'(x_0) \neq 0$ 。则存在 x_0 的邻域 $U \subset D$ 与 $f(x_0)$ 的邻域 V , 使得 $f|_U: U \rightarrow V$ 是 C^1 微分同胚 (即双射、逆映射也 C^1), 并且

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}, \quad x \in U.$$

(2) (设 $n \geq 2$; $n = 1$ 时有反例 $f(x) = x$ 。) 反证: 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 单射。若存在 x_0 使 $\nabla f(x_0) \neq 0$, 则不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$ 。由隐函数定理, 方程 $f(x) = f(x_0)$ 在 x_0 附近确定一个 $(n-1)$ 维曲面, 特别地存在 $t \neq 0$ 充分小使点 x_0 与 $x_0 + (0, t, 0, \dots, 0)$ 附近的两点 (x_0) 与 $x_0 + tv$ ($v \perp \nabla f(x_0)$, $v \neq 0$) 满足

$$f(x_0 + tv) = f(x_0)$$

(把 f 在 x_0 处一阶展开: $f(x_0 + tv) = f(x_0) + t\nabla f(x_0) \cdot v + o(t) = f(x_0) + o(t)$, 再由隐函数定理修正为精确相等: 事实上在 $f = f(x_0)$ 的等值面上取一段曲线 $\gamma(t)$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = v$)。这与单射矛盾。故 $\nabla f \equiv 0$ 于 $\mathbb{R}^n$, f 为常数, 更不可能单射。矛盾。所以不存在 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 C^1 单射 ($n \geq 2$)。□

2. 设

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{3/2}} \right),$$

其中 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\vec{n}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面 S^2 的单位外法向量场。试求曲面积分

$$\iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

解答 按常见原题, 分母应为 r^3 ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), 即

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

直接计算散度 ($(x, y, z) \neq 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 在区域 $B(0, 1) \setminus \overline{B(0, \varepsilon)}$ 上用 Gauss 公式 (外法向):

$$0 = \iiint \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{S_\varepsilon^2} \vec{F} \cdot \vec{n}_\varepsilon \, d\sigma,$$

其中 S_ε^2 为半径 ε 的球面, $\vec{n}_\varepsilon$ 为其内法向 (指向区域内部)。在内法向上 $\vec{F} \cdot \vec{n}_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2}$ (因 $\vec{F} = \vec{r}/\varepsilon^3$ 沿外法向, 内法向取负), 故

$$\iint_{S_\varepsilon^2} \vec{F} \cdot \vec{n}_\varepsilon \, d\sigma = -\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi.$$

于是

$$\iint_{S^2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 4\pi.$$

(若按题面字面的分母 $x^2 + 2y^2 + 3z^2$, 该曲面积分没有初等的闭式解; 原题应为 r^3 形式。) □



3. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数, $f(x) = x, \forall x \in (-\pi, \pi]$ 。

(1) 试求 f 的 Fourier 级数及 Fourier 级数的和函数, 并说明该级数是否在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。

(2) 试用上述 Fourier 级数及 Parseval 等式求出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的值。

解答 (1) f 为奇函数, 故 $a_n = 0 (n \geq 0)$, 且

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

故

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

由 Dirichlet 收敛定理, Fourier 级数的和函数为: 在 f 的连续点取 $f(x)$, 在间断点取左右极限的平均值。 f (周期化后) 只在 $x = (2k+1)\pi$ 处有跳跃间断, 其左右极限为 π 与 $-\pi$, 平均值为 0。故和函数

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin (2\mathbb{Z}+1)\pi, \\ 0, & x \in (2\mathbb{Z}+1)\pi. \end{cases}$$

该级数在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛: 若一致收敛, 则和函数必连续, 但 S 在 $(2k+1)\pi$ 处间断 (Gibbs 现象)。

(2) 由 Parseval 等式 (对和函数 S 用, 或直接对 f 用——Parseval 只依赖于系数),

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2},$$

即

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

4. 设 $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 为全纯函数, $f(\alpha) = 0, \alpha \in B(0,1)$ 。

(1) 求证:

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|, \quad \forall z \in B(0,1).$$

(2) 求上述不等式中等号成立的充要条件。

解答 (1) 同 2015 年第 5 题: 令 $\varphi_{\alpha}(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ (圆盘自同构, $\varphi_{\alpha}(\alpha) = 0$), $g = f \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$, 则 $g(0) = f(\alpha) = 0, |g| < 1$ 。由 Schwarz 引理 $|g(w)| \leq |w|$, 代回 $w = \varphi_{\alpha}(z)$ 即得所证不等式。

(2) 由 Schwarz 引理的等号情形: $|g(w)| \leq |w|$ 中若在某点 $w \neq 0$ 取等号, 则存在 $|\lambda| = 1$ 使 $g(w) = \lambda w$ 对一切 $|w| < 1$ 成立; 若在 $w = 0$ 取等号则不等式为 $0 \leq 0$ 恒真, 此时结论需按“存在某 $z \neq \alpha$ 使等号成立”理解。故等号在某点 $z \neq \alpha$ 成立的充要条件是

$$f(z) = \lambda \varphi_{\alpha}(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |\lambda| = 1,$$

即 f 是圆盘的一个自同构 (Möbius 变换)。

□

5. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $f_A(x)$ 为 A 的特征多项式, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg g(x) = n-1, g(x) \mid f_A(x)$ 。求 $g(A)$ 所有可能的秩, 并说明理由。

解答 因 $\deg g = n-1$ 且 $g \mid f_A$, 存在一次多项式 $x - \lambda$ (λ 为 A 的一个特征值) 使 $f_A(x) = g(x)(x - \lambda)$ 。由 Cayley-Hamilton 定理,

$$g(A)(A - \lambda I) = f_A(A) = O,$$



故 $\text{Im}(A - \lambda I) \subseteq \ker g(A)$, 从而

$$\text{rank } g(A) = n - \dim \ker g(A) \leq n - \text{rank}(A - \lambda I) = \dim \ker(A - \lambda I),$$

其中 $\dim \ker(A - \lambda I)$ 是 λ 的几何重数。

更精确地 (用 Jordan 形): 设 A 的 Jordan 块为 $J_{k_i}(\mu_i)$, g 中因子 $x - \mu$ 的重数为 m_μ ($\sum_\mu m_\mu = n - 1$)。对每个块,

$$\text{rank } g(J_{k_i}(\mu)) = \max(0, k_i - m_\mu)$$

($g(J) = (\mu J$ 的展开) $= (J - \mu I)^{m_\mu} u(J)$, $u(\mu) \neq 0$ 使 $u(J)$ 可逆, 故秩等于 $\text{rank}(J - \mu I)^{m_\mu} = \max(0, k_i - m_\mu)$)。特别地, 对满足 $m_\mu = a_\mu$ (a_μ 为 μ 的代数重数) 的特征值 μ , 其各块贡献 0; 只有那个“缺一个因子”的特征值 λ ($m_\lambda = a_\lambda - 1$) 的块可能贡献秩。其贡献为 $\sum_i \max(0, k_i - m_\lambda)$, 只能取 0 或 1 (因 $\sum_i k_i = a_\lambda = m_\lambda + 1$: 各 $k_i \leq m_\lambda$ 时贡献为 0, 恰有一个块 $k_i = m_\lambda + 1$ 时贡献为 1, 其余情形不可能)。

因此

$$\text{rank } g(A) \in \{0, 1\}.$$

两种情形都可达到: 如 $A = \text{diag}(1, 2, 3)$, $g = (x - 1)(x - 2)$, 则 $g(A) = \text{diag}(0, 0, 2)$, 秩为 1; 如 $A = \text{diag}(1, 1, 2)$, $g = (x - 1)(x - 2)$, 则 $g(A) = O$, 秩为 0。且 $\text{rank } g(A) = 0 \iff g(A) = O \iff A$ 的极小多项式整除 g 。□

6. 设 V 为 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, φ 为 V 上的幂么线性变换, 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\varphi^k = I_V$, 又设 W 为 φ -不变子空间。求证: 存在 φ -不变子空间 W' , 使得 $V = W \oplus W'$ 。

解答 (有限阶线性变换的完全可约性, 特征 0 上 Maschke 定理的线性情形。) 取任一投影 $p: V \rightarrow W$ (线性, $p|_W = \text{id}$, 如任取 W 的一个补空间作投影)。作“平均投影”

$$\pi = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i p \varphi^{-i}.$$

因 W 是 φ -不变子空间, 对 $w \in W$, $\varphi^{-i}w \in W$, $p\varphi^{-i}w = \varphi^{-i}w$, 故

$$\pi(w) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i \varphi^{-i}w = w,$$

即 $\pi|_W = \text{id}_W$, 且 $\pi(V) \subseteq W$ (p 的像在 W 中, φ^i 保持 W)。所以 π 是到 W 上的投影。又

$$\varphi \pi \varphi^{-1} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^{i+1} p \varphi^{-(i+1)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varphi^j p \varphi^{-j} = \pi$$

(因 $\varphi^k = \varphi^0 = I$, 和式作循环置换), 即 $\varphi \pi = \pi \varphi$ 。

令 $W' = \ker \pi$, 则 $V = W \oplus W'$ (投影分解), 且对 $w' \in W'$,

$$\pi(\varphi w') = \varphi \pi(w') = 0,$$

故 $\varphi w' \in W'$, W' 是 φ -不变子空间。证毕。□



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题 (一)

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷满分 100 分。

1. (10 分) 证明不存在一个实可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ 。

解答 反证: 设可微函数 f 满足 $f(f(x)) = -x$ 。两边求导 (链式法则):

$$f'(f(x)) \cdot f'(x) = -1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

故 $f'(x) \neq 0$ 对一切 x 成立, f' 连续从而恒正或恒负, f 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调。若 f 严格递增, 则复合 $f \circ f$ 严格递增, 但 $x \mapsto -x$ 严格递减, 矛盾; 若 f 严格递减, 则 $f \circ f$ 严格递增, 同样与 $-x$ 严格递减矛盾。故这样的 f 不存在。

(另证: 由 $f(f(x)) = -x$ 得 f 是双射, 且 f 连续严格单调; 于是 $f(f(x))$ 必严格递增, 矛盾。) $\square$

2. (15 分) 证明 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

的根都是实数并且包含于区间 $(-1, 1)$ 内。

解答 记 $Q(x) = (x^2 - 1)^n$, 则 Q 以 $x = \pm 1$ 为 n 重零点。下面归纳证明: 对 $k = 0, 1, \dots, n$, $Q^{(k)}$ 在 $(-1, 1)$ 内至少有 k 个互异零点, 且以 $x = \pm 1$ 为 $n - k$ 重零点 ($k \leq n - 1$ 时)。

$k = 0$ 显然。设 $Q^{(k)}$ 在 $(-1, 1)$ 内有 k 个互异零点 $x_1 < \dots < x_k$ ($k < n$), 则 $Q^{(k)}$ 以 ± 1 为零点 (重数 $n - k \geq 1$)。对 $Q^{(k)}$ 在区间 $[-1, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, 1]$ 上各用一次 Rolle 定理, 得 $Q^{(k+1)}$ 在 $(-1, 1)$ 内有 $k + 1$ 个互异零点; 且 $Q^{(k+1)}$ 以 ± 1 为 $n - k - 1$ 重零点。归纳成立。

取 $k = n$: $Q^{(n)}$ 在 $(-1, 1)$ 内至少有 n 个互异零点。又 $Q^{(n)}$ 是 n 次多项式 (Q 为 $2n$ 次), 故它恰有 n 个根, 全部为实数且位于 $(-1, 1)$ 内。即 P_n 的 n 个根全为实数且都在 $(-1, 1)$ 中。 $\square$

3. (10 分) 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\int_0^{x^2+y^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dx dy.$$

解答 作极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[\int_0^{r^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r \left[\int_0^{r^2} \frac{e^z}{1-z} dz \right] dr \\ &= \pi \int_0^1 \left[\int_0^u \frac{e^z}{1-z} dz \right] du \quad (u = r^2). \end{aligned}$$

交换积分次序 (区域 $0 \leq z \leq u \leq 1$):

$$I = \pi \int_0^1 \frac{e^z}{1-z} \left(\int_z^1 du \right) dz = \pi \int_0^1 e^z dz = \pi(e - 1).$$

$\square$

4. (10 分) 设 A 和 B 是两个 n 阶方阵。证明: AB 和 BA 有相同的特征值。

解答 先证 AB 与 BA 的非零特征值 (计重数) 相同。设 $\lambda \neq 0$ 是 AB 的特征值, $v \neq 0$ 满足 $ABv = \lambda v$, 则 $Bv \neq 0$ (否则 $\lambda v = 0$), 且

$$BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda Bv,$$



故 λ 也是 BA 的特征值。反过来由对称性, AB 与 BA 的非零特征值集合相同。

计重数也相同: 由 Sylvester 行列式恒等式 $\det(I_n - xAB) = \det(I_n - xBA)$ ($x \in \mathbb{C}$), 对 $\lambda \neq 0$ 取 $x = 1/\lambda$ 得

$$\det(\lambda I - AB) = \lambda^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}AB\right) = \lambda^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}BA\right) = \det(\lambda I - BA).$$

即 AB 与 BA 的特征多项式完全相同, 故特征值 (连同 0 的计重数) 完全相同。□

5. (15 分) 假设 I_n 是 n 阶单位矩阵, A 是一个 n 阶方阵, 令 $f(x) = \det(I_n + xA)$, 计算 $f'(0)$ 。

解答 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (计重数), 则 $I_n + xA$ 的特征值为 $1 + x\lambda_i$, 故

$$f(x) = \det(I_n + xA) = \prod_{i=1}^n (1 + x\lambda_i).$$

展开:

$$f(x) = 1 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)x + O(x^2) = 1 + \operatorname{tr}(A)x + O(x^2),$$

故

$$f'(0) = \operatorname{tr}(A).$$

(另法: 行列式按列的多重线性性, $f'(0) = \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, Ae_i, \dots, e_n) = \sum_i a_{ii} = \operatorname{tr} A$ 。) □

6. (15 分) 设 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $n+1$ 个向量, 并且两两之间的内积满足 $(v_i, v_j) < 0$, $\forall i \neq j$ 。证明: $v_1, \dots, v_{n+1}$ 中一定存在 n 个向量, 它们组成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。

解答 先证引理: $\mathbb{R}^m$ 中两两成钝角的非零向量至多有 $m+1$ 个。对 m 归纳: $m=1$ 时, 直线上两两成钝角 (即反向) 的非零向量至多 2 个。设结论对 $m-1$ 成立, 取 $\mathbb{R}^m$ 中两两成钝角的向量 $u_1, \dots, u_s$ 。固定 u_s , 把 u_i ($i < s$) 正交分解为 $u_i = \alpha_i \frac{u_s}{|u_s|} + w_i$, $w_i \perp u_s$ 。由 $(u_i, u_s) < 0$ 得 $\alpha_i < 0$; 且对 $i \neq j < s$,

$$(w_i, w_j) = (u_i, u_j) - \alpha_i \alpha_j < 0$$

($\alpha_i \alpha_j > 0$)。故 $w_1, \dots, w_{s-1}$ 是 $u_s^\perp \cong \mathbb{R}^{m-1}$ 中两两成钝角的非零向量 ($w_i \neq 0$: 若 $w_i = 0$, 则 u_i 与 u_s 反向, 此时 (u_i, u_j) 与 (u_s, u_j) 同号, 不可能都 < 0), 由归纳假设 $s-1 \leq m$, 即 $s \leq m+1$ 。

现在反证: 若 $v_1, \dots, v_{n+1}$ 中任意 n 个都线性相关, 则这 $n+1$ 个向量的秩 $\leq n-1$, 它们都落在某个 $\leq (n-1)$ 维子空间中。但由引理, $n-1$ 维空间中两两成钝角的非零向量至多 n 个, 与有 $n+1$ 个矛盾。故存在 n 个线性无关的向量, 它们构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基。□

7. (10 分) 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z \sin z}{1 - \cos z} dz.$$

解答 被积函数

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{1 - \cos z}.$$

在 $|z| < 1$ 内的奇点: $1 - \cos z = 0 \iff z = 2k\pi$, 单位圆内只有 $z = 0$ 。它是二阶极点 ($1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2}$)。计算留数, 作展开:

$$e^z \sin z = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots\right) \left(z - \frac{z^3}{6} + \dots\right) = z + z^2 + \frac{z^3}{3} + \dots,$$

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots = \frac{z^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{12} + \dots\right),$$



故

$$f(z) = \frac{2}{z^2}(z + z^2 + O(z^3))\left(1 + \frac{z^2}{12} + \cdots\right) = \frac{2}{z} + 2 + O(z).$$

所以 $\text{Res}(f, 0) = 2$ 。由留数定理,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} f(z) dz = \text{Res}(f, 0) = 2.$$

□

8. (15 分) 设 $f(z)$ 是一个处处非零的全纯函数。证明: 存在一个全纯函数 $g(z)$, 使得 $f(z) = e^{g(z)}$ 。

解答 因 f 在 $\mathbb{C}$ 上处处非零, 商函数 $\frac{f'}{f}$ 是整函数。定义

$$g(z) = \int_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + a,$$

其中积分沿从 0 到 z 的任一路径, a 为任一使 $e^a = f(0)$ 的复数 ($f(0) \neq 0$)。由于 $\mathbb{C}$ 单连通 (星形区域), $\frac{f'}{f}$ 的线积分与路径无关 (Cauchy 积分定理), 故 g 良定义且全纯, $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ 。于是

$$\frac{d}{dz} \left(f(z)e^{-g(z)} \right) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = 0,$$

故 $f(z)e^{-g(z)}$ 为常数 c 。又 $c = f(0)e^{-g(0)} = f(0)e^{-a} = 1$, 所以 $f(z) = e^{g(z)}$ 。

□



清华大学数学科学系
2019 年直博生招生考试试题 (二)
来源: 小红书作者 Relax

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求证: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。

解答 当 $x > 0$ 时, 归纳可知 $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$, 其中 P_n 为多项式 (如 $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$)。因 e^{-1/x^2} 在 $x \rightarrow 0^+$ 时比任何 $\frac{1}{x^k}$ 都趋于 0 快,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

下面归纳证明 $f^{(n)}(0) = 0$ 且 $f^{(n)}$ 在 0 处连续。 $n = 0$: $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $x < 0$ 时 $f \equiv 0$, 故 f 在 0 连续。设 $f^{(n)}(0) = 0$ 且 $f^{(n)}$ 连续, 则

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h}.$$

$h < 0$ 时分子为 0; $h > 0$ 时

$$\left| \frac{f^{(n)}(h)}{h} \right| = \left| \frac{1}{h} P_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-1/h^2} \right| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0^+),$$

故 $f^{(n+1)}(0) = 0$, 且由 $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0 = f^{(n+1)}(0)$ 知 $f^{(n+1)}$ 在 0 连续。归纳完成, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 。
□

2. 证明: Hermite 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

的所有根均为实数。

解答 记 $u(x) = e^{-x^2}$, 则 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} u^{(n)}(x)$, H_n 的零点与 $u^{(n)}$ 的零点一致。归纳证明 $u^{(n)}$ 至少有 n 个 (互异) 实零点。

$n = 1$: $u'(x) = -2xe^{-x^2}$ 有 1 个零点。设 $u^{(n)}$ 有 n 个互异实零点 $x_1 < \dots < x_n$ 。注意到 $u^{(n)}(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) (因 $u^{(n)} = H_n u$ 是多项式乘 e^{-x^2})。在区间 $(-\infty, x_1), [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, \infty)$ 上考察: 在相邻零点间由 Rolle 定理, $u^{(n+1)}$ 在 (x_i, x_{i+1}) 内有零点 ($n-1$ 个); 在 $(-\infty, x_1)$ 上 $u^{(n)}$ 非零且两端趋于 0 ($x \rightarrow -\infty$ 与 $x \rightarrow x_1$ 处 $u^{(n)} \rightarrow 0$), 故 $u^{(n)}$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上有极值点, 即 $u^{(n+1)}$ 有零点; 同理 (x_n, ∞) 上也有一零点。故 $u^{(n+1)}$ 至少有 $n+1$ 个互异实零点。

(严格地说, 在 $(-\infty, x_1)$ 上取 $u^{(n)}$ 的最大值或最小值的点即可; 若 $u^{(n)}$ 在该区间上无零点则其保持符号且两端趋于 0, 必在内部取到极值。) 归纳完成: $u^{(n)}$ 有 n 个互异实零点。又 H_n 是 n 次多项式 ($H_0 = 1, H_{n+1} = 2xH_n - H'_n$), 故 H_n 恰有 n 个实根。
□

3. 计算积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{x dy - y dx}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

其中 $ad - bc = \sqrt{7}$, L^+ 为椭圆 $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1$, 取逆时针方向。

解答 作线性替换

$$u = ax + by, \quad v = cx + dy.$$



其系数矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式为 $ad - bc = \sqrt{7} > 0$, 故该替换保持定向 (逆时针仍为逆时针), 且把椭圆 L^+ 变为单位圆周 $C: u^2 + v^2 = 1$ (逆时针)。计算

$$\begin{aligned} u dv - v du &= (ax + by)(c dx + d dy) - (cx + dy)(a dx + b dy) \\ &= (bc - ad) y dx + (ad - bc) x dy = (ad - bc)(x dy - y dx) = \sqrt{7}(x dy - y dx). \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{1}{\sqrt{7}} \oint_C \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}.$$

在单位圆上 $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$:

$$u dv - v du = \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta - \sin \theta \cdot (-\sin \theta) d\theta = d\theta,$$

故

$$I = \frac{1}{\sqrt{7}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.$$

□

4. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为 $[a, b]$ 上的正值连续函数且 $g(x)$ 严格单调递减, 求证:

$$\frac{\int_a^b x f(x) g(x) dx}{\int_a^b f(x) g(x) dx} < \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

解答 (Chebyshev 积分不等式的加权形式。) 考虑二重积分

$$J = \int_a^b \int_a^b f(x) f(y) (x - y)(g(x) - g(y)) dx dy.$$

因 g 严格递减, 对 $x > y$ 有 $x - y > 0$ 、 $g(x) - g(y) < 0$, 故被积函数在 $x > y$ 处 < 0 , 在 $x < y$ 处 $(x - y)(g(x) - g(y))$ 亦 < 0 (两负之积为正乘 $f(x)f(y) > 0$ ……准确地说: $x < y$ 时 $x - y < 0$, $g(x) - g(y) > 0$, 乘积仍 < 0), 故 $J < 0$ ($f > 0$, 被积函数处处 ≤ 0 且在一正测度集上 < 0)。展开 J :

$$\begin{aligned} J &= \int \int f(x) f(y) [xg(x) - xg(y) - yg(x) + yg(y)] \\ &= \left(\int f \right) \left(\int xfg \right) - \left(\int fg \right) \left(\int xf \right) - \left(\int fg \right) \left(\int xf \right) + \left(\int f \right) \left(\int xfg \right) \\ &= 2 \left[\left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b xfg \right) - \left(\int_a^b fg \right) \left(\int_a^b xf \right) \right]. \end{aligned}$$

由 $J < 0$ 得

$$\left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b xfg \right) < \left(\int_a^b fg \right) \left(\int_a^b xf \right).$$

两边除以正数 $\left(\int f \right) \left(\int fg \right)$, 即得所证不等式。

□

5. 已知 n 阶矩阵 A, B 满足 $A^2 = A$, $B^2 = B$, 且 $I_n - A - B$ 可逆, 求证 $r(A) = r(B)$ 。

解答 由 $A^2 = A$ 得

$$A(I_n - A - B) = A - A^2 - AB = -AB,$$

故 $AB = -A(I_n - A - B)$ 。因 $I_n - A - B$ 可逆, 左乘可逆矩阵不改变秩:

$$r(AB) = r(A(I_n - A - B)) = r(A).$$



同理, 由 $B^2 = B$ 得

$$(I_n - A - B)B = B - AB - B^2 = -AB,$$

故

$$r(AB) = r((I_n - A - B)B) = r(B).$$

于是 $r(A) = r(AB) = r(B)$ 。

□

6. 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵。

(1) 若 A 可逆, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 若 $AC = CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

解答 (1) 用 Schur 补分解: A 可逆时,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两边取行列式 (左、右两个块三角矩阵行列式为 1) 得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

(2) 先设 A 可逆。由 $AC = CA$ 得 $CA^{-1} = A^{-1}C$, 故

$$|AD - CB| = |A| \cdot |D - A^{-1}CB| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

(最后一步用 (1))。

对一般的 A (可能奇异), 用连续性 (或多项式恒等) 论证: 把 A 换成 $A + tI$ (t 为参数), 当 t 不是 $-A$ 的特征值时 $A + tI$ 可逆, 且 $(A + tI)C = C(A + tI)$ 仍成立。已证

$$\begin{vmatrix} A + tI & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A + tI)D - CB|$$

对除有限个 t 外的一切 t 成立。两边都是 t 的多项式, 在无穷多个 t 处相等, 故恒等; 取 $t = 0$ 即得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

□

7. 定义如下线性变换为仿射变换:

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax + b,$$

其中 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ 。

(1) 证明: φ 可逆 $\iff A$ 可逆。

(2) 若 φ 可逆, 求出 φ^{-1} , 并证明 φ^{-1} 亦为仿射变换。

(3) 证明: 仿射变换的复合仍是仿射变换。



解答 (1) 若 A 可逆, 则对任意 $y \in \mathbb{R}^n$, 方程 $Ax + b = y$ 有唯一解 $x = A^{-1}(y - b)$, 故 φ 可逆。反之, 若 φ 可逆 (单射), 而 A 奇异, 则存在 $0 \neq u$ 使 $Au = 0$, 从而 $\varphi(x+u) = A(x+u) + b = Ax + b = \varphi(x)$, 与单射矛盾。故 A 可逆。

(2) 由 $y = Ax + b$ 解得

$$\varphi^{-1}(y) = A^{-1}(y - b) = A^{-1}y - A^{-1}b,$$

仍为“线性部分 A^{-1} + 平移 $-A^{-1}b$ ”的形式, 故 φ^{-1} 是仿射变换。

(3) 设 $\varphi(x) = Ax + b$, $\psi(x) = Cx + d$ 为两个仿射变换, 则

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(Cx + d) = A(Cx + d) + b = ACx + (Ad + b),$$

仍是仿射变换 (线性部分 AC , 平移 $Ad + b$)。

□

8. 计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - \frac{1}{4}} dz.$$

解答 被积函数 $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{e^z}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}$ 在 $|z| < 1$ 内有单极点 $z = \pm \frac{1}{2}$ 。留数:

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = e^{1/2}, \quad \operatorname{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-1/2}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = -e^{-1/2}.$$

由留数定理,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} f(z) dz = e^{1/2} - e^{-1/2} = 2 \sinh\left(\frac{1}{2}\right).$$

□

9. 设 f 为整函数。若存在正整数 n 和正常数 C , 使得对模长充分大的 z 有 $|f(z)| \leq C|z|^n$, 证明: $f(z)$ 是次数不超过 n 次的多项式。

解答 对任意 $z_0 \in \mathbb{C}$ 与 $R > |z_0|$, 由 Cauchy 积分公式,

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+2}} d\zeta.$$

由条件, 当 R 充分大时 $|\zeta - z_0| = R$ 上有 $|\zeta| \leq R + |z_0|$ 且 $|f(\zeta)| \leq C|\zeta|^n$, 故

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \cdot \frac{C(R + |z_0|)^n}{R^{n+2}} \cdot 2\pi R = (n+1)! C \frac{(R + |z_0|)^n}{R^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

故 $f^{(n+1)}(z_0) = 0$ 对一切 z_0 成立, 即 $f^{(n+1)} \equiv 0$, f 是次数不超过 n 的多项式。

□



清华大学数学科学系
2021 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 三阶实对称矩阵计算题。

解答 (原题未给出具体矩阵, 此处给出此类题的通用解法。) 设给定三阶实对称矩阵 A 。步骤:

- (1) 求特征多项式 $|\lambda I - A|$, 解出特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (均为实数, 计重数);
- (2) 对每个特征值解齐次方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 得特征向量;
- (3) 不同特征值的特征向量自动正交; 对重特征值用 Gram-Schmidt 正交化, 再把所有特征向量单位化, 得标准正交基 q_1, q_2, q_3 ;
- (4) 令 $Q = (q_1, q_2, q_3)$, 则 Q 为正交矩阵, 且

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3);$$

- (5) (若要求谱分解) $A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \lambda_3 q_3 q_3^T$ 。

□

2. 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换, 求证:

$$\ker \varphi = \ker \varphi^2 \iff \text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2.$$

解答 设 $\dim V = n$ 。恒有 $\ker \varphi \subseteq \ker \varphi^2$ 与 $\text{Im } \varphi^2 \subseteq \text{Im } \varphi$ 。由核像维数公式:

$$\dim \ker \varphi + \text{rank } \varphi = n, \quad \dim \ker \varphi^2 + \text{rank } \varphi^2 = n.$$

于是

$$\begin{aligned} \ker \varphi = \ker \varphi^2 &\iff \dim \ker \varphi = \dim \ker \varphi^2 \\ &\iff \text{rank } \varphi = \text{rank } \varphi^2 \\ &\iff \dim \text{Im } \varphi = \dim \text{Im } \varphi^2 \\ &\iff \text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2 \end{aligned}$$

(最后一步用到 $\text{Im } \varphi^2 \subseteq \text{Im } \varphi$ 及两者维数相等)。

□

3. 设 A, B 是数域 F 上的 n 阶方阵, A, B 都可对角化, $AB = BA$ 。求证: A, B 可同时对角化。并举例说明 $AB \neq BA$ 时结论不一定成立。

解答 设 $V = F^n$, A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (互异), 对应的特征子空间为 $V_i = \ker(A - \lambda_i I)$ 。因 A 可对角化, $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ 。由 $AB = BA$, 对 $v \in V_i$,

$$(A - \lambda_i I)Bv = B(A - \lambda_i I)v = 0,$$

故 $Bv \in V_i$, 即每个 V_i 是 B 的不变子空间。 B 可对角化, 故 $B|_{V_i}$ 也可对角化 (B 的极小多项式在 $B|_{V_i}$ 上仍无重根)。在每个 V_i 中取 $B|_{V_i}$ 的一组特征向量基, 拼起来得到 V 的一组基, 其中每个向量既是 A 的特征向量 (在 V_i 中) 又是 B 的特征向量。故 A, B 可同时对角化。

反例 ($AB \neq BA$ 时不可同时对角化): 取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



A 可对角化; B 可对角化 (特征值 $2, 0$)。 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$ 。若 A, B 同时对角化, 则存在公共特征向量; 但 A 的特征向量为 $e_1 = (1, 0)^T$ 、 $e_2 = (0, 1)^T$, 它们都不是 B 的特征向量 ($Be_1 = (1, 1)^T$, $Be_2 = (1, 1)^T$), 矛盾。故不可同时对角化。 $\square$

4. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续可微的。求证:

(1) $n > m$ 时, f 不可能是单射。

(2) $n < m$ 时, f 不可能是满射。

解答 (1) 反证: 设 f 为 C^1 单射。取 $x_0 \in \Omega$ 使 $\text{rank } f'(x_0) =: r$ 达到最大值 (连续函数 $x \mapsto \text{rank } f'(x)$ 在某点取最大)。因秩函数下半连续, 在 x_0 的某邻域内 $\text{rank } f'(x) \geq r$, 又由最大性 $\leq r$, 故该邻域内秩恒为 r 。由常秩定理, 在局部坐标下 f 形如

$$f(x) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

若 $r = m$, 则 f 局部把 n 个坐标压成 $m < n$ 个坐标, 等值面 $f = \text{常数}$ 局部是 $(n-m)$ 维 (≥ 1 维) 子流形, 其上任意两个不同点像相同, 与单射矛盾。若 $r < m$, 同样等值面维数 $n-r \geq n-m+1 \geq 2 \geq 1$, 仍与单射矛盾。故不存在 C^1 单射。

(2) 由 $\text{rank } f'(x) \leq n < m$, Ω 中每一点都是 f 的临界点。由 Sard 定理, f 的临界值全体 (即 $f(\Omega)$) 在 $\mathbb{R}^m$ 中是零测集, 故 $f(\Omega) \subsetneq \mathbb{R}^m$, f 不是满射。

(附 Sard 定理的表述: 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 C^1 映射, 则其临界值集合是 $\mathbb{R}^m$ 中的 Lebesgue 零测集。) $\square$

5. 设 $f(x), \varphi(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 并且 $f(x) = x(2-x)$, $\varphi(x) = x$, $x \in [0, 1]$ 。

(1) 求 $f(x), \varphi(x)$ 的 Fourier 级数。

(2) 求证:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \varphi(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

解答 (1) 周期为 2 的偶函数的 Fourier 级数形如 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$ (基函数 $\cos(n\pi x)$, 周期 2)。

对 φ ($\varphi(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$):

$$a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) \, dx = 2 \left[\frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2 \pi^2} \right]_0^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

故

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

对 f ($f(x) = x(2-x)$, $x \in [0, 1]$, 偶延拓):

$$a_0 = 2 \int_0^1 x(2-x) \, dx = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x(2-x) \cos(n\pi x) \, dx = 2 \left[2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) \, dx - \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) \, dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right] = -\frac{4}{n^2 \pi^2} \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$



故

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}.$$

(2) 因 $|\varphi| \leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi(2^n x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。把 (1) 中 φ 的展开代入:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi(2^n x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi 2^n x)}{(2k+1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2^n(2k+1)\pi x)}{4^n(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

第一个和为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$ 。对第二个二重和: 每个正整数 m 可唯一写成 $m = 2^n(2k+1)$ ($n \geq 0$, $k \geq 0$), 故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2^n(2k+1)\pi x)}{4^n(2k+1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x)}{m^2}$$

(两级数均绝对一致收敛, 重排合法)。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \varphi(2^n x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x)}{m^2} = f(x).$$

□

6. 设

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

(1) 求 $\operatorname{div} \vec{B}$ 。

(2) 求证: 不存在连续可微映射 $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 使得 $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{B}$ 。

解答 (1) 记 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。由 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5},$$

故

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

(2) 反证: 若存在 C^1 的 $\vec{F}$ 使 $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{B}$, 对单位球面 S^2 (外法向 $\vec{n}$) 用 Stokes 公式:

$$\iint_{S^2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S^2} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_{\partial S^2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(S^2 是无边界的闭曲面)。但直接计算: 在 S^2 上 $\vec{B} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{r}/r^4 = 1$, 故

$$\iint_{S^2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S^2} 1 \, d\sigma = 4\pi \neq 0,$$

矛盾。故这样的 $\vec{F}$ 不存在。(注意: 若把定义域改为单连通区域, 如 $\mathbb{R}^3$ 去掉一条射线, 则 $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{F}$ 有解; 此处定义域“挖掉一点”不是单连通的, $\vec{B}$ 对应的 2-形式闭而非恰当。) □

7. 设 $\alpha > 1$,

$$I(\alpha) = - \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^\alpha} \, dx.$$

(1) 求 $I(\alpha)$ 。



(2) 求证:

$$I(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n\alpha - 1)^2}.$$

解答 (1) 作替换 $x = t^{1/\alpha}$ ($\ln x = \frac{1}{\alpha} \ln t$, $dx = \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha-1} dt$):

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \frac{\ln t \cdot t^{1/\alpha-1}}{1+t} dt.$$

利用熟知的 Euler 积分 ($0 < s < 1$):

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

对 s 求导 (在 $s \in (0, 1)$ 内可合法地在积分号下求导):

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1} \ln t}{1+t} dt = \frac{d}{ds} \frac{\pi}{\sin(\pi s)} = -\frac{\pi^2 \cos(\pi s)}{\sin^2(\pi s)}.$$

取 $s = \frac{1}{\alpha}$:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx = -\frac{\pi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}},$$

故

$$I(\alpha) = \frac{\pi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}}.$$

(验证: $\alpha = 2$ 时由替换 $x \mapsto \frac{1}{x}$ 知 $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$, 与公式一致。)

(2) 用熟知的 Mittag-Leffler 部分分式展开 (可由 $\cot$ 的展开求导得到):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}.$$

取 $z = -\frac{1}{\alpha}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{\alpha})^2} = \frac{\pi^2 \cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}}.$$

两边除以 α^2 , 并把 n 换成 $-n$ ($(-1)^{-n} = (-1)^n$):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n\alpha - 1)^2} = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{\alpha})^2} = \frac{\pi^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{\alpha}}{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha}} = I(\alpha).$$

□



清华大学数学科学系
2021 年本校推免考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 已知复方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征多项式为 $(\lambda - 1)^n$ 。证明 A 与 A^2 相似。

解答 由 Cayley-Hamilton 定理, $(A - I)^n = O$, 故 $N := A - I$ 幂零, $A = I + N$, $A^2 = I + 2N + N^2$ 。只需证 N 与 $2N + N^2$ 相似。

对每个 Jordan 块 $J = J_k(0)$ ($k \geq 1$), 证明 $2J + J^2 \sim J$ 。 $2J + J^2$ 是第一超对角线元素为 2、第二超对角线元素为 1 的严格上三角矩阵, 它是幂零的, 且对 $j = 1, \dots, k-1$,

$$(2J + J^2)^j = 2^j J^j + (\text{更高次项})$$

(二项展开中其余项为 $J^{j+1}, \dots$ 的组合), 故 $(2J + J^2)^j \neq O$ 而 $(2J + J^2)^k = O$, 其幂零指数恰为 k , 即其 Jordan 形为 $J_k(0) = J$ 。于是 $2J + J^2 \sim J$ 。

因 $N = \bigoplus_i J_{k_i}(0)$,

$$2N + N^2 = \bigoplus_i (2J_{k_i}(0) + J_{k_i}(0)^2) \sim \bigoplus_i J_{k_i}(0) = N,$$

故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}NP = 2N + N^2$, 从而

$$P^{-1}AP = P^{-1}(I + N)P = I + 2N + N^2 = A^2,$$

即 $A \sim A^2$ 。 □

2. (10 分) 已知实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

二次型 $f(x) = x^T Ax$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上何时取到最大值, 最小值?

解答 求 A 的特征值:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 2)(\lambda - 1) - 1] - (\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

特征值为 0, 2, 3。对应单位特征向量:

$$\lambda = 3: q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T; \quad \lambda = 0: q_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T; \quad \lambda = 2: q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T.$$

由 Rayleigh 商定理, $f(x) = x^T Ax \leq \lambda_{\max} = 3$, 等号当且仅当 $x = \pm q_3$; $f(x) \geq \lambda_{\min} = 0$, 等号当且仅当 $x = \pm q_0$ 。即: 最大值 3, 在 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 处取得; 最小值 0, 在 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ 处取得。□

3. (10 分) 已知域 F 上的有限维线性空间 X, Y, U, V , 以及线性变换

$$\alpha: X \rightarrow Y, \quad \beta: V \rightarrow U, \quad \psi: X \rightarrow U,$$

并且满足

$$\ker \alpha \subset \ker \psi, \quad \text{Im } \psi \subset \text{Im } \beta.$$

那么是否存在线性映射 $\varphi: Y \rightarrow V$ 使得

$$\psi = \beta \circ \varphi \circ \alpha?$$



若是请证明，否则举出一个反例。

解答 存在。构造如下：取 $\ker \beta$ 在 V 中的一个补空间 K ($V = \ker \beta \oplus K$)，则 $\beta|_K : K \rightarrow \operatorname{Im} \beta$ 是线性同构。

第一步，在 $\operatorname{Im} \alpha$ 上定义 φ ：对 $y = \alpha(x) \in \operatorname{Im} \alpha$ ，令

$$\varphi(y) = (\beta|_K)^{-1}(\psi(x)) \in K.$$

(由 $\operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Im} \beta$, $\psi(x) \in \operatorname{Im} \beta$, 故可取。) 验证良定义：若 $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ ，则 $x_1 - x_2 \in \ker \alpha \subset \ker \psi$ ，故 $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ 。且该定义是线性的：对 $y_i = \alpha(x_i)$ ，

$$\beta(\varphi(y_1) + \varphi(y_2)) = \psi(x_1) + \psi(x_2) = \psi(x_1 + x_2) = \beta(\varphi(\alpha(x_1 + x_2))),$$

而 $\varphi(y_1) + \varphi(y_2) \in K$, $\beta|_K$ 单射，故 $\varphi(y_1 + y_2) = \varphi(y_1) + \varphi(y_2)$ ；数乘同理。

第二步，把 φ 从 $\operatorname{Im} \alpha$ 线性延拓到整个 Y (取 $\operatorname{Im} \alpha$ 在 Y 中的补空间，在其上定义 φ 为 0)。

于是对任意 $x \in X$ ：

$$\beta(\varphi(\alpha(x))) = \beta((\beta|_K)^{-1}\psi(x)) = \psi(x),$$

即 $\psi = \beta \circ \varphi \circ \alpha$ 。

□

4. (10 分) 已知域 F 上的方阵 $A, B \in M_n(F)$ ，满足： A 是可逆矩阵， B 是幂零矩阵。证明：对任意 $C \in M_n(F)$ ，存在 $X \in M_n(F)$ ，使得

$$AX - XB = C.$$

解答 (Sylvester 方程。) 考虑线性映射

$$T : M_n(F) \rightarrow M_n(F), \quad X \mapsto AX - XB.$$

只需证 T 是单射 (有限维时单射即双射)。设 $T(X) = O$ ，即 $AX = XB$ 。归纳证明 $A^k X = XB^k$ 对一切 $k \geq 1$ 成立： $k=1$ 即假设；若 $A^k X = XB^k$ ，则

$$A^{k+1}X = AA^kX = AXB^k = (AX)B^k = (XB)B^k = XB^{k+1}.$$

取 $k=n$ ($B^n = O$)： $A^n X = XB^n = O$ 。因 A 可逆， A^n 可逆，故 $X = O$ 。于是 $\ker T = \{O\}$ ， T 单射，从而对任意 C ，方程 $T(X) = C$ 有唯一解。

□

5. (10 分) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集，并且 E 上的任何连续函数都有界。证明： E 是有界闭集。

解答 先证 E 有界：若 E 无界，则 $f(x) = x$ ($x \in E$) 是 E 上的连续函数，但在 E 上无界，与题设矛盾。故 E 有界。

再证 E 是闭集：若 E 不闭，则存在聚点 $x_0 \in \overline{E} \setminus E$ 。定义

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0}, \quad x \in E.$$

因 $x_0 \notin E$ ， f 在 E 上有定义且连续；又存在 E 中的点列 $x_n \rightarrow x_0$ ，使 $|f(x_n)| = \frac{1}{|x_n - x_0|} \rightarrow +\infty$ ，故 f 在 E 上无界，矛盾。故 E 是闭集。

综上， E 是有界闭集。

□



6. (10 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的处处非负的黎曼可积函数, 并且

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明: $f(x)$ 几乎处处为 0。

解答 由 Lebesgue 的黎曼可积性判别法, f 的间断点集为零测集, 即 f 在 $[0, 1]$ 上几乎处处连续。设 x_0 是 f 的一个连续点且 $f(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使 $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$ 于 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0, 1]$ 上, 从而

$$\int_0^1 f \geq \int_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [0, 1]} f \geq \frac{f(x_0)}{2} \cdot (\text{正长度}) > 0,$$

与 $\int_0^1 f = 0$ 矛盾。故 f 在每个连续点处都等于 0, 即 $f(x) = 0$ 几乎处处成立。 $\square$

7. (20 分) 计算 $\mathbb{R}^3$ 中的区域

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1, z^2 + x^2 \leq 1\}$$

的体积。

解答 (三圆柱交体, Steinmetz 立体。) 设该区域为 Ω 。由关于三个坐标平面及各坐标置换的对称性, 把 Ω 分成 48 个全等的部分, 只算第一卦限中满足 $0 \leq x \leq y \leq z$ 的那一块 V_1 。

在 $0 \leq x \leq y \leq z$ 时, $x^2 + z^2 \leq y^2 + z^2$ 且 $x^2 + y^2 \leq x^2 + z^2$, 故最紧的约束是 $x^2 + y^2 \leq 1$; 又 $y^2 + z^2 \leq 1$ 给出 $z \leq \sqrt{1 - y^2}$, $z^2 + x^2 \leq 1$ 自动成立 ($x \leq y$)。所以

$$V_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y, y \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

($y \leq \sqrt{1 - y^2}$ 即 $y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$)。于是

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dz dx dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} y(\sqrt{1-y^2} - y) dy \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} y\sqrt{1-y^2} dy - \int_0^{1/\sqrt{2}} y^2 dy \\ &= \left[-\frac{(1-y^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2\sqrt{2}} - \frac{1}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

故

$$\text{vol}(\Omega) = 48 V_1 = 48 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 16 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 16 - 8\sqrt{2}.$$

$\square$

8. (20 分) 已知 $f(z)$ 在单位圆盘 $|z| < 1$ 解析, 并且

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}, \quad \forall |z| < 1.$$

证明: 对任意整数 $n \geq 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! e.$$

解答 取 $0 < r < 1$, 由 Cauchy 积分公式,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$



故

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{n!}{r^n(1-r)}.$$

上式对一切 $0 < r < 1$ 成立, 取使 $r^n(1-r)$ 最大的 r 。令 $h(r) = r^n(1-r)$, 由

$$h'(r) = nr^{n-1}(1-r) - r^n = r^{n-1}(n - (n+1)r) = 0$$

得 $r = \frac{n}{n+1}$ ($n=0$ 时 $h(r) = 1-r$ 在 $r \rightarrow 0^+$ 时趋于 1, 结论单独验证)。于是

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}} = n! \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)!e$$

(用到 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$)。证毕。

□



清华大学数学科学系
2022 年预推免招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷仅适用于应用统计硕士生。

数学分析（考试时间 90 分钟，满分 50 分）

1. 求极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0)。$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}。$

解答 (1) 由 $e^t - 1 \sim t \quad (t \rightarrow 0):$

$$n(\sqrt[n]{a} - 1) = n(e^{\frac{\ln a}{n}} - 1) = \frac{e^{\frac{\ln a}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \ln a \quad (n \rightarrow \infty).$$

(2) 用 Taylor 展开:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \tan x - x = \frac{x^3}{3} + O(x^5),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{\frac{x^3}{3} + O(x^5)} = \frac{1}{2}.$$

□

2. 设非负函数 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 讨论函数 $g(x) = \sqrt{f(x)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的可微性。

解答 (i) 若 $f(x_0) > 0$: 由连续性, f 在 x_0 附近 > 0 , 而 $t \mapsto \sqrt{t}$ 在 $(0, \infty)$ 上光滑, 由链式法则 g 在 x_0 可导, 且

$$g'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

(ii) 若 $f(x_0) = 0$: 因 $f \geq 0$, x_0 是 f 的 (全局) 最小值点, 故 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) \geq 0$ 。由 Taylor 展开

$$f(x_0 + h) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2).$$

• 若 $f''(x_0) > 0$: 则 $\sqrt{f(x_0 + h)} \sim \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}|h|$, 从而

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{h} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}, & h \rightarrow 0^+, \\ -\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}, & h \rightarrow 0^-, \end{cases}$$

左右导数不相等, g 在 x_0 不可导;

• 若 $f''(x_0) = 0$: 则 $f(x_0 + h) = o(h^2)$, $\frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{h} = o(1) \rightarrow 0$, 故 g 在 x_0 可导且 $g'(x_0) = 0$ (若 $f \equiv 0$ 于 x_0 附近则更显然)。

综上: g 在 $f > 0$ 处可导; 在 $f = 0$ 处可导当且仅当 $f'' = 0$ (此时 $g' = 0$)。

□



3. 求三元函数

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x + y + z = 1$ 下的极大值和极小值。

解答 约束集是单位球面与平面 $x + y + z = 1$ 的交——一个圆，紧致，故最值存在。用 Lagrange 乘数法：

$$\nabla(xy + yz) = \lambda \nabla(x^2 + y^2 + z^2) + \mu \nabla(x + y + z),$$

即

$$\begin{cases} y = 2\lambda x + \mu, \\ x + z = 2\lambda y + \mu, \\ y = 2\lambda z + \mu. \end{cases}$$

第一、三式相减得 $2\lambda(x - z) = 0$ 。

情形一： $\lambda = 0$ 。则 $y = \mu = x + z$ ，结合 $x + y + z = 1$ 得 $y = \frac{1}{2}$ ， $x + z = \frac{1}{2}$ ；代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ： $x^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ 。由 $(x + z)^2 - 2xz = \frac{3}{4}$ 得 $xz = -\frac{1}{4}$ ，解得 $\{x, z\} = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}$ 。此时

$$f = y(x + z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

情形二： $x = z$ 。代入约束： $y = 1 - 2x$ ， $2x^2 + (1 - 2x)^2 = 1$ ，即 $6x^2 - 4x = 0$ ，得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}$ 。对应两点：

$$(0, 1, 0): f = 0; \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right): f = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}.$$

比较三个候选值 $\frac{1}{4}$, 0 , $-\frac{4}{9}$ ，得

$$\text{极大值} = \frac{1}{4}, \quad \text{极小值} = -\frac{4}{9}.$$

□

4. 定义

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx dy dz = \lim_{M \rightarrow +\infty} \iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

这里 $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq M^2\}$ 为三维闭球体 ($M > 0$)。

(1) 设 $P(x, y, z)$ 和 $Q(x, y, z)$ 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数，证明：

$$\iint_{\partial B} P(x, y, z) e^{Q(x, y, z)} \, dy dz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) e^{Q(x, y, z)} \, dx dy dz.$$

(2) 若 $P(x, y, z)$ 为三元多项式函数，证明：

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial P}{\partial x} e^{-x^2 - y^2 - z^2} \, dx dy dz = 2 \iiint_{\mathbb{R}^3} x P(x, y, z) e^{-x^2 - y^2 - z^2} \, dx dy dz.$$

解答 (1) 对向量场

$$\vec{G} = (P e^Q, 0, 0)$$

在 B 上用 Gauss 公式 (∂B 取外法向)：

$$\iint_{\partial B} \vec{G} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{G} \, dV.$$

而 $\vec{G} \cdot \vec{n} \, dS$ 的第一分量形式即 $P e^Q \, dy \wedge dz$ ，且

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial}{\partial x} (P e^Q) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) e^Q,$$



即得所证。

(2) 在 (1) 中取 $Q = -x^2 - y^2 - z^2$ ($\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$):

$$\iint_{\partial B} P e^{-x^2-y^2-z^2} dydz = \iiint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} - 2xP \right) e^{-x^2-y^2-z^2} dV.$$

令 $M \rightarrow \infty$ 。左端的边界项: P 是多项式, 设 $\deg P = d$, 则 $|P| \leq C(1+r)^d$, 在 ∂B 上 $e^{-x^2-y^2-z^2} = e^{-M^2}$, 故

$$\left| \iint_{\partial B} P e^{-x^2-y^2-z^2} dydz \right| \leq C(1+M)^d e^{-M^2} \cdot 4\pi M^2 \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow \infty).$$

右端的三重积分收敛 (被积函数被 $C(1+r)^d e^{-r^2}$ 控制), 故

$$0 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - 2xP \right) e^{-x^2-y^2-z^2} dV,$$

即

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial P}{\partial x} e^{-x^2-y^2-z^2} dV = 2 \iiint_{\mathbb{R}^3} xP e^{-x^2-y^2-z^2} dV.$$

□

5. 计算定积分

$$\int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{a-x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解答 (设 $a > b$; $a \leq b$ 时积分在 $x = a$ 处发散。) 作替换 $x = b \sin \theta$:

$$I = \int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{a-x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{b \cos \theta}{a - b \sin \theta} \cdot b \cos \theta d\theta = b^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{a - b \sin \theta} d\theta.$$

(若 $a > b$, 分母恒正, 积分收敛。) 再把 $\sin \theta$ 的奇部分对称抵消:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{a - b \sin \theta} d\theta = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{a^2 - b^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

令 $t = \tan \theta$, 则 $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2}$, $d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(a^2 + (a^2 - b^2)t^2)} &= \frac{1}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + (a^2 - b^2)t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{b^2} \left(\pi - \frac{a^2 - b^2}{a\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \pi \right) = \frac{\pi}{b^2} \left(1 - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right). \end{aligned}$$

于是

$$I = b^2 \cdot a \cdot \frac{\pi}{ab^2} \left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right) = \pi \left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right).$$

□

线性代数 (考试时间 90 分钟, 满分 50 分)

6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 - 4x_2x_3$ 。

(1) 若二次型正定, 求参数 t 的取值范围。

(2) 若 $t = -2$, 用正交变换将二次型化为标准型。



解答 (1) 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

二次型正定当且仅当 A 的顺序主子式全为正:

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} = 2 - t^2 > 0, \quad |A| = 1 \cdot (6 - 4) - t \cdot (3t - 0) = 2 - 3t^2 > 0.$$

由 $2 - 3t^2 > 0$ 得 $|t| < \sqrt{\frac{2}{3}}$ (此时 $2 - t^2 > 0$ 自动满足)。故 t 的取值范围为

$$|t| < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(2) $t = -2$ 时

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

特征值为 $5, 2, -1$ 。对应特征向量:

$$\lambda = 5: (1, -2, 2)^T; \quad \lambda = 2: (-2, 1, 2)^T; \quad \lambda = -1: (2, 2, 1)^T.$$

(可验证它们两两正交。) 单位化得正交矩阵

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

作正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, 二次型化为标准型

$$f = 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2.$$

□

7. 设 V 是数域 F 上的有限维向量空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 为 V 上的线性变换, 多项式 $f(x), g(x) \in F[x]$, 它们的最大公因式和最小公倍式分别为 $d(x)$ 和 $m(x)$ 。证明:

$$\text{rank}(f(\mathcal{A})) + \text{rank}(g(\mathcal{A})) = \text{rank}(d(\mathcal{A})) + \text{rank}(m(\mathcal{A})).$$

解答 (在 F 的代数闭包上考察。) 取基使 $\mathcal{A}$ 化为 Jordan 标准形, 则问题化为逐块验证。设一个 Jordan 块为 $J = J_k(\lambda)$, 对任一多项式 p :

$$p(J) = (p(\lambda)I + p'(\lambda)N + \cdots),$$

若 $p(\lambda) \neq 0$, 则 $p(J)$ 可逆, 秩为 k ; 若 λ 是 p 的 s_p 重根, 则 $p(J) = (J - \lambda I)^{s_p} u(J)$ ($u(\lambda) \neq 0$, $u(J)$ 可逆), 故

$$\text{rank } p(J) = \text{rank}(J - \lambda I)^{s_p} = \max(0, k - s_p).$$



记 λ 在 f, g 中的重数分别为 s_f, s_g , 则其在 $d = \gcd(f, g)$ 中的重数为 $\min(s_f, s_g)$, 在 $m = \text{lcm}(f, g)$ 中的重数为 $\max(s_f, s_g)$ 。于是该块对四个秩的贡献之和满足

$$\max(0, k - s_f) + \max(0, k - s_g) = \max(0, k - \min(s_f, s_g)) + \max(0, k - \max(s_f, s_g)),$$

(不妨设 $s_f \leq s_g$, 上式即 $(k - s_f)_+ + (k - s_g)_+ = (k - s_f)_+ + (k - s_g)_+$, 显然成立)。对全部 Jordan 块求和, 即得所证等式。□

8. 讨论 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 1 \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多解? 并求出有解时的一般解。

解答 方程组即 $\lambda x_i + (x_1 + x_2 + x_3) = 1$ ($i = 1, 2, 3$), 系数矩阵为 $\lambda I_3 + J$ (J 为全 1 矩阵), 其行列式为

$$|\lambda I + J| = (\lambda + 3)\lambda^2.$$

(J 的特征值为 $3, 0, 0$ 。)

情形一: $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 。系数矩阵可逆, 有唯一解。由对称性 $x_1 = x_2 = x_3 = x$, 代入得 $(\lambda + 3)x = 1$, 故唯一解为

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 3}.$$

情形二: $\lambda = 0$ 。方程组化为 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (系数矩阵秩为 1, 增广矩阵秩也为 1), 有无穷多解, 一般解为

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2, \quad x_1, x_2 \text{ 任意}.$$

情形三: $\lambda = -3$ 。方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

三式相加得 $0 = 3$, 矛盾, 故无解。

综上: $\lambda \neq 0, -3$ 时有唯一解 $(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3})$; $\lambda = 0$ 时有无穷多解 ($x_1 + x_2 + x_3 = 1$); $\lambda = -3$ 时无解。□

9. 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的对称线性变换, 证明: 对 V 中的任何单位向量 α , 有 $\|\sigma(\alpha)\|^2 \leq \|\sigma^2(\alpha)\|$ 。

解答 由 σ 对称 (自伴随) 及 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\|\sigma(\alpha)\|^2 = \langle \sigma\alpha, \sigma\alpha \rangle = \langle \alpha, \sigma^2\alpha \rangle \leq \|\alpha\| \cdot \|\sigma^2\alpha\| = \|\sigma^2(\alpha)\|,$$

(最后一步用到 $\|\alpha\| = 1$)。证毕。

(注: 等号情形可进一步刻画: 设 σ 的特征值为 λ_i , $\alpha = \sum c_i e_i$ ($\sum c_i^2 = 1$), 则 $\|\sigma\alpha\|^2 = \sum \lambda_i^2 c_i^2$, $\|\sigma^2\alpha\| = (\sum \lambda_i^4 c_i^2)^{1/2}$, 由 Cauchy 不等式 $(\sum \lambda_i^2 c_i^2)^2 \leq \sum \lambda_i^4 c_i^2$ 即得。) □

10. 数域 F 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合记为 $M_n(F)$ 。定义映射 $\varphi: M_n(F) \rightarrow F$, 满足以下条件:

(1) 对任意 $A, B \in M_n(F)$, 有 $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$ 。



(2) 若 $A \in M_n(F)$ 是上三角矩阵, 则 $\varphi(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$, 其中 a_{ii} 为 A 的主对角线元素。

证明: 对任意矩阵 $A \in M_n(F)$, 恒有 $\varphi(A) = \det(A)$ 。

解答 先看初等矩阵。记三类初等矩阵:

- 换行矩阵 (对换第 i, j 行) P_{ij} : $P_{ij}^2 = I$, 故 $\varphi(P_{ij})^2 = \varphi(I) = 1$, $\varphi(P_{ij}) = \pm 1$;
- 倍乘矩阵 $D_i(c)$ (对角矩阵, 第 i 个对角元为 $c \neq 0$, 其余为 1): 它是上三角矩阵, $\varphi(D_i(c)) = c$;
- 消元矩阵 $E_{ij}(c)$ (I 的第 (i, j) 元换成 c , $i \neq j$): 当 $i < j$ 时它是上三角矩阵且对角元全 1, 故 $\varphi = 1$; 当 $i > j$ 时, $E_{ij}(c) = P_{ij}E_{ji}(c)P_{ij}$, 故

$$\varphi(E_{ij}(c)) = \varphi(P_{ij})^2 \varphi(E_{ji}(c)) = 1.$$

再定 $\varphi(P_{ij}) = -1$: 利用标准分解 (把对换写成上三角消元、下三角消元与一个倍乘矩阵的乘积),

$$P_{ij} = E_{ij}(1) E_{ji}(-1) E_{ij}(1) D_i(-1)$$

(在 2×2 情形即 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)。于是

$$\varphi(P_{ij}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

故 φ 在全部三类初等矩阵上与 $\det$ 取值相同。

对任意矩阵 A , 由 Gauss 消元, A 可写成初等矩阵与一个对角形矩阵

$$D_r = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ 个}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ 个}})$$

的乘积: $A = E_1 E_2 \cdots E_k D_r$ (先用行变换化为行阶梯形, 其行阶梯形经列置换即 D_r ; 列置换也是初等矩阵)。 D_r 是上三角矩阵, $\varphi(D_r) = \det(D_r)$ ($r < n$ 时两者都为 0, $r = n$ 时为 1)。由 φ 的乘法性,

$$\varphi(A) = \varphi(E_1) \cdots \varphi(E_k) \varphi(D_r) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(D_r) = \det(A).$$

证毕。

□



清华大学数学科学系
2023 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 A 是三阶实对称矩阵，且每行元素和为 4， $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$ 为 $(I_3 - A)x = 0$ 的解。求矩阵 A 以及正交阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵。

解答 每行元素和为 4 即 $A(1, 1, 1)^T = 4(1, 1, 1)^T$ ，故 4 是 A 的特征值， $v_1 = (1, 1, 1)^T$ 是特征向量。又 $(I_3 - A)\alpha_i = 0$ 即 $A\alpha_i = \alpha_i$ ，故 α_1, α_2 是特征值 1 的特征向量，它们线性无关（显然不成比例）。 A 为对称矩阵，不同特征值的特征向量正交，且 $\alpha_1 \cdot v_1 = 1 - 1 + 0 = 0$ ， $\alpha_2 \cdot v_1 = 1 - 2 + 1 = 0$ ，一致。于是 A 的特征值为 4, 1, 1。取标准正交特征向量基：

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T,$$

在 α_1, α_2 张成的平面内取与 q_2 正交的单位向量：

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T$$

（即对 $(1, -2, 1)$ 作 Gram-Schmidt 后再单位化）。令

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则 Q 正交且

$$Q^T A Q = \text{diag}(4, 1, 1).$$

谱分解（还原 A ）：

$$A = 4q_1q_1^T + q_2q_2^T + q_3q_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

（验证：每行和为 4， $A\alpha_1 = \alpha_1$ ， $A\alpha_2 = \alpha_2$ 。）

□

2. 设 V 是 n 维线性空间， $\varphi, \psi: V \rightarrow V$ 是线性变换，且有 $\varphi^2 = \varphi$ ， $\ker \varphi$ 、 $\text{Im } \varphi$ 均是 ψ -不变子空间，求证： $\varphi\psi = \psi\varphi$ 。

解答 由 $\varphi^2 = \varphi$ ， φ 是投影， $V = \ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi$ ($v = \varphi v + (v - \varphi v)$ ，其中 $\varphi v \in \text{Im } \varphi$ ， $v - \varphi v \in \ker \varphi$)。任取 $v \in V$ ：

$$\psi v = \psi(\varphi v) + \psi(v - \varphi v),$$

其中 $\psi(\varphi v) \in \text{Im } \varphi$ ($\text{Im } \varphi$ 是 ψ -不变的)， $\psi(v - \varphi v) \in \ker \varphi$ ($\ker \varphi$ 是 ψ -不变的)。于是

$$\varphi\psi(v) = \varphi(\psi(\varphi v)) + \varphi(\psi(v - \varphi v)) = \psi(\varphi v) + 0 = \psi(\varphi(v)) = \psi\varphi(v)$$

($\psi(\varphi v) \in \text{Im } \varphi$ 且 φ 在其上为恒等)。由 v 的任意性， $\varphi\psi = \psi\varphi$ 。

□

3. 设 P 为实矩阵，求证：对称分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

的正负惯性指数相等，且均等于 $\text{rank}(P)$ 。

解答 记 $S = \begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}$ 。



设 P 为 $m \times n$ 实矩阵, 作奇异值分解 $P = U\Sigma V^T$, 其中 $U \in O(m)$, $V \in O(n)$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$, $r = \text{rank } P$, $\sigma_i > 0$ 。则

$$S = \begin{pmatrix} 0 & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^T \\ \Sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & V^T \end{pmatrix}.$$

故 S 正交合同于 $\begin{pmatrix} 0 & \Sigma^T \\ \Sigma & 0 \end{pmatrix}$, 后者是分块对角矩阵, 块为 $\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ ($i = 1, \dots, r$) 与零块。每个 2×2 块 $\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\pm\sigma$, 正、负各一。故 S 的正惯性指数 = 负惯性指数 = $r = \text{rank } P$ 。□

4. 设 A 为 n 阶复可逆矩阵, $s \in \mathbb{N}^+$, A^s 可对角化。求证: A 可对角化, 并说明 A 可逆这个条件不能删去。

解答 设 A 的 Jordan 形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_t}(\lambda_t))$ 。因 A 可逆, $\lambda_i \neq 0$ 。对每个块 $J_k(\lambda) = \lambda I + N$,

$$J_k(\lambda)^s = \lambda^s I + s\lambda^{s-1}N + \binom{s}{2}\lambda^{s-2}N^2 + \dots,$$

其幂零部分的第一超对角线元素为 $s\lambda^{s-1} \neq 0$, 故 $J_k(\lambda)^s$ 仍是一个大小为 k 的 Jordan 块 ($J_k(\lambda)^s \sim J_k(\lambda^s)$)。因此 A^s 的 Jordan 块与 A 的 Jordan 块大小一一对应。题设 A^s 可对角化, 故所有块的大小为 1, 从而 A 可对角化。

“可逆”不能删去: 取幂零矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = O$ 可对角化, 但 A 不可对角化 (幂零非零矩阵)。
□

5. 若 $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, 解答下列问题:

- (1) 证明: $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛。
- (2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 。
- (3) 问 $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ 是否在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛?

解答 记 $S(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!}$, 则题设级数即 $e^{-x}S(x)$ 。

- (1) 因 $\{a_n\}$ 收敛故有界, 设 $|a_n| \leq M$ 。对任意固定的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| a_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq M \frac{|x|^n}{n!},$$

而 $\sum \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|} < +\infty$, 故 $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛, $S(x)$ 良定义, 原级数 (乘上 e^{-x}) 在 $\mathbb{R}$ 上收敛。

- (2) 因 $e^{-x} \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1$,

$$e^{-x}S(x) - \alpha = e^{-x} \sum_{n=0}^\infty (a_n - \alpha) \frac{x^n}{n!}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 N 使 $n > N$ 时 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ 。则

$$\left| e^{-x} \sum_{n>N} (a_n - \alpha) \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon e^{-x} \sum_{n>N} \frac{x^n}{n!} \leq \varepsilon \quad (x > 0),$$

而前有限项部分

$$e^{-x} \sum_{n=0}^N |a_n - \alpha| \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$



(有限个 $e^{-x}x^n$ 之和趋于 0)。故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} S(x) = \alpha.$$

(3) 不一定一致收敛。反例：取 $a_0 = 1$, $a_n = 0$ ($n \geq 1$)，则 $a_n \rightarrow \alpha = 0$ ，而

$$e^{-x} S(x) = e^{-x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} S(x) = 0.$$

部分和序列 $S_N(x)e^{-x} = \sum_{n=0}^N a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x} = e^{-x}$ (对一切 $N \geq 0$)，

$$\sup_{x \in (0, \infty)} |S_N(x)e^{-x} - 0| = \sup_{x > 0} e^{-x} = 1 \not\rightarrow 0,$$

故在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛。□

6. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数，在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上可微，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。求证： f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微。

解答 只需证 f 在原点可微且 $df(0) = 0$ 。任取 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ，考虑 $g(t) = f(tx)$ ($t \in [0, 1]$)，它在 $[0, 1]$ 上连续、在 $(0, 1]$ 上可微。由 Lagrange 中值定理，存在 $\theta \in (0, 1)$ 使

$$f(x) - f(0) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \nabla f(\theta x) \cdot x.$$

由条件 $\nabla f(y) \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$)，当 $x \rightarrow 0$ 时 $\theta x \rightarrow 0$ ，故

$$\frac{|f(x) - f(0) - df(0) \cdot x|}{|x|} = \frac{|\nabla f(\theta x) \cdot x|}{|x|} \leq |\nabla f(\theta x)| \rightarrow 0.$$

因此 f 在 0 处可微 (且 $f(0) = 0$ 时导数为 0 向量；一般地 $df(0) = 0$)。□

7. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是开集，映射 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续可微， $x_0 \in \Omega$ ，并且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+n}}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+n}}(x_0) \end{pmatrix}$$

的秩为 m ，其中 $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 表示 f 的第 i 个分量函数对第 j 个自变量分量求导。求证：存在 x_0 的开邻域 $U \subset \Omega$ ，并且在 U 上有 C^1 同胚 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ，使得

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_{m+n}) = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

解答 (秩定理。) 秩为 m 说明 Jacobi 矩阵的 m 行线性无关，即存在 m 列构成可逆的 $m \times m$ 子矩阵。对自变量坐标作一个置换 (记置换后的坐标为 $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $x = (u, v)$ 至多重排分量)，使

$$\det \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) \neq 0.$$

定义

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}, \quad \Phi(u, v) = (f(u, v), v).$$

则 Φ 是 C^1 的，且

$$\Phi'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

其行列式 $= \det \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) \neq 0$ 。由逆映射定理，存在 x_0 的邻域 U 使 $\Phi|_U: U \rightarrow \Phi(U)$ 为 C^1 同胚。取 $\varphi = \Phi|_U$ (并记新坐标 $y = (y_1, \dots, y_{m+n}) = \Phi(u, v) = (f(u, v), v)$)，则

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_{m+n}) = f(\Phi^{-1}(y)) = (\Phi \circ \Phi^{-1}(y)) \text{ 的前 } m \text{ 个分量} = (y_1, \dots, y_m).$$

证毕。□



8. 设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为坐标平面、 $x + y = 1$ 和 $x^2 + z^2 = 1$ 所围成的在第一象限的区域。计算

$$\int_{\partial D} (2xz \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy),$$

其中 ∂D 取外侧。

解答 (Stokes/Gauss 公式。) 对微分形式 $\omega = 2xz \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy$,

$$d\omega = \left(\frac{\partial(2xz)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (1 + 4z) \, dx \wedge dy \wedge dz.$$

区域

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

由 Gauss 公式:

$$\int_{\partial D} \omega = \iiint_D (1 + 4z) \, dx \, dy \, dz.$$

按 x, z 先积分 y ($0 \leq y \leq 1 - x$):

$$\begin{aligned} \iiint_D (1 + 4z) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x} (1 + 4z) \, dy \, dz \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)(1 + 4z) \, dz \, dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) \left[\sqrt{1-x^2} + 2(1-x^2) \right] dx \\ &= \int_0^1 (1 - x)\sqrt{1-x^2} \, dx + 2 \int_0^1 (1 - x)(1 - x^2) \, dx \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) + 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(其中 $\int_0^1 (1 - x)\sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$, $\int_0^1 (1 - x)(1 - x^2) \, dx = \frac{5}{12}$ 。)

故

$$\int_{\partial D} \omega = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

□

9. $\gamma \subset \mathbb{C}$ 是简单闭曲线, 设 D 为 γ 围成的无界区域, 有 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ 并且 $f(+\infty) = \alpha$, 计算

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi,$$

其中 z 在 γ 围成的有界区域内, 并且积分方向取正方向 (γ 逆时针方向)。

解答 记 $g(\xi) = f(\xi) - \alpha$, 则 g 在无界区域 D 上解析, $g(\infty) = 0$ 。取 R 充分大, 使 z 与 γ 都在 $|\xi| < R$ 内。 $g(\xi)/(\xi - z)$ 在 γ 与 $|\xi| = R$ 之间的环域上解析, 由 Cauchy 定理 (环域的两个边界分量, 外圆取逆时针、内圆 γ 取顺时针时积分之和为 0):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma, \text{逆时针}} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

令 $R \rightarrow \infty$:

$$\left| \oint_{|\xi|=R} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \right| \leq \sup_{|\xi|=R} |g(\xi)| \cdot \frac{2\pi R}{R - |z|} \rightarrow 0 \quad (\text{因 } g(\xi) \rightarrow 0).$$

故

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi) - \alpha}{\xi - z} \, d\xi = 0.$$



又由 Cauchy 积分公式 (常数 α 在 γ 内部解析),

$$\int_{\gamma} \frac{\alpha}{\xi - z} d\xi = \alpha \cdot 2\pi i.$$

相加得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \alpha.$$

(验证: 如 γ 为单位圆, $f(\xi) = \alpha + \frac{1}{\xi}$, $|z| < 1$ 时 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} \frac{\alpha + 1/\xi}{\xi - z} d\xi = \alpha$.) □

10. 设 $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 是单位圆盘上的全纯函数, 并且 $f(0) = a$, 使用 Schwarz 引理证明: f 在 $B(0,|a|) = \{z \mid |z| < |a|\}$ 上无零点。

解答 反证: 设存在 z_0 , $|z_0| < |a|$, 使 $f(z_0) = 0$ 。对圆盘自同构

$$\varphi_{z_0}(w) = \frac{w - z_0}{1 - \overline{z_0}w}$$

应用 Schwarz-Pick 引理 (f 映圆盘到圆盘):

$$|f(z_0)| \leq |\varphi_{z_0}(z_0)| = 0$$

不产生矛盾; 改用在 $z = 0$ 处的 Schwarz-Pick 不等式:

$$\frac{|f(0) - f(z_0)|}{|1 - \overline{f(z_0)}f(0)|} \leq \left| \frac{0 - z_0}{1 - \overline{z_0} \cdot 0} \right| = |z_0|.$$

由 $f(z_0) = 0$, $f(0) = a$, 左端为 $\frac{|a|}{|1 - \overline{0} \cdot a|} = |a|$, 故

$$|a| \leq |z_0| < |a|,$$

矛盾。故 f 在 $B(0,|a|)$ 上无零点。

(更直接地: 若 $f(z_0) = 0$, 由 Schwarz-Pick 引理,

$$|f(0)| = |\varphi_{z_0}(f(z_0)) \cdots|$$

的变形即 $|a| \leq |\varphi_{z_0}(0)| = |z_0|$, 同样矛盾。) □



清华大学求真书院
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. (10 分) 是否存在 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 A 同时满足下列条件?

- (1) $Ae^A = I_n$ 。
- (2) A 的特征值为实数。

解答 存在。取 $A = \lambda_0 I_n$ ，其中 λ_0 为方程 $xe^x = 1$ 的唯一实数解（存在唯一： $h(x) = xe^x$ 在 $[0, \infty)$ 上严格递增， $h(0) = 0$ ， $h(1) = e > 1$ ，故存在唯一 $\lambda_0 \in (0, 1)$ ， $\lambda_0 \approx 0.5671$ ）。则

$$Ae^A = \lambda_0 I_n \cdot e^{\lambda_0} I_n = \lambda_0 e^{\lambda_0} I_n = I_n,$$

且 A 的 n 个特征值均为 λ_0 （实数）。故这样的矩阵存在。

（事实上 $A = \lambda_0 I_n$ 是唯一解：若 $Ae^A = I_n$ ，则 A 与 e^A 可交换， $A = e^{-A}$ ； A 的特征值 λ 满足 $\lambda e^\lambda = 1$ ，实数特征值只能为 λ_0 ；若 A 有大小 ≥ 2 的 Jordan 块，则 $Ae^A = I$ 还要求 $(xe^x)'|_{x=\lambda_0} = 0$ ，但 $e^{\lambda_0}(1 + \lambda_0) \neq 0$ ，故 A 只能为 $\lambda_0 I_n$ 。） $\square$

2. (10 分) 求出 $I + \alpha vv^T$ 的特征值和特征向量，其中 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ ， $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ 。

解答 记 $M = I + \alpha vv^T$ 。

- 对向量 v 本身： $Mv = v + \alpha v(v^T v) = v + \alpha \|v\|^2 v = (1 + \alpha \|v\|^2)v$ 。故 v 是特征向量，特征值为 $\lambda_1 = 1 + \alpha \|v\|^2$ ；
- 对任意 $u \in v^\perp$ ($n - 1$ 维子空间)： $Mu = u + \alpha v(v^T u) = u$ 。故 $v^\perp$ 中任意非零向量都是特征向量，特征值为 1 ($n - 1$ 重)。

（若 $1 + \alpha \|v\|^2 = 1$ ，即 $\alpha = 0$ ，与题设矛盾，故 $\lambda_1 \neq 1$ ，上述已列出全部特征值。）综上，特征值为 $1 + \alpha \|v\|^2$ （一重，特征向量为 v 的倍数）与 1 ($n - 1$ 重，特征向量为 $v^\perp$ 中的非零向量）。 $\square$

3. (20 分)

- (1) 设 A 为 n 阶实反对称矩阵， B 为 n 阶实对角矩阵，并且矩阵 B 的主对角线上的元素均大于零，求证： $|A + B| > 0$ 。
- (2) 设 A 是 n 阶正定矩阵， B 是 n 阶非零半正定矩阵，求证： $|A + B| > |A| + |B|$ 。

解答 (1) 对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ，因 A 反对称， $x^T A x = 0$ ，故

$$x^T (A + B) x = x^T A x + x^T B x = x^T B x = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 > 0$$

(B 的对角元全为正)。所以 $A + B$ 是正定矩阵，其特征值全为正，行列式

$$|A + B| = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A + B) > 0.$$

(2) 令 $C = A^{-1/2} B A^{-1/2}$ ($A^{1/2}$ 为 A 的唯一正定平方根)，则 C 半正定且 $C \neq O$ 。设 C 的特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ (不全为 0)。则

$$|A + B| = |A| \cdot |I + C| = |A| \prod_{i=1}^n (1 + \mu_i),$$



而 $|B| = |A||C| = |A| \prod_i \mu_i$ 。因 $\mu_i \geq 0$ 且至少一个 > 0 ，展开

$$\prod_{i=1}^n (1 + \mu_i) = 1 + \sum_i \mu_i + (\text{正的非负交叉项}) + \prod_i \mu_i > 1 + \prod_i \mu_i,$$

故

$$|A + B| > |A| \left(1 + \prod_i \mu_i \right) = |A| + |A| \cdot |C| = |A| + |B|.$$

□

4. (15 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导。证明或举例否定:

- (1) 导函数在 $[a, b]$ 上连续。
- (2) 导函数在 $[a, b]$ 上具有介值性。

解答 (1) 否定。取

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(在 $[-1, 1]$ 上)。 $x \neq 0$ 时 $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$; 在 $x = 0$ 处

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h^2)}{h} = 0.$$

但 $f'(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时无极限 ($\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ 无界振荡), 故 f' 在 0 处不连续。所以可导函数的导函数可以不连续。

(2) 肯定: 导函数具有介值性 (Darboux 定理)。证明: 设 f 在 $[a, b]$ 可导, $f'(a) < c < f'(b)$ (其余情形类似)。考虑 $g(x) = f(x) - cx$, 则 g 可导, $g'(a) < 0 < g'(b)$ 。 g 在 $[a, b]$ 连续, 故在 $[a, b]$ 上取得最小值; 因 $g'(a) < 0$, $g(a)$ 不是最小值 (a 附近右侧有更小值), 因 $g'(b) > 0$, $g(b)$ 也不是最小值, 故最小值在 (a, b) 内某点 ξ 取到, $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = c$ 。所以 f' 取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值。□

5. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的函数, 对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$ 存在, 记该值为 $g(x)$ 。证明:

- (1) $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。
- (2) $f(x)$ 的间断点至多可数。

解答 (1) 任取 $x_0 \in [0, 1]$ 与 $\varepsilon > 0$ 。由 $g(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |t - x_0| < \delta$ 时 $|f(t) - g(x_0)| < \varepsilon$ 。对任意满足 $0 < |y - x_0| < \delta$ 的 y , 取 $t \rightarrow y$ (且 $0 < |t - x_0| < \delta$), 由 $f(t) \rightarrow g(y)$:

$$|g(y) - g(x_0)| \leq \limsup_{t \rightarrow y} |f(t) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

故 g 在 x_0 连续。

(2) f 的间断点必满足 $f(x) \neq g(x)$ 。对每个 $n \in \mathbb{N}^+$, 令

$$E_n = \left\{ x : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{n} \right\}.$$

若 $x \in E_n$, 由 $g(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |t - x| < \delta$ 时 $|f(t) - g(x)| < \frac{1}{2n}$, 结合 g 的连续性知该邻域内 $|f(t) - g(t)| \leq \frac{1}{n}$ 对 $t \neq x$ 成立, 即 $(x - \delta, x + \delta) \cap E_n = \{x\}$ 。故 E_n 的每个点都是孤立点, E_n 至多可数 (数轴上孤立点集可数: 每个孤立点可取一个含它的有理开区间互不相交)。于是

$$\{f \text{ 的间断点} \} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

至多可数。 □



6. (10 分)

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(3x)}{3x^2} - \frac{\sin(2x)}{2x^2} \right] dx$$

是否收敛, 若收敛求积分值。

解答 收敛且值为 $\ln \frac{2}{3}$ 。先看收敛性: 在 $x \rightarrow 0^+$ 处,

$$\frac{\sin(3x)}{3x^2} - \frac{\sin(2x)}{2x^2} = \frac{2\sin(3x) - 3\sin(2x)}{6x^2} = \frac{-\frac{5}{2}x^3 + O(x^5)}{6x^2} = -\frac{5}{12}x + O(x^3) \rightarrow 0,$$

为可去奇点; 在 $x \rightarrow +\infty$ 处被积函数的绝对值 $\leq \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{5}{6x^2}$, 绝对收敛。故积分收敛。

求值: 分部积分 (取 $u = \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(2x)}{2}$, $dv = \frac{dx}{x^2}$):

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{x} \left(\frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x} dx \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x} dx. \end{aligned}$$

(边界项: $x \rightarrow 0$ 时括号内为 $O(x^3)$, 除以 x 后 $O(x^2) \rightarrow 0$; $x \rightarrow \infty$ 时趋于 0。)由 Frullani 公式 (对 $a, b > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$):

$$I = \ln \frac{2}{3}.$$

□

7. (10 分) 求级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1}.$$

解答 先作分解:

$$\frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1} = \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} + \frac{n}{n^4 + 1}.$$

因 $\frac{n}{n^4 + 1}$ 是奇函数且级数绝对收敛, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{n^4 + 1} = 0$ 。又

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} + 1.$$

用熟知的展开 (由 $\pi \cot \pi z$ 的部分分式展开取 z 的适当值求导可得):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 1} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sinh(\pi\sqrt{2}) + \sin(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})} - \frac{1}{2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sinh(\pi\sqrt{2}) - \sin(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

于是

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + 1} + 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{2 \sinh(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \pi \sinh(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})}.$$

故

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1} = \frac{\sqrt{2} \pi \sinh(\pi\sqrt{2})}{\cosh(\pi\sqrt{2}) - \cos(\pi\sqrt{2})}.$$

□



8. (10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 中收敛, 求证其存在几乎处处收敛的子列。

解答 设 $f_n \rightarrow f$ 于 L^p ($1 \leq p < \infty$)。归纳选取子列 f_{n_k} : 先取 n_1 使 $\|f_{n_1} - f\|_p < 1$; 再取 $n_{k+1} > n_k$ 使 $\|f_{n_{k+1}} - f\|_p < 2^{-(k+1)}$ 。则由三角不等式,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\|f_{n_{k+1}} - f\|_p + \|f - f_{n_k}\|_p) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-(k+1)} + 2^{-k}) < \infty.$$

由 Minkowski 不等式 (单调收敛),

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty,$$

故 $\sum_k |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < +\infty$ 几乎处处成立, 从而级数 $\sum_k (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ 几乎处处绝对收敛。由

$$f_{n_m} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}),$$

$\{f_{n_m}\}$ 几乎处处收敛 (且极限几乎处处等于 f)。证毕。

□



清华大学数学科学系
2024 年夏令营招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

试求矩阵 Q ，使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵，并求 A 的谱分解。

解答 注意到 $A = 2J - 5I$ (J 为全 1 矩阵)。 J 的特征值为 3 (一重, 特征向量 $(1, 1, 1)^T$) 与 0 (二重, 特征子空间为平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$)，故 A 的特征值为 $2 \cdot 3 - 5 = 1$ (一重) 与 $2 \cdot 0 - 5 = -5$ (二重)。

取标准正交特征向量基：

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T.$$

(q_2, q_3 为平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的一组标准正交基。) 令

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵，且

$$Q^T A Q = \text{diag}(1, -5, -5).$$

谱分解：

$$A = 1 \cdot q_1 q_1^T + (-5)(q_2 q_2^T + q_3 q_3^T) = q_1 q_1^T - 5(I - q_1 q_1^T) = 6 q_1 q_1^T - 5I = \frac{2}{3}J - 5I.$$

(展开 $q_1 q_1^T = \frac{1}{3}J$ ，即回到 $A = 2J - 5I$ 。)

□

2. 设 $AB = BA$ ，求证 $AB^* = B^*A$ ，其中 B^* 表示 B 的伴随矩阵。

解答 由 Cayley-Hamilton 定理，设 B 的特征多项式为 $f_B(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$ ，则

$$B^n + c_1 B^{n-1} + \cdots + c_{n-1} B + c_n I = O.$$

由伴随矩阵的定义 $BB^* = B^*B = |B|I$ 及上式，有

$$B^* = (-1)^{n+1}(B^{n-1} + c_1 B^{n-2} + \cdots + c_{n-1} I)$$

(当 B 可逆时显然： $B^* = |B|B^{-1}$ 代入 Cayley-Hamilton 式；一般情形由两边都是矩阵元素的多项式、在可逆矩阵稠密处相等得恒等)。故 B^* 是 B 的多项式 $p(B)$ 。因 $AB = BA$ ， A 与 B 的每个幂 (从而与 $p(B)$) 可交换：

$$AB^* = A p(B) = p(B) A = B^* A.$$

□

3. 设 F 为数域， $A \in M_{m \times m}(F)$ ， $B \in M_{n \times n}(F)$ ，并且

$$\varphi : M_{m \times n}(F) \rightarrow M_{m \times n}(F), \quad X \mapsto AXB.$$



求证: 若 λ, μ 分别为 A, B 的特征值, 则 $\lambda\mu$ 为 φ 的特征值, 并且 φ 的特征值均有此形式。

解答 (在 F 的代数闭包 $\overline{F}$ 上考虑。) 先证 $\lambda\mu$ 是特征值: 设 $Au = \lambda u$, $u \neq 0$, 且 $B^T v = \mu v$, $v \neq 0$ 。令 $X = uv^T \in M_{m \times n}(\overline{F})$, $X \neq O$, 则

$$\varphi(X) = AXB = Auv^T B = \lambda u (B^T v)^T = \lambda u (\mu v)^T = \lambda\mu uv^T = \lambda\mu X.$$

故 $\lambda\mu$ 是 φ 的特征值。

再证反包含: 把 $M_{m \times n}$ 与 F^{mn} 等同 (按列展开), φ 的矩阵是 Kronecker 积 $A \otimes B^T$ 。对 A, B 分别作上三角化 (在 $\overline{F}$ 上), 则 $A \otimes B^T$ 也是上三角矩阵, 其对角元恰为 $\lambda_i \mu_j$ (λ_i 为 A 的特征值, μ_j 为 B 的特征值, 计重数)。故 φ 的特征多项式为

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (t - \lambda_i \mu_j),$$

即 φ 的特征值全部形如 $\lambda_i \mu_j$ 。

□

4. 设 A 为 n 阶矩阵, $\text{rank}(A) = r$ 。求证 $I, A, \dots, A^{r+1}$ 线性相关。

解答 只需证 A 的极小多项式 $m_A(x)$ 的次数不超过 $r+1$, 因为多项式空间 $\text{span}\{I, A, A^2, \dots\} \cong F[x]/(m_A)$ 的维数等于 $\deg m_A$, 其中 $r+2$ 个元素 $I, A, \dots, A^{r+1}$ 必线性相关。

设 A 的 Jordan 标准形为 $\text{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s))$ 。记零特征值的块 (若有) 中最大的阶为 k_0 , 非零特征值的互异值为 $\lambda'_1, \dots, \lambda'_t$ (重数不计)。则

$$\deg m_A = k_0 + t.$$

而

$$r = \text{rank } A = \underbrace{\sum_{\lambda'_i \neq 0} k_i}_{\geq t} + \underbrace{\sum_{\lambda_i = 0} (k_i - 1)}_{\geq k_0 - 1}$$

(非零特征值块每个至少贡献秩 1, 且块数 $\geq t$, 故 $\sum_{\lambda'_i \neq 0} k_i \geq t$; 零块最大阶 k_0 贡献秩 $k_0 - 1$)。故

$$r \geq t + (k_0 - 1) = \deg m_A - 1,$$

即 $\deg m_A \leq r+1$ 。因此 $I, A, \dots, A^{r+1}$ ($r+2$ 个元素) 在 $\leq (r+1)$ 维空间中线性相关。

□

5. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为局部常值函数, 求证 f 为常值函数。

解答 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 令

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}.$$

$S \neq \emptyset$ ($x_0 \in S$)。 S 开: 若 $x \in S$, 由局部常值性, 存在 x 的邻域 U 使 $f|_U \equiv f(x) = f(x_0)$, 故 $U \subset S$ 。
 S 闭: 若 $x \notin S$, 即 $f(x) \neq f(x_0)$, 同样存在 x 的邻域 U 使 $f|_U \equiv f(x) \neq f(x_0)$, 故 $U \cap S = \emptyset$, 即补集开。因 $\mathbb{R}^n$ 连通, 既开又闭的非空子集只能是全空间, 故 $S = \mathbb{R}^n$, $f \equiv f(x_0)$ 为常值。

□

6. 设 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 试找出 $u: B \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy^2$ 的驻点, 判断其类型, 并求出 u 的最值。

解答 求驻点: $\nabla u = (y^2, 2xy) = (0, 0) \iff y = 0$ 。故驻点为 B 内部 $y = 0$ 上的所有点 $(x, 0)$ ($|x| < 1$)。在 $(x, 0)$ 处 Hessian 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}.$$



- $0 < x < 1$: H 半正定 (秩 1), 且 $u(x+h, k) = (x+h)k^2 \geq 0 = u(x, 0)$ 当 $h > -x$ 时, 故 $(x, 0)$ 是非严格极小点;
- $-1 < x < 0$: 同理为非严格极大点;
- $x = 0$: $u(h, k) = hk^2$ 在 $(0, 0)$ 附近可正可负 (h 变号), 故 $(0, 0)$ 是鞍点。

求最值: 在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上令 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, 则 $u = \cos \theta \sin^2 \theta = \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$ 。
记 $t = \cos \theta \in [-1, 1]$, $v(t) = t(1 - t^2) = t - t^3$, $v'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \iff t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。比较
 $v(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 与端点值 $v(\pm 1) = 0$, 得

$$\max_B u = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \min_B u = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

最大值在 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$ 处取得, 最小值在 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$ 处取得。□

7. 设

$$I(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

试求 α 的范围使得 $I(\alpha)$ 收敛, 并求出其收敛时的值。

解答 作极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$I(\alpha) = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin(r^2)}{r^{2\alpha}} r dr = 2\pi \int_0^\infty r^{1-2\alpha} \sin(r^2) dr = \pi \int_0^\infty t^{-\alpha} \sin t dt \quad (t = r^2).$$

在 $t \rightarrow 0^+$ 处: $\sin t \sim t$, 被积函数 $\sim t^{1-\alpha}$, $\int_0^1 t^{1-\alpha} dt$ 收敛当且仅当 $\alpha < 2$ 。在 $t \rightarrow +\infty$ 处: 由 Dirichlet 判别法 ($\sin t$ 的积分有界, $t^{-\alpha} \downarrow 0$), $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ 收敛当且仅当 $\alpha > 0$ 。故 $I(\alpha)$ 收敛当且仅当

$$0 < \alpha < 2.$$

求值: 利用 $\int_0^\infty t^{s-1} \sin t dt = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$ ($0 < s < 1$; 对 $1 \leq s < 2$ 由解析延拓/Abel 和亦成立), 取 $s = 1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 2$ 时 $-1 < s < 1$):

$$\int_0^\infty t^{-\alpha} \sin t dt = \Gamma(1 - \alpha) \sin \frac{\pi(1 - \alpha)}{2} = \Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}.$$

故

$$I(\alpha) = \pi \Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 2.$$

(验证: $\alpha \rightarrow 1^+$ 时 $\Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 与 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ 一致。) □

8. 设 $f, g \in C(\mathbb{R})$ 且周期为 2π , 并且二者具有相同的 Fourier 展开式, 求证: $f \equiv g$ 。

解答 令 $h = f - g$, 则 h 连续、以 2π 为周期, 且其全部 Fourier 系数为 0。由 Parseval 恒等式 (对连续函数成立),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(h)|^2 = 0.$$

因 $|h|^2$ 连续非负且积分为 0, 得 $h \equiv 0$, 即 $f \equiv g$ 。(若未假设 Parseval 等式, 也可用 Fejér 核: h 的 Fourier 级数的算术平均 (Fejér 平均) 一致收敛于 h , 而所有 Fejér 平均为 0, 故 $h \equiv 0$ 。) □



9. 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为全纯函数, 并且 $\operatorname{Im} f(z) > 0, \forall z \in \mathbb{C}$ 。求证: f 为常值函数。

解答 定义

$$g(z) = \frac{f(z) - i}{f(z) + i}.$$

因 $\operatorname{Im} f > 0, f(z) \neq -i, g$ 为整函数; 且

$$|g(z)|^2 = \frac{|f - i|^2}{|f + i|^2} = \frac{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f - 1)^2}{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f + 1)^2} = \frac{\operatorname{Im} f^2 - 2 \operatorname{Im} f + 1 + \dots}{\dots} < 1$$

(因 $(\operatorname{Im} f - 1)^2 < (\operatorname{Im} f + 1)^2$ 当 $\operatorname{Im} f > 0$), 故 $|g| < 1$ 于 $\mathbb{C}$, g 是有界整函数。由 Liouville 定理, g 为常数 c ($|c| < 1$), 从而

$$f(z) = \frac{i(1 + g(z))}{1 - g(z)} = \frac{i(1 + c)}{1 - c}$$

为常数。 ($1 - g(z) \neq 0$ 因 $|c| < 1$ 。)

□

10. 求

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh x} dx \quad \text{及} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sinh x} dx.$$

解答 第一个积分:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\cosh x} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} = 4 \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = 4 \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \quad (u = e^x) \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \pi. \end{aligned}$$

第二个积分 (被积函数为偶函数, $x = 0$ 处可去奇点):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sinh x} dx &= 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{2x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx = 4 \int_0^{\infty} x \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)x} dx \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(2k+1)x} dx = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 4 \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(其中 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 可由 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 得到; 逐项积分由单调收敛定理合法。)

□



北京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李雨恒



北京大学数学科学学院
2011 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的凹函数，经过点 $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{3}, 2)$ ，并且 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ，试作出 $y = f(x)$ 的图像。

解答 凹函数（上凸函数）的图像位于任意两点间弦的上方。分别取弦 $(0, 0) - (\frac{1}{3}, 2)$ 与 $(\frac{1}{3}, 2) - (1, 0)$ ，得

$$f(x) \geq g(x) := \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 3(1-x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

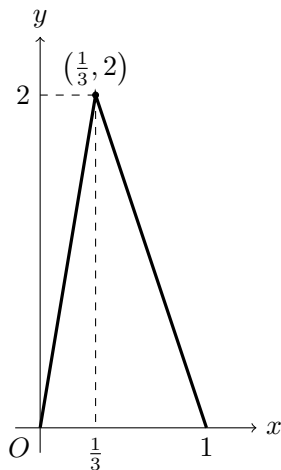
而折线 g 下方面积为两个三角形的面积之和：

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 1 = \int_0^1 f(x) dx.$$

由于 $f - g$ 连续且 $f - g \geq 0$ ，若存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使 $f(x_0) > g(x_0)$ ，则由连续性在 x_0 的某邻域内 $f > g$ ，从而 $\int_0^1 f > \int_0^1 g = 1$ ，矛盾。故 $f \equiv g$ ，即 f 的图像就是连接 $(0, 0), (\frac{1}{3}, 2), (1, 0)$ 的折线：

$$f(x) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 3(1-x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

图像如下：



□

2. (1) 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1)$ 。证明：

$$\forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}, \exists \xi \in [0, 1 - \alpha], \text{ 使得 } f(\xi + \alpha) = f(\xi).$$

(2) 证明：

$$\begin{aligned} & \forall 0 < \alpha < 1, \frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}, \exists g(x) \in C[0, 1], g(0) = g(1), \\ & \text{满足 } \forall x \in [0, 1 - \alpha], g(x + \alpha) - g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

解答 (1) 设 $n = \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}$ 。令

$$F(x) = f(x + \alpha) - f(x), \quad x \in [0, 1 - \alpha],$$



则 $F \in C[0, 1 - \alpha]$, 且由 $n\alpha = 1$ 得

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(k\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} [f((k+1)\alpha) - f(k\alpha)] = f(1) - f(0) = 0.$$

若 F 在 $[0, 1 - \alpha]$ 上无零点, 则由连续性 F 恒正或恒负; 但上式表明 $F(0), F(\alpha), \dots, F((n-1)\alpha)$ 这 n 个数之和为 0, 不可能同号。故存在 $\xi \in [0, 1 - \alpha]$ 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi + \alpha) = f(\xi)$ 。

(2) 设 $n = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$, $\beta = 1 - n\alpha$ 。因 $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, 故 $0 < \beta < \alpha$ 。在 $[0, 1]$ 上按下述结点作分段线性连续函数 g :

$$0 < \beta < \alpha < \alpha + \beta < 2\alpha < \dots < n\alpha < n\alpha + \beta = 1,$$

规定

$$g(k\alpha) = k, \quad g(k\alpha + \beta) = k - n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

特别地 $g(0) = g(n\alpha + \beta) = g(1) = 0$, 满足端点条件。现在验证对一切 $x \in [0, 1 - \alpha]$ 有 $g(x + \alpha) - g(x) = 1$ 。

当 $x \in [k\alpha, k\alpha + \beta]$ ($0 \leq k \leq n-1$) 时,

$$g(x) = k - \frac{n}{\beta}(x - k\alpha),$$

而 $x + \alpha \in [(k+1)\alpha, (k+1)\alpha + \beta]$, 故

$$g(x + \alpha) = k + 1 - \frac{n}{\beta}(x - k\alpha) \implies g(x + \alpha) - g(x) = 1.$$

当 $x \in [k\alpha + \beta, (k+1)\alpha]$ ($0 \leq k \leq n-2$) 时,

$$g(x) = k - n + \frac{n+1}{\alpha - \beta}(x - k\alpha - \beta),$$

而 $x + \alpha \in [(k+1)\alpha + \beta, (k+2)\alpha]$, 故

$$g(x + \alpha) = k + 1 - n + \frac{n+1}{\alpha - \beta}(x - k\alpha - \beta) \implies g(x + \alpha) - g(x) = 1.$$

最后 $x \in [(n-1)\alpha + \beta, 1 - \alpha]$ 时只有 $x = 1 - \alpha = (n-1)\alpha + \beta$ 一点, 此时

$$g(1) - g(1 - \alpha) = 0 - ((n-1) - n) = 1.$$

综上, 对一切 $x \in [0, 1 - \alpha]$ 有 $g(x + \alpha) - g(x) = 1 \neq 0$, 且 $g \in C[0, 1]$, $g(0) = g(1)$ 。命题得证。□

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内连续, 以下说法是否成立?

(1) 若 $D_+f(x_0)$ 存在, 则 $D_0f(x_0)$ 存在。

(2) 若 $D_0f(x_0)$ 存在, 则 $D_-f(x_0)$ 存在。

其中

$$\begin{aligned} D_+f(x_0) &= \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \\ D_0f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ D_-f(x_0) &= \lim_{\substack{x_1, x_2 \rightarrow x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0}} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

解答 两个说法都成立。



(1) 设 $D_+f(x_0) = L$ 。由定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x_1 \neq x_2$ 且 $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) > 0$ 时,

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - L \right| < \varepsilon.$$

固定 h ($0 < |h| < \delta$), 取 $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + h'$, 其中 h' 与 h 同号且 $0 < |h'| < \delta, h' \neq h$ 。则上式对一切这样的 h' 成立。令 $h' \rightarrow 0$, 由 f 在 x_0 连续得 $f(x_0 + h') \rightarrow f(x_0)$, 故

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + h')}{h - h'} \rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

从而 $\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - L \right| \leq \varepsilon$ 。由 h ($0 < |h| < \delta$) 及 ε 的任意性,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L,$$

即 $D_0f(x_0) = f'(x_0) = L$ 存在。故 (1) 成立。

(2) 设 $f'(x_0) = L$, 则

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \quad r(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_0).$$

当 $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) < 0$ 时, $x_1 - x_0$ 与 $x_2 - x_0$ 异号, 故 $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|$ 。于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - L \right| &= \frac{|r(x_1)(x_1 - x_0) - r(x_2)(x_2 - x_0)|}{|x_1 - x_2|} \\ &\leq \frac{|r(x_1)||x_1 - x_0| + |r(x_2)||x_2 - x_0|}{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|} \leq |r(x_1)| + |r(x_2)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(当 $x_1, x_2 \rightarrow x_0$)。故 $D_-f(x_0) = L = f'(x_0)$ 存在。故 (2) 成立。

注: 事实上 $D_-f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 的存在性等价; 而 $f'(x_0)$ 存在并不保证 $D_+f(x_0)$ 存在。例如 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$, 则 $f'(0) = 0$, 但当 $x_1, x_2 > 0$ 时由拉格朗日中值定理, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$

(ξ 介于 x_1, x_2 之间), 而 $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ 在 0 附近无界振荡, 故 $D_+f(0)$ 不存在。□

4. 设 $a_n \geq 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散。证明: 存在数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$b_n, c_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty$$

使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \text{ 发散}.$$

解答 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$, 可选取严格递增的正整数列 $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \cdots$, 使得每一块

$$B_k = \{N_{k-1} + 1, N_{k-1} + 2, \dots, N_k\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

上成立 $T_k := \sum_{n \in B_k} a_n^2 \geq 1$ 。下面在块 B_k 上分别定义 c_n, b_n 。

构造 $\{c_n\}$: 当 $n \in B_k$ 时令

$$c_n = \frac{a_n}{kT_k} \geq 0.$$

则

$$\sum_{n \in B_k} a_n c_n = \frac{1}{kT_k} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k},$$



故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty;$$

而

$$\sum_{n \in B_k} c_n^2 = \frac{1}{k^2 T_k^2} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k^2 T_k} \leq \frac{1}{k^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

构造 $\{b_n\}$: 当 $n \in B_k$ 时令

$$b_n = \frac{a_n}{k^2 T_k} \geq 0.$$

则

$$\sum_{n \in B_k} a_n b_n = \frac{1}{k^2 T_k} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty;$$

而

$$\sum_{n \in B_k} b_n^2 = \frac{1}{k^4 T_k^2} \sum_{n \in B_k} a_n^2 = \frac{1}{k^4 T_k} \leq \frac{1}{k^4},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < +\infty.$$

命题得证。 □

5. 设

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$$

A_{m+n} 为 $m+n$ 阶方阵, 前 m 行是 $f(x)$ 的系数, 后 n 行是 $g(x)$ 的系数, 即

$$A_{m+n} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\ & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & & \\ & 1 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix}$$

证明: $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式的次数等于 $m+n - \text{rank}(A_{m+n})$ 。

解答 记 $P_j = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq j\}$, 则 $\dim P_j = j+1$ 。考虑线性映射

$$\varphi: P_{m-1} \oplus P_{n-1} \longrightarrow P_{m+n-1}, \quad (u, v) \mapsto uf + vg.$$

在基 $\{x^{m-1}, \dots, x, 1; x^{n-1}, \dots, x, 1\}$ 与 $\{x^{m+n-1}, \dots, x, 1\}$ 下, φ 的矩阵正是 A_{m+n} (其各列为

$$x^{m-1}f, \dots, f, x^{n-1}g, \dots, g$$



的系数, 即 Sylvester 矩阵), 故

$$\text{rank}(A_{m+n}) = \dim \text{Im } \varphi.$$

设 $d = \gcd(f, g)$, $\deg d = r$, 且 $f = dp$, $g = dq$, 其中 $\gcd(p, q) = 1$, $\deg p = n - r$, $\deg q = m - r$ 。对 $(u, v) \in \ker \varphi$, 有 $uf + vg = 0$, 即 $up = -vq$ 。由 $\gcd(p, q) = 1$ 得 $p \mid v$, 设 $v = ph$, 则 $u = -qh$, 且

$$\deg u = \deg q + \deg h \leq m - 1 \implies \deg h \leq (m - 1) - (m - r) = r - 1.$$

反之, 任取 $h \in P_{r-1}$, $(-qh, ph)$ 满足 $(-qh)f + (ph)g = d(-qhp + phq) = 0$, 故 $(-qh, ph) \in \ker \varphi$ 。因此

$$\ker \varphi = \{(-qh, ph) : h \in P_{r-1}\} \cong P_{r-1}, \quad \dim \ker \varphi = r.$$

由维数公式,

$$\text{rank}(A_{m+n}) = \dim(P_{m-1} \oplus P_{n-1}) - r = m + n - r,$$

故

$$\deg \gcd(f, g) = r = m + n - \text{rank}(A_{m+n}).$$

□

6. (1) 设 U 是 $ABX = 0$ 的基础解系, 其中 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, X 是 $p \times 1$ 列向量, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $W = \{Y = BX \mid X \in U\}$ 。证明: W 的维数等于 $\text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$ 。
(2) 证明: 对任意矩阵 A, B, C , 有

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC).$$

解答 (1) 记 $U = \{X \in \mathbb{R}^p : ABX = 0\} = \ker(AB)$ 。考虑限制映射

$$L : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad X \mapsto BX,$$

则 $W = \text{Im } L$ 。由核像维数公式,

$$\dim W = \dim U - \dim \ker L.$$

因 $U = \ker(AB)$, 故 $\dim U = p - \text{rank}(AB)$; 又 $\ker L = \{X \in \ker(AB) : BX = 0\} = \ker(AB) \cap \ker B = \ker B$ (显然 $\ker B \subseteq \ker(AB)$), 故 $\dim \ker L = \dim \ker B = p - \text{rank}(B)$ 。于是

$$\dim W = (p - \text{rank}(AB)) - (p - \text{rank}(B)) = \text{rank}(B) - \text{rank}(AB).$$

(2) 先用秩-零化度公式给出一个基本恒等式: 对矩阵 X, Y ,

$$\text{rank}(XY) = \dim \text{Im}(XY) = \dim X(\text{Im } Y) = \dim \text{Im } Y - \dim(\ker X \cap \text{Im } Y) = \text{rank } Y - \dim(\ker X \cap \text{Im } Y).$$

分别取 $(X, Y) = (A, B)$ 与 $(X, Y) = (A, BC)$, 得

$$\text{rank}(AB) = \text{rank } B - \dim(\ker A \cap \text{Im } B),$$

$$\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC) - \dim(\ker A \cap \text{Im}(BC)).$$

由于 $\text{Im}(BC) = B(\text{Im } C) \subseteq \text{Im } B$, 故

$$\dim(\ker A \cap \text{Im}(BC)) \leq \dim(\ker A \cap \text{Im } B).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{rank}(ABC) &= \text{rank}(BC) - \dim(\ker A \cap \text{Im}(BC)) \\ &\geq \text{rank}(BC) - \dim(\ker A \cap \text{Im } B) \\ &= \text{rank}(BC) - \text{rank } B + \text{rank}(AB). \end{aligned}$$



移项即得

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC).$$

□

7. 设 A, B 是 n 阶方阵, A, B 乘法可交换, B 是幂零矩阵, 证明: $A + B$ 和 A 有相同的特征多项式。

解答 (若矩阵是实矩阵, 则先视作复矩阵, 特征多项式不变。) 先证一个引理:

引理 设 A, B 是复数域上可交换的 n 阶方阵, 则存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同为上三角矩阵。

引理的证明 对 n 归纳。取 A 的一个特征值 λ , 考虑特征子空间 $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ 。对任意 $v \in V_\lambda$,

$$(A - \lambda I)Bv = B(A - \lambda I)v = 0,$$

故 $Bv \in V_\lambda$, 即 V_λ 是 B 的不变子空间。在 V_λ 上取 B 的一个特征向量 $v_1 \neq 0$, 则 v_1 是 A, B 的公共特征向量。将 v_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 并对商空间使用归纳假设 (A, B 在商空间上诱导的线性变换仍可交换), 即得结论。

回到本题。由引理, 在适当的基下 A, B 同时上三角化: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 均为上三角矩阵, 对角元分别为 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 与 $b_{11}, \dots, b_{nn}$ 。因 B 幂零, 其特征值全为 0, 故 $b_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, n$)。此时 $A + B$ 也是上三角矩阵, 对角元为 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 。于是

$$\det(\lambda I - (A + B)) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{ii}) = \det(\lambda I - A),$$

即 $A + B$ 与 A 有相同的特征多项式。

□

8. 设二次曲面 $\Gamma: x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 平面 $\Sigma(\theta)$ 过直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

且与平面 $z = 0$ 夹角为 θ 。

(1) 当 θ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 连续变化时, $\Sigma(\theta) \cap \Gamma$ 对应的曲线是哪种类型?

(2) 证明: 若平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 与 Γ 的交线为两条直线, 则 $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ 。

解答 (1) 过直线 $\begin{cases} x = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 的平面束为 $x = 1 + tz$ ($t \in \mathbb{R}$), 其中 $t = \tan \theta \geq 0$ (平面 $x = 1 + tz$ 的法向量 $(1, 0, -t)$ 与 z 轴夹角 θ)。将 $x = 1 + tz$ 代入 Γ 的方程:

$$(1 + tz)^2 + y^2 - z^2 = 1 \implies y^2 + (t^2 - 1)z^2 + 2tz = 0.$$

这是平面 $\Sigma(\theta)$ 上以 y, z 为参数的二次曲线 (均过点 $(1, 0, 0)$)。按 t 分类:

- $t = 0$ ($\theta = 0$): $y^2 - z^2 = 0$, 即 $y = \pm z$, 为两条相交直线;
- $0 < t < 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$): 二次型 $y^2 + (t^2 - 1)z^2$ 不定, 为双曲线;
- $t = 1$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$): $y^2 + 2z = 0$, 为抛物线;
- $t > 1$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$): 二次型 $y^2 + (t^2 - 1)z^2$ 正定, 为椭圆;
- $\theta = \frac{\pi}{2}$: 平面为 $z = 0$, 交线为圆 $x^2 + y^2 = 1$ (椭圆的极限情形)。



(2) 设平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 与 Γ 的交线为两条直线 l, l' 。先证 l 与 l' 相交。单叶双曲面上的直线(直母线)分属两族, 同族直线彼此异面, 异族直线彼此相交; 而 l, l' 同在一个平面内, 不可能异面, 故 l, l' 必相交, 设交点为 $P = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ 。

Γ 在 P 点的切平面为

$$x_0x + y_0y - z_0z = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1.$$

由于 l, l' 是 Γ 上过 P 的两条直线, 它们都落在该切平面内(过曲面上一点的曲面切线必在切平面内), 故 Π 就是切平面。于是存在 $\lambda \neq 0$ 使

$$(A, B, C, D) = \lambda(x_0, y_0, -z_0, -1).$$

因此

$$A^2 + B^2 = \lambda^2(x_0^2 + y_0^2),$$

$$C^2 + D^2 = \lambda^2(z_0^2 + 1) = \lambda^2(z_0^2 + (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2)) = \lambda^2(x_0^2 + y_0^2).$$

故 $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$ 。

□

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 依次验证下列条件能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(1) $f(x) \in C^\infty[a, +\infty)$ 。

(2) $\int_0^{+\infty} |f(x)|^3 dx$ 收敛。

(3) $\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$ 收敛。

(4) $\int_0^{+\infty} |f''(x)| dx$ 收敛。

解答 以下把 f 视为 $[0, +\infty)$ 上的函数(题设积分限为 0 到 $+\infty$)。结论: (1)(2) 不能推出, (3)(4) 能推出。

(1) **不能推出**。取 C^∞ 鼓包函数 $\varphi(x): \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), 0 \leq \varphi \leq 1, \text{supp } \varphi \subset (-1, 1), \varphi(0) = 1$ (例如 $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \chi_{|x|<1}$ 再乘常数)。令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n^2(x-n)).$$

第 n 个鼓包支在 $[n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}]$ 上, 彼此不相交, 故 $f \in C^\infty[0, +\infty)$, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int \varphi(n^2(x-n)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int \varphi < \infty,$$

但 $f(n) = 1 \not\rightarrow 0$ 。

(2) **不能推出**。作高为 $h_n = n^{1/4}$ 、底宽为 $2n^{-2}$ 的三角形尖峰: 当 $n \geq 2$ 时令

$$f(x) = h_n(1 - n^2|x - n|), \quad x \in [n - n^{-2}, n + n^{-2}],$$

其余处 $f(x) = 0$, 各尖峰相接处取 0。则 f 连续, 且

$$\int_0^{+\infty} f dx = \sum_n h_n n^{-2} = \sum_n n^{1/4} \cdot n^{-2} = \sum_n n^{-7/4} < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |f|^3 dx = \sum_n h_n^3 n^{-2} = \sum_n n^{3/4} \cdot n^{-2} = \sum_n n^{-5/4} < +\infty,$$



但 $f(n) = n^{1/4} \rightarrow +\infty$ (甚至连有界性都不成立)。

(3) 能推出。设 $\int_0^{+\infty} |f'|^2 dx = M^2 < +\infty$ 。若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 与 $x_k \rightarrow +\infty$ 使 $|f(x_k)| \geq \varepsilon$ 。对 $x \geq x_k$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|f(x) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^x f' \right| \leq \sqrt{x - x_k} \left(\int_{x_k}^{+\infty} |f'|^2 \right)^{1/2} \leq M \sqrt{x - x_k}.$$

取 $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2$, 则在 $[x_k, x_k + \delta]$ 上 $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 。因 f 连续, f 在 $[x_k, x_k + \delta]$ 上保号, 故

$$\left| \int_{x_k}^{x_k + \delta} f(x) dx \right| \geq \frac{\varepsilon \delta}{2} > 0.$$

由反常积分的 Cauchy 收敛准则, 当 R 充分大时对一切 $v > u > R$ 有 $|\int_u^v f| < \frac{\varepsilon \delta}{2}$, 与上式 ($x_k \rightarrow +\infty$) 矛盾。故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

(4) 能推出。因 $\int_0^{+\infty} |f''| < +\infty$, 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(x) dx =: L$$

存在。若 $L \neq 0$, 不妨 $L > 0$, 则当 x 充分大时 $f'(x) \geq \frac{L}{2}$, 从而 $f(x) \rightarrow +\infty$, 与 $\int_0^{+\infty} f$ 收敛矛盾 (可用 Cauchy 准则)。故 $L = 0$ 。于是

$$f'(x) = - \int_x^{+\infty} f''(t) dt,$$

从而 $|f'(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f''| = \omega(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$)。若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 与 $x_k \rightarrow +\infty$ 使 $|f(x_k)| \geq \varepsilon$ 。在 $[x_k, x_k + 1]$ 上,

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \sup_{t \in [x_k, x_k + 1]} |f'(t)| \leq \omega(x_k) \rightarrow 0,$$

故 k 充分大时 $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 于 $[x_k, x_k + 1]$ 上成立, 且 f 保号, 从而 $\left| \int_{x_k}^{x_k + 1} f \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, 与 Cauchy 收敛准则矛盾。故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。□

10. 求下述几何体的体积:

$$-1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1, \quad -1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1.$$

解答 记 $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : -1 \leq x_i \leq 1, -1 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$ 。由对称性,

$$\text{vol}(\Omega) = 2^n - 2 \text{vol}(C_+), \quad C_+ = \left\{ x \in [-1, 1]^n : \sum_{i=1}^n x_i > 1 \right\}$$

(两个“角” C_+ 与 $\{\sum x_i < -1\}$ 体积相等且不相交)。作替换 $y_i = 1 - x_i$, 则 $y_i \in [0, 2]$, 且 $\sum x_i > 1 \iff \sum y_i < n - 1$, 故

$$\text{vol}(C_+) = \text{vol}\left\{ y \in [0, 2]^n : \sum_{i=1}^n y_i \leq n - 1 \right\}.$$

用容斥原理计算上式。记 $E_i = \{y_i > 2\}$ 。 $\mathbb{R}^n$ 中单纯形 $\{y_i \geq 0, \sum y_i \leq s\}$ 的体积为 $\frac{s^n}{n!}$ 。于是

$$\text{vol}\left\{ y \in [0, 2]^n : \sum y_i \leq n - 1 \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n - 1 - 2k)^n,$$



其中第 k 项对应“恰有某 k 个坐标 ≥ 2 ”的容斥（此时其余坐标之和 $\leq n-1-2k$ ，当 $n-1-2k < 0$ 时体积为 0，故 $k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ）。因此

$$\text{vol}(\Omega) = 2^n - \frac{2}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-1-2k)^n.$$

例如 $n=1$ 时体积为 2； $n=2$ 时为 $4-2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ ； $n=3$ 时为 $8-2 \cdot \frac{8}{6} = \frac{16}{3}$ 。□

11. 对任意 n 维列向量 α, β ， $\alpha^T A \beta = 0$ 当且仅当 $\beta^T A \alpha = 0$ 。证明： A 为对称矩阵或者反对称矩阵。

解答 记双线性型 $B(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta$ 。注意 $\beta^T A \alpha$ 是数，故 $\beta^T A \alpha = \alpha^T A^T \beta$ 。题设等价于

$$B(\alpha, \beta) = 0 \iff B(\beta, \alpha) = 0 \quad (\forall \alpha, \beta).$$

先证一个引理：若双线性型 B 满足上式，则 B 或对称或反对称。

若 $B(x, x) = 0$ 对一切 x 成立，则

$$0 = B(x+y, x+y) = B(x, y) + B(y, x),$$

故 $B(x, y) = -B(y, x)$ ， B 反对称。

否则存在 x 使 $B(x, x) \neq 0$ ，不妨设 $B(x, x) = 1$ 。对任意 y ，因

$$B(y - B(y, x)x, x) = B(y, x) - B(y, x)B(x, x) = 0,$$

由题设条件得 $B(x, y - B(y, x)x) = 0$ ，即 $B(x, y) = B(y, x)$ 。故 $B(x, \cdot) = B(\cdot, x)$ 。

任取 y, z 。若 $B(y, x) \neq 0$ ，取 $s = \frac{B(y, z)}{B(y, x)}$ ，则

$$B(y, z - sx) = B(y, z) - sB(y, x) = 0 \implies B(z - sx, y) = 0 \implies B(z, y) = sB(x, y) = sB(y, x) = B(y, z).$$

若 $B(y, x) = 0$ （此时 $B(x, y) = 0$ ），取 $s = B(y, z) + B(x, z)$ ，则

$$B(y + x, z - sx) = B(y, z) + B(x, z) - sB(x, x) = 0$$

（用到 $B(y, x) = 0$ 、 $B(x, x) = 1$ ），由题设条件得 $B(z - sx, y + x) = 0$ ，即

$$B(z, y) + B(z, x) - sB(x, y) - sB(x, x) = 0 \implies B(z, y) = s - B(z, x) = B(y, z) + B(x, z) - B(z, x) = B(y, z),$$

其中最后一步用到 $B(x, z) = B(z, x)$ 。故对一切 y, z 有 $B(y, z) = B(z, y)$ ， B 对称。引理得证。

于是 $A^T = A$ 或 $A^T = -A$ ，即 A 为对称矩阵或反对称矩阵。□

12. 平面上三条直线 AA', BB', CC' 互相平行， AB 与 $A'B'$ 交于点 D ， BC 与 $B'C'$ 交于点 E ， CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明： D, E, F 三点共线。

解答 这是 Desargues 定理的平行情形（视 AA', BB', CC' 交于无穷远点）。下面用向量方法直接证明。

设三条平行线的公共方向为 $w \neq 0$ ，记

$$A' = A + aw, \quad B' = B + bw, \quad C' = C + cw.$$

先求 $D = AB \cap A'B'$ 。设 $D = A + t(B - A) = A' + t'(B' - A')$ ，即

$$A + t(B - A) = A + aw + t'[(B - A) + (b - a)w].$$



由于 $B - A$ 与 w 线性无关, 比较系数得 $t = t'$, 且 $a + t'(b - a) = 0$, 故 $t = \frac{a}{a - b}$ (设 $a \neq b$, 退化情形见下)。于是

$$D = A + \frac{a}{a - b}(B - A) = \frac{bA - aB}{b - a}.$$

同理

$$E = \frac{cB - bC}{c - b}, \quad F = \frac{aC - cA}{a - c}.$$

现在

$$(b - a)D + (c - b)E + (a - c)F = (bA - aB) + (cB - bC) + (aC - cA) = 0,$$

且系数之和 $(b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$ 。故 D, E, F 作为仿射空间的点仿射相关, 即三点共线 (若两两不同则所在直线唯一)。

若出现 $a = b$ 等退化情形 (例如 $a = b$ 时 $AB \parallel A'B'$, D 在无穷远处), 可对参数 a, b, c 作小扰动后取极限, 结论仍成立; 亦可直接在射影平面中用 Desargues 定理。证毕。 $\square$



北京大学数学科学学院
2012 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (25 分) $\mathbb{R}^n$ 中集合 S 称为紧集, 如果对于 S 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个元素也覆盖 S 。证明: $S \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集的充分必要条件是 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集。

解答 必要性 (S 紧 $\implies S$ 有界闭)。

先证 S 有界: 考虑开覆盖 $\{B(0, k) : k \in \mathbb{N}\}$, 由紧性取有限子覆盖, 故 $S \subseteq B(0, K)$, S 有界。

再证 S 是闭集, 即证 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 是开集。任取 $p \notin S$, 对每个 $q \in S$, 因 $p \neq q$, 取 $r_q = \frac{|p-q|}{2}$, 则 $\{B(q, r_q) : q \in S\}$ 是 S 的开覆盖。由紧性有有限子覆盖 $\{B(q_i, r_{q_i})\}_{i=1}^k$ 。令 $\delta = \min_i r_{q_i} > 0$, 断言 $B(p, \delta) \cap S = \emptyset$ 。事实上若 $s \in B(p, \delta) \cap S$, 则 $s \in B(q_i, r_{q_i})$ 对某个 i 成立, 从而

$$|p - q_i| \leq |p - s| + |s - q_i| < \delta + r_{q_i} \leq 2r_{q_i} = |p - q_i|,$$

矛盾。故 $B(p, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$, S 为闭集。

充分性 (S 有界闭 $\implies S$ 紧)。

先证闭方体 $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ 是紧集。设 $\{U_\alpha\}$ 为 Q 的开覆盖且无有限子覆盖。将 Q 的各边二等分, 得 2^n 个闭子方体, 其中必有一个子方体不能被有限个 U_α 覆盖 (否则 Q 被有限覆盖)。如此反复二分, 得闭方体套 $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \cdots$, $\text{diam}(Q_k) \rightarrow 0$, 且每个 Q_k 都不能被有限覆盖。由闭集套定理, $\bigcap_k Q_k = \{p\}$ 。取 α_0 使 $p \in U_{\alpha_0}$, 因 U_{α_0} 开且 $\text{diam}(Q_k) \rightarrow 0$, 当 k 充分大时 $Q_k \subseteq U_{\alpha_0}$, 与 Q_k 不能被有限覆盖矛盾。故 Q 紧。

现在设 S 为有界闭集, 则 S 含于某个闭方体 Q 。设 $\{U_\alpha\}$ 为 S 的任一开覆盖, 则 $\{U_\alpha\} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus S\}$ 是 Q 的开覆盖。由 Q 的紧性有有限子覆盖, 其中去掉 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 后, 得到覆盖 S 的有限个 U_α 。故 S 紧。
□

2. (25 分) 叙述和证明多元函数带 Lagrange 余项的二阶 Taylor 展开公式。

解答 叙述: 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $f \in C^2(U)$, $a, a+h \in U$ 且线段 $\overline{a, a+h} \subseteq U$ 。则存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a+\theta h) h,$$

即

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h) h_i h_j,$$

其中 H_f 为 f 的 Hesse 矩阵。

证明: 作一元辅助函数

$$\varphi(t) = f(a+th), \quad t \in [0, 1],$$

则 $\varphi \in C^2[0, 1]$ 。由一元函数的带 Lagrange 余项 Taylor 公式 (Maclaurin 展开到二阶), 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(\theta).$$

由链式法则,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i = \nabla f(a+th) \cdot h, \\ \varphi''(t) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) h_i h_j = h^T H_f(a+th) h. \end{aligned}$$



代入即得

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a + \theta h) h.$$

□

3. (20 分) 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 。

解答 积分区域为 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$, 等价于

$$0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq y.$$

交换积分次序:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \left(\int_{y^2}^y dx \right) dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy \\ &= \int_0^1 (1 - y) \sin y dy = \left[-(1 - y) \cos y - \sin y \right]_0^1 \\ &= -\sin 1 - (-1) = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

□

4. (20 分) 假定 $n \geq m > 1$, 问是否存在连续可导的映射 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $p \mapsto F(p)$, 使得 F 的 Jacobi 矩阵的秩处处为 m , 而 $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$? 为什么? 这里 0 表示 $\mathbb{R}^m$ 的原点。

解答 不存在。反证: 设这样的 F 存在。

由 $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$, 存在 $R > 0$, 当 $|p| \geq R$ 时 $|F(p)| \geq 2|F(0)|$ 。因 F 连续, 连续函数 $|F|$ 在紧集 $\overline{B(0, R)}$ 上取得最小值 m_0 , 且 $m_0 \leq |F(0)|$ 。由于球外 $|F| \geq 2|F(0)| \geq |F(0)| \geq m_0$, 故 m_0 就是 $|F|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的全局最小值。设其在 p_0 处取得, 则 p_0 是 $|F|^2$ 的极小点, 由一阶条件

$$0 = \nabla(|F|^2)(p_0) = 2 dF(p_0)^T F(p_0),$$

即对一切 $v \in \mathbb{R}^n$,

$$F(p_0) \cdot dF(p_0) v = 0.$$

这说明 $\text{Im } dF(p_0) \subseteq F(p_0)^\perp$, 而 $F(p_0)^\perp$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 $m-1$ 维子空间, 故 $\text{rank } dF(p_0) \leq m-1$ 。但题设 $\text{rank } dF(p_0) = m$, 矛盾。

(注: $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$ 的含义是: $\forall R > 0, \exists M > 0$, 当 $|p| > M$ 时 $|F(p)| > R$ 。)

□

5. (20 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是实轴 $\mathbb{R}$ 上一列一致有界的连续函数, 满足对于任意闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0.$$

证明: 对于实轴上的任意闭区间 $[c, d]$, 以及 $[c, d]$ 上绝对可积的函数 $g(x)$, 恒有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d g(x) f_n(x) dx = 0.$$

(注: 原题积分下限写为 a , 但应为 c , 此处已按 $[c, d]$ 修正。)

解答 设 $\sup_n \|f_n\|_\infty \leq M < +\infty$ 。先对阶梯函数证明结论。设 $h = \sum_{j=1}^r c_j \chi_{I_j}$, 其中 $I_j \subset [c, d]$ 为区间, 则

$$\int_c^d h(x) f_n(x) dx = \sum_{j=1}^r c_j \int_{I_j} f_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$



再证一般情形。 g 在 $[c, d]$ 上绝对可积 (即 Riemann 可积), 故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 h 使 $\int_c^d |g - h| < \frac{\varepsilon}{2M}$ 。于是

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d g f_n \right| &\leq \left| \int_c^d h f_n \right| + \left| \int_c^d (g - h) f_n \right| \\ &\leq \left| \int_c^d h f_n \right| + M \int_c^d |g - h| < \left| \int_c^d h f_n \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

由第一步, $\exists N$, 当 $n > N$ 时 $\left| \int_c^d h f_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 故 $n > N$ 时 $\left| \int_c^d g f_n \right| < \varepsilon$ 。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d g(x) f_n(x) dx = 0$ 。
□

6. (20 分) 设 $F(x, y, z)$ 和 $G(x, y, z)$ 都是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上连续可导的函数, 满足映射 $(x, y, z) \mapsto (F(x, y, z), G(x, y, z))$ 的 Jacobi 矩阵的秩在 D 上处处为 1, 而函数 $F(x, y, z)$ 的梯度向量 $\text{grad } F$ 在 D 上处处不为零。假定在点 $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ 。证明: 存在点 p_0 的邻域 $U \subset D$, 使得在 U 上, 函数方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

与函数方程 $F(x, y, z) = 0$ 是同解方程。问在 D 上这两组方程是否也是同解方程, 为什么?

解答 先证局部结论。由秩处处为 1 且 $\nabla F \neq 0$, ∇G 与 ∇F 处处线性相关, 故

$$\nabla G = \lambda \nabla F, \quad \lambda = \frac{\nabla G \cdot \nabla F}{|\nabla F|^2} \in C(D).$$

设 $\gamma(t)$ 为落在某等值面 $F = c$ 上的任一条 C^1 曲线, 则

$$\frac{d}{dt} G(\gamma(t)) = \nabla G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \lambda \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0,$$

即 G 在 F 的每个等值面上局部为常数。

由 $\nabla F(p_0) \neq 0$ 及隐函数定理, $F = 0$ 在 p_0 附近确定一张连通的光滑曲面 S 。 $G|_S$ 在 S 上局部为常数, $S \cap U$ 连通, 故 $G|_{S \cap U} \equiv G(p_0) = 0$ 。因此在 U 上 $F = 0$ 与 $\{F = 0, G = 0\}$ 同解。

在 D 上一般不同解。反例: 取

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}, \quad F(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1.$$

则 D 是 (连通) 开区域, $\nabla F = (2x, -2y, 0)$ 在 D 上处处非零, $F = 0$ 是双曲柱面 $x^2 - y^2 = 1$, 由两叶 $C_+ := \{x = \sqrt{1 + y^2}\}$ 与 $C_- := \{x = -\sqrt{1 + y^2}\}$ 组成。取光滑函数 $H_+, H_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足: $H_+(0) = 0, H_-(0) = 1$, 且当 $t \leq -1$ 时 $H_+(t) = H_-(t)$ 、 $H'_+(t) = H'_-(t)$ (例如取 $H_-(t) = H_+(t) + \varphi(t)$, 其中 H_+ 光滑且 $H_+(0) = 0$ 、 $H_+ \equiv t$ 于 $(-\infty, -1]$, φ 光滑且 $\text{supp } \varphi \subseteq (-1, \infty)$ 、 $\varphi(0) = 1$)。定义

$$G(x, y, z) = \begin{cases} H_+(F(x, y, z)), & x > 0, \\ H_-(F(x, y, z)), & x < 0. \end{cases}$$

在 $\{x = 0\} \cap D$ 附近 $F = -y^2 - 1 \leq -1$, 故 H_+, H_- 及其导数在过渡处相等, $G \in C^1(D)$, 且 $\nabla G = H'_\pm(F) \nabla F$, Jacobi 矩阵的秩处处为 1。取 $p_0 = (1, 0, 0)$, 则 $F(p_0) = G(p_0) = H_+(0) = 0$ 。在 p_0 的小邻域内两组方程同解; 但在整个 D 上,

$$G|_{C_+} = H_+(0) = 0, \quad G|_{C_-} = H_-(0) = 1 \neq 0,$$

故 $\{F = 0\}$ 比 $\{F = 0, G = 0\}$ 多出一整叶 C_- , 两组方程不同解。
□



7. (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是区间 (a, b) 上 n 阶可导的函数, 如果在点 $x_0 \in (a, b)$, 成立 $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处 k 阶相切。现设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 中互不相同的点 $x_1, \dots, x_t$ 处分别 $k_1 - 1, \dots, k_t - 1$ 阶相切, 而 $n = k_1 + \dots + k_t$ 。证明: 对于任意 $x \in (a, b)$, 存在 $y \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)}(y) - g^{(n)}(y)}{n!} (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_t)^{k_t}.$$

解答 令 $h = f - g$, 则 $h^{(j)}(x_i) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, k_i - 1, i = 1, \dots, t$), 结论等价于: 对任意 $x \in (a, b)$, 存在 $y \in (a, b)$ 使

$$h(x) = \frac{h^{(n)}(y)}{n!} P(x), \quad P(x) = \prod_{i=1}^t (x - x_i)^{k_i}.$$

若 $x = x_i$ 对某个 i , 结论显然 (取 $y = x_i$, 两边均为 0)。以下设 $x \notin \{x_1, \dots, x_t\}$, 则 $P(x) \neq 0$ 。令

$$K = \frac{h(x)}{P(x)}, \quad H(t) = h(t) - KP(t).$$

则 $H(x) = 0$, 且对 $j = 0, \dots, k_i - 1$,

$$H^{(j)}(x_i) = h^{(j)}(x_i) - KP^{(j)}(x_i) = 0$$

(P 在 x_i 处有 k_i 重零点, 故 $P^{(j)}(x_i) = 0$)。于是 H 在 x 处有 1 重零点, 在 x_i 处至少有 k_i 重零点, 计重数共有至少 $1 + k_1 + \dots + k_t = n + 1$ 个零点。

由推广的 Rolle 定理 (H 在 (a, b) 内有 $n + 1$ 个计重数的零点, 则 $H^{(n)}$ 在 (a, b) 内有零点), 存在 $y \in (a, b)$ 使 $H^{(n)}(y) = 0$ 。注意 P 是 n 次首一多项式, $P^{(n)} \equiv n!$, 故

$$0 = H^{(n)}(y) = h^{(n)}(y) - K n! \implies h(x) = KP(x) = \frac{h^{(n)}(y)}{n!} P(x),$$

即

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(n)}(y) - g^{(n)}(y)}{n!} (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_t)^{k_t}.$$

□

8. (25 分) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, 且 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 的某个零化多项式 $g(x)$ 可分解为一次因式幂的乘积的形式:

$$g(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{t_i} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j).$$

证明: 若存在 $h(x) \in \mathbb{P}[x]$, 使得

$$(x - \lambda_i)^{t_i} \mid [h(x) - \lambda_i], \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

则

(1) $h(\mathcal{A})$ 可对角化;

(2) $h(\mathcal{A}) - \mathcal{A}$ 是幂零变换 (原文写“幂等变换”, 根据上下文此处应为幂零, 已按题意修正)。

解答 因 $g(\mathcal{A}) = 0$ 且因式 $(x - \lambda_i)^{t_i}$ 两两互素, 由多项式理论 (Bezout 恒等式与中国剩余定理), 有根子空间分解

$$V = \bigoplus_{i=1}^m V_i, \quad V_i = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{t_i}.$$

设 $(x - \lambda_i)^{t_i} \mid [h(x) - \lambda_i]$, 则存在 $q_i(x) \in \mathbb{P}[x]$ 使 $h(x) = \lambda_i + (x - \lambda_i)^{t_i} q_i(x)$ 。于是

$$h(\mathcal{A}) - \lambda_i \mathcal{I} = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{t_i} q_i(\mathcal{A}).$$



(1) 在 V_i 上, $(A - \lambda_i I)^{t_i} = 0$, 故 $h(A)|_{V_i} = \lambda_i I$ 。于是 $h(A)$ 在每个根子空间 V_i 上是纯量变换, 从而在 $V = \bigoplus V_i$ 上可对角化 (在每个 V_i 内任取一组基拼成 V 的基, $h(A)$ 在该基下为对角矩阵)。

(2) 在 V_i 上,

$$h(A) - A = \lambda_i I - A = -(A - \lambda_i I),$$

而 $(A - \lambda_i I)^{t_i}$ 在 V_i 上为零, 故 $h(A) - A$ 在每个 V_i 上幂零, 从而在 V 上幂零。证毕。 $\square$

9. (25 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, $D = AB - BA$ 且 D 与 A 乘法可交换, 证明 $D^n = O$ 。

解答 (实数情形可先视作复矩阵。) 由 $DA = AD$, 对任意 $k \geq 1$, D^{k-1} 与 A 可交换, 故

$$D^k = (AB - BA)D^{k-1} = ABD^{k-1} - BAD^{k-1} = ABD^{k-1} - BD^{k-1}A = A(BD^{k-1}) - (BD^{k-1})A,$$

即 D^k 是换位子, 从而

$$\text{tr}(D^k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

设 D 的特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_n$, 则

$$\sum_{j=1}^n \mu_j^k = \text{tr}(D^k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

由 Newton 恒等式, D 的特征多项式的各次系数 (初等对称多项式) 全为 0, 故其特征多项式为 x^n 。

由 Cayley-Hamilton 定理, $D^n = O$ 。 $\square$

10. (25 分) 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间, $W_1, \dots, W_k$ 为 V 的真子空间, 证明:

- (1) 存在 V 中的元素 α 不属于任何一个 W_j , $j = 1, \dots, k$;
- (2) 存在 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 满足 $\alpha_i \notin \bigcup_{j=1}^k W_j$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$;
- (3) 若 U 为 V 的真子空间, 令 $C_U = \{W \mid W \text{ 为 } V \text{ 的子空间且 } W \oplus U = V\}$, 则 C_U 中含有无穷多个元素。

解答 (以下设数域 $\mathbb{P}$ 为无限域; 对有限域命题 (1) 不成立, 例如 $\mathbb{F}_2^2$ 中三个一维子空间覆盖全空间。)

(1) 对 k 归纳。 $k = 1$ 时因 $W_1 \subsetneq V$, 取 $\alpha \in V \setminus W_1$ 即可。设已找到 $\alpha \notin \bigcup_{j < k} W_j$ 。若 $\alpha \notin W_k$, 得证; 若 $\alpha \in W_k$, 取 $\beta \notin W_k$ 。对每个 $j \leq k$, 考虑集合

$$T_j = \{t \in \mathbb{P} : \alpha + t\beta \in W_j\}.$$

当 $j < k$: 若 $t_1, t_2 \in T_j$ 且 $t_1 \neq t_2$, 则 $(t_1 - t_2)\beta \in W_j$, 故 $\beta \in W_j$, 进而 $\alpha = (\alpha + t_1\beta) - t_1\beta \in W_j$, 矛盾。故 $|T_j| \leq 1$ 。当 $j = k$: 若 $t_1 \neq t_2$ 均属于 T_k , 则 $\beta \in W_k$, 矛盾, 故 $|T_k| \leq 1$ 。于是 $\bigcup_{j=1}^k T_j$ 是有限集, 而 $\mathbb{P}$ 无限, 取 $t \notin \bigcup_{j=1}^k T_j$, 则 $\alpha + t\beta \notin \bigcup_{j=1}^k W_j$ 。

(2) 归纳构造。由 (1) 取 $\alpha_1 \notin \bigcup_j W_j$ 。若已取到线性无关的 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($m < n$), 每个 $\alpha_i \notin \bigcup_j W_j$, 则 $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 是 V 的真子空间。对有限个真子空间 $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, W_1, \dots, W_k$ 应用 (1), 得

$$\alpha_{m+1} \notin \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \cup \bigcup_{j=1}^k W_j.$$

故 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性无关且都不属于 $\bigcup_j W_j$ 。反复进行 n 次即得 V 的一组基。

(3) 设 $\dim U = s$, 则 $n - s =: r \geq 1$ 。取 U 的一个补空间 W_0 ($\dim W_0 = r$), 取非零线性泛函 $\varphi: W_0 \rightarrow \mathbb{P}$ 与 $0 \neq u_0 \in U$ 。对每个 $t \in \mathbb{P}$, 令

$$W_t = \{w + t\varphi(w)u_0 : w \in W_0\}.$$



W_t 是映射 $w \mapsto w + t\varphi(w)u_0$ 的像, 该映射是单射 (若 $w + t\varphi(w)u_0 = 0$, 则 $w \in W_0 \cap U = \{0\}$, 从而 $w = 0$), 故 $\dim W_t = \dim W_0 = r$ 。且 $W_t \cap U = \{0\}$: 若 $w + t\varphi(w)u_0 \in U$, 则 $w \in W_0 \cap U = \{0\}$ 。于是 $\dim(W_t + U) = r + s = n$, 即 $W_t \oplus U = V$, $W_t \in C_U$ 。

又 $t_1 \neq t_2$ 时 $W_{t_1} \neq W_{t_2}$: 取 w_0 使 $\varphi(w_0) = 1$, 若 $W_{t_1} = W_{t_2}$, 则 $w_0 + t_1 u_0 \in W_{t_2}$, 即存在 $w \in W_0$ 使 $w_0 + t_1 u_0 = w + t_2 \varphi(w)u_0$, 比较 U -分量得 $t_1 = t_2 \varphi(w)$, 比较 W_0 -分量得 $w = w_0$, 代入得 $t_1 = t_2$, 矛盾。由于 $\mathbb{P}$ 无限, C_U 含无穷多个元素。 $\square$

11. (25 分) 设 V 为 n 维欧氏空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正交变换。

(1) 证明: V 可以分解为一些 1 维或 2 维的两两正交的 $\mathcal{A}$ -子空间的直和 (即 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$, 其中 V_i 为 $\mathcal{A}$ 的维数为 1 或 2 的不变子空间, 且若 $i \neq j$, 则 $V_i \perp V_j$)。

(2) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 为 V 的两组标准正交基, 且

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)A.$$

证明:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_1, \eta_1) & \cos(\varepsilon_2, \eta_1) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_1) \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_2) & \cos(\varepsilon_2, \eta_2) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\varepsilon_1, \eta_m) & \cos(\varepsilon_2, \eta_m) & \cdots & \cos(\varepsilon_n, \eta_m) \end{pmatrix},$$

这里 (α, β) 表示向量 α, β 在欧氏空间中的夹角。

(3) 确定二维欧氏空间上的第一类正交矩阵及第二类正交矩阵的一般形式, 并由此给出 n 维欧氏空间上正交变换的相似标准形 (即某种简化的表示形式)。

解答 (1) 先证明: $\mathcal{A}$ 必有 1 维或 2 维不变子空间 W 。设 λ 为 $\mathcal{A}$ 的特征值, 因 $\mathcal{A}$ 正交, $|\lambda| = 1$ 。

- 若 $\lambda = \pm 1$ 为实特征值, 取实特征向量 v , 则 $W = \text{span}\{v\}$ 为 1 维不变子空间;
- 若 λ 非实, 设 $\lambda = e^{i\theta}$ ($\sin \theta \neq 0$), 取复特征向量 $v = u + iv'$ (u, v' 实)。由 $\mathcal{A}v = e^{i\theta}v$ 比较实虚部:

$$\mathcal{A}u = \cos \theta u - \sin \theta v', \quad \mathcal{A}v' = \sin \theta u + \cos \theta v',$$

故 $W = \text{span}\{u, v'\}$ 是 2 维不变子空间 (u, v' 线性无关: 若 $v' = cu$, 则 $\sin \theta = c \cos \theta$ 且 $\cos \theta = -c \sin \theta$, 即 $c = \tan \theta = -\cot \theta$, 矛盾)。

再证 $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。对 $x \in W^\perp$, $w \in W$,

$$\langle \mathcal{A}x, w \rangle = \langle x, \mathcal{A}^T w \rangle = \langle x, \mathcal{A}^{-1} w \rangle = 0$$

($\mathcal{A}^{-1}w \in W$), 故 $\mathcal{A}x \in W^\perp$ 。于是对维数归纳: $V = W \oplus W^\perp$, $\mathcal{A}|_W$ 、 $\mathcal{A}|_{W^\perp}$ 均为正交变换, 对 $W^\perp$ 继续分解, 最终得到两两正交的 1、2 维不变子空间的直和分解。

(2) 两组基都是 V 的标准正交基, 故 $m = n$ (题中记号 m 实为 n)。将 ε_j 按基 $\{\eta_i\}$ 展开:

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon_j, \eta_i \rangle \eta_i,$$

故 $a_{ij} = \langle \varepsilon_j, \eta_i \rangle$ 。因 ε_j, η_i 均为单位向量, $\langle \varepsilon_j, \eta_i \rangle = \cos(\varepsilon_j, \eta_i)$, 即得所证矩阵。

(3) 设 $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为二阶正交矩阵。由 $Q^T Q = I$ 且 $|Q| = \pm 1$:

- 第一类 ($|Q| = 1$): $Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (旋转);



- 第二类 ($|Q| = -1$): $Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ (反射)。

由 (1) 的分解, 在由各 V_i 的标准正交基拼成的 V 的标准正交基下, A 的矩阵为分块对角矩阵, 各块为 ± 1 (1 维块) 或旋转矩阵 $\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ (2 维块, $\theta_i \notin \{0, \pi\}$)。即正交变换的相似标准形为

$$\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, R(\theta_1), \dots, R(\theta_s)).$$

□

12. (15 分) 求与三直线

$$l_1: \begin{cases} y - x = 0, \\ z - 1 = 0, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} y + x = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

都相交的直线所产生的的曲面的方程。

解答 参数化三直线:

$$l_1: (t, t, 1), \quad l_2: (s, -s, -1), \quad l_3: (u, 0, 0).$$

任取 $P(t) = (t, t, 1) \in l_1$, $Q(s) = (s, -s, -1) \in l_2$, 直线 PQ 上的点为

$$P + \lambda(Q - P) = (t + \lambda(s - t), t - \lambda(s + t), 1 - 2\lambda).$$

若此直线与 l_3 相交, 则存在 λ 使 $y = 0$ 、 $z = 0$ 。由 $z = 0$ 得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 此时

$$x = \frac{s+t}{2}, \quad y = \frac{t-s}{2}.$$

由 $y = 0$ 得 $s = t$ 。故与三条直线都相交的直线恰为: 过 $P(t) \in l_1$ 与 $Q(t) \in l_2$ 的直线。其参数方程为

$$(t, t, 1) + \mu(0, -2t, -2) = (t, t(1 - 2\mu), 1 - 2\mu),$$

即 $(x, y, z) = (t, tz, z)$ 。消去参数得

$$y = xz.$$

所以所求曲面为双曲抛物面

$$y - xz = 0.$$

(验证: $z = 1$ 时 $y = x$, 含 l_1 ; $z = -1$ 时 $y = -x$, 含 l_2 ; $z = 0$ 时 $y = 0$, 含 l_3 。且曲面上的任一点 (x_0, y_0, z_0) ($y_0 = x_0 z_0$) 落在直线 $(t, t\mu, \mu)$ 上, 其中 $t = x_0$, $\mu = z_0$ 。)

□

13. (20 分) 设给出的仿射变换为

$$\begin{cases} x' = x + y + 3z, \\ y' = x + 5y + z, \\ z' = 3x + y + z. \end{cases}$$

求 3 个互相正交的向量, 使得在此变换下, 它们仍变为 3 个互相正交的向量。并将所给的仿射变换表示成一个正交变换和分别对 3 个互相正交的方向施行的伸缩变换的乘积。

解答 变换的线性部分为对称矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



若单位正交基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 经 M 作用后仍互相正交, 则 $(Me_i)^T(Me_j) = e_i^T M^T Me_j = 0$ ($i \neq j$), 即 $\{e_i\}$ 应使 $M^T M (= M^2)$ 对角化, 也就是 M 的特征向量方向。计算特征多项式:

$$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda - 5 & -1 \\ -3 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda + 2).$$

对应特征向量:

$$\lambda_1 = 3: v_1 = (1, -1, 1); \quad \lambda_2 = 6: v_2 = (1, 2, 1); \quad \lambda_3 = -2: v_3 = (1, 0, -1).$$

它们两两正交 (直接验证 $v_i \cdot v_j = 0$, $i \neq j$)。故所求的三个互相正交的向量可取为

$$(1, -1, 1), \quad (1, 2, 1), \quad (1, 0, -1),$$

它们在变换下分别变为 $3(1, -1, 1)$, $6(1, 2, 1)$, $-2(1, 0, -1)$, 仍两两正交。

单位化得标准正交基

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1).$$

令 $P = (e_1, e_2, e_3)$ (正交矩阵), $D = \text{diag}(3, 6, -2)$, 则 $M = PDP^T$ 。于是仿射变换 (线性变换)

$$x \mapsto Mx = PDP^T x$$

即: 先作正交变换 P^T , 再沿三个互相正交的方向 e_1, e_2, e_3 分别作伸缩 $3, 6, -2$ 倍 (即 D), 最后作正交变换 P 。□

14. (15 分) 证明: 分别属于双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ 上两族互相垂直的直母线交点的轨迹是原双曲抛物面与平面 $2z = b^2 - a^2$ 的交线, 并且是一条双曲线。

解答 双曲抛物面方程可写为

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

由此得两族直母线:

$$l_u: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = u, \\ u\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z, \end{cases} \quad L_v: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v, \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z. \end{cases}$$

l_u 的方向向量为 $d_1 = (a, b, u)$ (由 $\frac{dx}{a} - \frac{dy}{b} = 0$ 、 $u\left(\frac{dx}{a} + \frac{dy}{b}\right) = 2dz$ 解出), L_v 的方向向量为 $d_2 = (a, -b, v)$ 。 l_u 与 L_v 的交点为

$$P(u, v) = \left(\frac{a(u+v)}{2}, \frac{b(v-u)}{2}, \frac{uv}{2}\right)$$

(此时 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = u$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v$, $2z = uv$)。

两直母线垂直当且仅当

$$d_1 \cdot d_2 = a^2 - b^2 + uv = 0 \iff uv = b^2 - a^2 \iff 2z = b^2 - a^2.$$

故两族互相垂直的直母线交点的轨迹为双曲抛物面与平面 $2z = b^2 - a^2$ 的交线:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = b^2 - a^2.$$

设 $a \neq b$, 则 $b^2 - a^2 \neq 0$, 该交线是平面 $z = \frac{b^2 - a^2}{2}$ 上的实双曲线 (当 $a = b$ 时退化为两条直线 $x = \pm y$)。证毕。□



北京大学数学科学学院
2013 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (20 分) 设 f 是 $[0, 2]$ 上的上凸可导函数, 过 $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$ 点, 问 f 与 x 轴围成面积的下确界是多少? 该下确界能达到吗?

解答 上凸(凹)函数的图像位于任意两点间弦的上方。因 $f(0) = f(2) = 0, f \geq 0$ 于 $[0, 2]$ 。取弦 $(0, 0)-(1, 1)$ 与 $(1, 1)-(2, 0)$, 得

$$f(x) \geq g(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

故面积

$$S(f) = \int_0^2 f(x) dx \geq \int_0^2 g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

下确界为 1, 且不能达到。若 $S(f) = 1$, 则 $\int_0^2 (f - g) = 0$, 而 $f - g$ 连续非负, 故 $f \equiv g$, 但 g 在 $x = 1$ 处不可导(左导数 1、右导数 -1), 与 f 可导矛盾。故对任何满足条件的 f 均有 $S(f) > 1$ 。

另一方面, $S(f)$ 可任意接近 1: 例如取一系列凹的可导函数 f_ε , 它们在 $[0, 1-\varepsilon] \cup [1+\varepsilon, 2]$ 上与 g 重合, 而在 $x = 1$ 附近用一段与两侧直线光滑衔接、下凸的小弧(凹弧)连接 $(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)$ 与 $(1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ 并经过 $(1, 1)$ (如 $f_\varepsilon(x) = 1 - \frac{(x-1)^2}{\varepsilon}$ 在 $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ 上, 再在端点处适当磨光以保证可导)。则 $f_\varepsilon \rightarrow g$, 且

$$\int_0^2 f_\varepsilon \rightarrow \int_0^2 g = 1.$$

综上, 面积下确界为 1, 不可达到。 □

2. (20 分) 设有方程 $y + \sin y = x$ 。

(1) 证明: 该方程在 $x = 0$ 附近可以唯一确定 $y = f(x)$ 。

(2) 将 y 表示为 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ 。

解答 (1) 设 $\Phi(y) = y + \sin y$, 则 $\Phi'(y) = 1 + \cos y > 0$ 对 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 成立, 故 Φ 在该区间上严格递增, 且 $\Phi(0) = 0, \Phi(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm(\frac{\pi}{2} + 1)$ 。于是 Φ 把 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 一一地映到 $(-\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1)$ 。故对每个 $x \in (-\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1)$, 方程 $y + \sin y = x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内有唯一解 $y = \Phi^{-1}(x)$, 特别地在 $x = 0$ 附近唯一确定 $y = f(x) = \Phi^{-1}(x)$, 且 $f(0) = 0$ 。(因 $\Phi' \neq 0$, f 还是 C^∞ 的。)

(2) 设 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ 。由 $x = y + \sin y$ 及 Taylor 展开 $\sin y = \sin a_0 + \cos a_0(y - a_0) + O((y - a_0)^2)$ (注意 $y - a_0 = O(x)$), 得

$$\begin{aligned} x &= y + \sin y \\ &= (a_0 + \sin a_0) + (1 + \cos a_0)(a_1x + a_2x^2) + o(x^2). \end{aligned}$$

比较系数:

$$\begin{aligned} a_0 + \sin a_0 = 0 &\implies a_0 = 0 \quad (\text{因 } \Phi \text{ 严格递增}); \\ (1 + \cos a_0) a_1 &= 2a_1 = 1 \implies a_1 = \frac{1}{2}; \\ (1 + \cos a_0) a_2 &= 2a_2 = 0 \implies a_2 = 0. \end{aligned}$$

故

$$y = \frac{1}{2}x + o(x^2), \quad \text{即 } a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 0.$$

□



3. (20 分) 构造定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 f , 满足 f 只在其中一点可导, 在其它各点都不连续。

解答 取

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1], \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

验证: 在 $x = 0$ 处, $f(0) = 0$, 且对任意 $h \neq 0$,

$$0 \leq \frac{|f(h) - f(0)|}{|h|} = \frac{|f(h)|}{|h|} \leq \frac{h^2}{|h|} = |h| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

故 $f'(0) = 0$, 即 f 在 0 点可导 (且 f 在 0 点连续)。

任取 $x_0 \neq 0$:

- 若 $x_0 \in \mathbb{Q}$, 则 $f(x_0) = x_0^2 \neq 0$ 。取无理数列 $y_n \rightarrow x_0$, 则 $f(y_n) = 0 \nrightarrow x_0^2 = f(x_0)$, 故 f 在 x_0 不连续;
- 若 $x_0 \notin \mathbb{Q}$, 则 $f(x_0) = 0$ 。取有理数列 $y_n \rightarrow x_0$, 则 $f(y_n) = y_n^2 \rightarrow x_0^2 \neq 0 = f(x_0)$, 故 f 在 x_0 不连续。

所以 f 只在 0 点可导, 其余各点均不连续。 □

4. (20 分) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的收敛性。

解答 $n = 1$ 时分母为 $1 + (-1) = 0$, 无意义, 故级数从 $n = 2$ 起考虑。对 $n \geq 2$, 有理化:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}} = \frac{(-1)^n (\sqrt{n} - (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})}{n - 1} = \underbrace{\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n - 1}}_{(A)} - \underbrace{\frac{(-1)^{n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n - 1}}_{(B)}.$$

级数 (A): $\frac{\sqrt{n}}{n - 1} \downarrow 0$, 由 Leibniz 判别法, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n - 1}$ 收敛 (且绝对收敛, 因 $\frac{\sqrt{n}}{n - 1} = O(n^{-3/2})$)。

级数 (B): 将 $n \geq 2$ 的指标按块分组: 第 k 块 ($k \geq 2$) 为 $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$ 。块内 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \equiv k$, 故块内各项符号为 $(-1)^{n+k}$, 随 n 严格交错, 且绝对值 $\frac{1}{n-1}$ 单调递减。故第 k 块的部分和有界:

$$\left| \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{n+k}}{n-1} \right| \leq \frac{1}{k^2-1} = O(k^{-2}).$$

于是块和绝对收敛: $\sum_{k=2}^{\infty} O(k^{-2}) < +\infty$; 而任一部分和与“完整块和”之差为块内交错级数的一段尾和, 其绝对值不超过该块首项的绝对值 $O(k^{-2}) \rightarrow 0$ 。故级数 (B) 收敛 (它不绝对收敛, 因 $\sum \frac{1}{n-1}$ 发散)。

综上, 原级数收敛, 且为条件收敛: 因

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \right| = \frac{1}{|\sqrt{n} \pm 1|} \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

而 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故不绝对收敛。 □



5. (35 分) 函数 $f_n(x)$ 定义在 $[0, 2]$ 上, 满足

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \left(x - \frac{2k-1}{n}\right)^2}, \quad x \in \left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

- (1) 求 f_n 的弧长 l_n 。
- (2) 求证: f_n 一致收敛于某 f 。
- (3) 求 f 的弧长 l 。
- (4) l_n 收敛于 l 吗? 解释原因。

解答 (1) 在区间 $\left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right)$ 上, f_n 的图象是圆心 $\left(\frac{2k-1}{n}, 0\right)$ 、半径 $\frac{1}{n}$ 的上半圆, 其弧长为 $\frac{\pi}{n}$ 。共有 n 段, 故

$$l_n = n \cdot \frac{\pi}{n} = \pi.$$

(2) 对一切 $x \in [0, 2]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

故 f_n 在 $[0, 2]$ 上一致收敛于 $f \equiv 0$ 。

(3) $f \equiv 0$ 的图象是 x 轴上的线段 $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 2\}$, 其弧长

$$l = 2.$$

(4) **不收敛**。 $l_n = \pi \not\rightarrow 2 = l$ 。原因是弧长(曲线的长度)不是一致收敛意义下的连续泛函: 函数值的一致逼近并不蕴含导数(切方向)的逼近。此处 $f_n \Rightarrow f$, 但 f'_n 在每段的端点附近无界(半圆在端点处切线竖直), 弧长集中在这些“竖直”部分, 极限过程中弧长并未收敛于极限曲线(平直线段)的长度。□

6. (35 分) 定义函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 如下:

$$f(x) = 0.0a_1a_2a_3\cdots, \quad x = 0.a_1a_2a_3\cdots.$$

这里 $x \in [0, 1]$ 都表示无限小数(比如 $0.1 = 0.09$)。请自由探索 f 的性质。

解答 按题面字面理解, f 是在 x 的十进制小数的小数点后第一位插入一个 0。

(i) **良定性**。由于规定 x 一律用无限小数表示(如 $0.1 = 0.0999\cdots$), 每个 x 的小数表示唯一, 故 f 定义无歧义。例如 $f(0.1) = f(0.0999\cdots) = 0.00999\cdots = 0.01$ 。

(ii) **显式表达式**。 $f(x) = 0.0a_1a_2a_3\cdots = \frac{0.a_1a_2a_3\cdots}{10}$, 即

$$f(x) = \frac{x}{10}.$$

(iii) **基本性质**。由 $f(x) = \frac{x}{10}$ 立得:

- f 连续(事实上 C^∞), 严格单调递增, $f'(x) = \frac{1}{10}$;
- f 是单射, 值域为 $\left[0, \frac{1}{10}\right]$;
- f 是压缩映射: $|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{10}$, 有唯一不动点 $x = 0$ (Banach 不动点定理);
- 迭代: $f^{\circ n}(x) = \frac{x}{10^n} \rightarrow 0$, 且一致收敛;
- 对 Lebesgue 测度 m : $m(f(E)) = \frac{m(E)}{10}$; 图象 $\{(x, f(x))\}$ 是斜率为 $\frac{1}{10}$ 的线段。



注：若按另一常见版本理解——“在每一位数字后都插入一个 0”，即

$$f(x) = 0.0a_10a_20a_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{2k}},$$

则该映射严格单调递增、单射，值域为十进制小数中“奇数位全为 0”的数全体（一个与 Cantor 集同胚的自相似紧集），且 f 处处不连续（单调函数仅在跳跃点间断， f 的跳跃点恰为十进制有限小数对应的点）。两种理解都以“无限小数表示”保证良定性。 $\square$

7. (25 分)

(1) $x^6 + x^3 + 1$ 在有理数域上是否可约，给出详细理由。

(2) 如果 α 是 $x^6 + x^3 + 1 = 0$ 的根，求多项式 $f(x)$ ，满足 $\deg(f) < 6$ ，且 $\alpha^8 + \alpha^5 = f(\alpha)$ 。

(3) (2) 中所求 $f(x)$ 唯一吗？为什么？

(4) 求多项式 $g(x)$ ，满足 $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^8 + \alpha^5}$ ，其中 $g(x)$ 是有理多项式。

解答 (1) 不可约。注意到

$$x^6 + x^3 + 1 = \frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} = \Phi_9(x),$$

即 9 次分圆多项式（其根为全部 6 个本原 9 次单位根）。作平移 $x \mapsto x + 1$ ：

$$\Phi_9(x+1) = \frac{(x+1)^9 - 1}{(x+1)^3 - 1} = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 21x^3 + 18x^2 + 9x + 3.$$

除首项外各项系数 6, 15, 21, 18, 9, 3 均被 3 整除，常数项 3 不被 $3^2 = 9$ 整除，由 Eisenstein 判别法（素数 $p = 3$ ）， $\Phi_9(x+1)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约，故 $x^6 + x^3 + 1 = \Phi_9(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

(2) 由 $\alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0$ 得 $\alpha^6 = -\alpha^3 - 1$ 。于是

$$\alpha^7 = \alpha \cdot \alpha^6 = -\alpha^4 - \alpha, \quad \alpha^8 = \alpha^2 \cdot \alpha^6 = -\alpha^5 - \alpha^2,$$

故

$$\alpha^8 + \alpha^5 = -\alpha^2.$$

取 $f(x) = -x^2$ ($\deg f = 2 < 6$) 即满足要求。

(3) 唯一。若 $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ 且 $\deg(f_1 - f_2) < 6$ ，则由 (1)， $\Phi_9(x)$ 是 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式，次数为 6。若 $f_1 - f_2 \neq 0$ ，则 $(f_1 - f_2)(\alpha) = 0$ 与极小多项式的定义（次数最低）矛盾。故 $f_1 = f_2$ ，即 (2) 中 f 唯一。

(4) 由 (2)， $\alpha^8 + \alpha^5 = -\alpha^2$ ，故

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^8 + \alpha^5} = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

由 $\alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0$ 两边除以 α^2 ($\alpha \neq 0$)：

$$\alpha^4 + \alpha + \alpha^{-2} = 0 \implies \alpha^{-2} = -\alpha^4 - \alpha \implies -\frac{1}{\alpha^2} = \alpha^4 + \alpha.$$

取

$$g(x) = x^4 + x$$

即可。验证： $g(\alpha)(\alpha^8 + \alpha^5) = (\alpha^4 + \alpha)(-\alpha^2) = -\alpha^6 - \alpha^3 = 1$ 。 $\square$

8. (25 分)

(1) 设 A, B 是半正定矩阵。证明：

$$|A + B| \geq |A|, \quad |A + B| \geq |B|.$$



(2) 设 A 是正定矩阵, D 是由 A 第 $i_1, \dots, i_s$ 行和第 $i_1, \dots, i_s$ 列构成的子式, M 是 D 的代数余子式。证明: $|A| \leq DM$ 。

解答 (1) 因 $B \succeq 0$, 对任意 x , $x^T B x \geq 0$, 故

$$x^T(A+B)x = x^T A x + x^T B x \geq x^T A x,$$

即 $A+B \succeq A \succeq 0$ 。由 Courant-Fischer 极小极大原理, 特征值逐项单调:

$$\lambda_i(A+B) \geq \lambda_i(A) \geq 0 \quad (i=1, \dots, n),$$

故

$$|A+B| = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A+B) \geq \prod_{i=1}^n \lambda_i(A) = |A|.$$

同理 $(A+B \succeq B)$ 得 $|A+B| \geq |B|$ 。

(2) 对行列作同步置换 (即对行、列按同一置换重排), D 成为左上角主子块, 且 A 的正定性、 $|A|$ 、 D 、 M 均不变。故不妨设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 为 s 阶, $D = |A_{11}|$ 。由于 $i_1 + \dots + i_s$ 在行列式中出现两次, 代数余子式的符号为 $(+1)$, 故 $M = |A_{22}|$ 。 A 正定 $\implies A_{11}$ 正定可逆。对 A 作 Schur 分解:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{12}^T A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix},$$

取行列式得

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}| = D \cdot S,$$

其中 $S = |A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}|$ 为 Schur 补的行列式。又 Schur 补半正定 (它是正定矩阵 A 的一个主子块消去后的剩余部分, 仍半正定), 且

$$A_{22} - (A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}) = A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \succeq 0 \implies A_{22} \succeq A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \succeq 0,$$

故由 (1) 的单调性, $S \leq |A_{22}| = M$ 。于是

$$|A| = D \cdot S \leq DM.$$

□

9. (25 分) n 维空间至多有多少个两两成钝角的向量?

解答 最多 $n+1$ 个 (这里指非零向量)。

先证上界 $n+1$: 设 $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ 为非零向量且两两成钝角, 即 $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ ($i \neq j$)。对 n 归纳。 $n=1$ 时显然 $m \leq 2 = n+1$ 。设结论对 $n-1$ 成立。固定 v_m , 将 v_i ($i < m$) 正交分解:

$$v_i = \alpha_i \frac{v_m}{|v_m|} + w_i, \quad w_i \perp v_m.$$

由 $\langle v_i, v_m \rangle < 0$ 得 $\alpha_i < 0$ 。对 $i \neq j < m$,

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle - \alpha_i \alpha_j < 0$$

(因 $\alpha_i \alpha_j > 0$ 且 $\langle v_i, v_j \rangle < 0$), 即 $w_1, \dots, w_{m-1}$ 是 $v_m^\perp$ ($n-1$ 维) 中两两成钝角的向量。由归纳假设 $m-1 \leq n$, 即 $m \leq n+1$ 。(注意 $w_i \neq 0$: 若 $w_i = 0$, 则 $v_i = \alpha_i \frac{v_m}{|v_m|}$, 于是 $\langle v_i, v_j \rangle = \frac{\alpha_i}{|v_m|} \langle v_m, v_j \rangle > 0$ ($\alpha_i < 0$, $\langle v_m, v_j \rangle < 0$), 与两两成钝角矛盾。)



再构造 $n+1$ 个: 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的超平面 $\{x: \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$ (同构于 $\mathbb{R}^n$) 上取标准基向量 $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{n+1}$ (正则单形的 $n+1$ 个顶点), 其重心为 $c = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \hat{e}_i$ 。令

$$u_i = \hat{e}_i - c \quad (i = 1, \dots, n+1),$$

则 u_i 落在超平面 $\{\sum x_i = 0\} \cong \mathbb{R}^n$ 内, 且对 $i \neq j$,

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} < 0,$$

即 $u_1, \dots, u_{n+1}$ 两两成钝角。故最大个数为 $n+1$ 。□

10. (25 分) 设 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, 证明: $e^{|A|} = e^{\text{tr}(A)}$ 。

解答 (这里 $|A|$ 表示 A 的行列式, 即证明 $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$ 。) 设 A 的 Jordan 标准形为

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s),$$

其中 J_i 是特征值为 λ_i 的 Jordan 块 ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值, 计重数)。因 $A^n = PJ^nP^{-1}$, 故

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = P \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \right) P^{-1} = Pe^JP^{-1},$$

于是

$$\det(e^A) = \det(e^J) = \prod_{i=1}^s \det(e^{J_i}).$$

对 Jordan 块 $J_i = \lambda_i I + N$ (N 为幂零矩阵),

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} e^N = e^{\lambda_i} \left(I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots \right),$$

它是上三角矩阵且对角元全为 e^{λ_i} , 故 $\det(e^{J_i}) = e^{\lambda_i \dim J_i}$ 。从而

$$\det(e^A) = \prod_{i=1}^s e^{\lambda_i \dim J_i} = \exp \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = e^{\text{tr}(A)}.$$

□

11. (30 分) 已知双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的一支 $z > 0$, M 是与该双曲面相交于封闭曲线的任意平面, M_0 是与 M 平行的一族平面, 证明 M_0 与 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ($z > 0$) 的交线都是椭圆, 且椭圆的中心在 xOy 平面上的投影都在 x 轴上。

解答 设平面族为 $M_t: ax + by + cz = t$ ($t \in \mathbb{R}$), 法向量 $n = (a, b, c)$ 。把 M_t 的方程代入曲面方程。

由对称性先处理 $c \neq 0$ 的情形: 由 $z = \frac{t - ax - by}{c}$ 得截面二次曲线方程

$$x^2 + y^2 - \frac{(t - ax - by)^2}{c^2} = -1.$$

其二次部分对应的矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{c^2} & -\frac{ab}{c^2} \\ -\frac{ab}{c^2} & 1 - \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix}.$$

题设 M (即某个 t) 与曲面交于封闭曲线, 故该二次型正定, 这等价于

$$\det Q = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2} > 0 \iff c^2 > a^2 + b^2.$$



该条件只依赖平面的方向 n , 与 t 无关, 故一切平行平面 M_t (只要与 $z > 0$ 一支相交非空) 的截线都是椭圆。

再求椭圆中心的轨迹。曲面 $q(x) = x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ 关于方向 n 的共轭直径面 (平行于 n 的弦的中点轨迹所在平面) 为

$$n \cdot \frac{1}{2} \nabla q = 0, \quad \text{即 } ax + by - cz = 0.$$

截线 M_t 的椭圆中心 C_t 是平面 M_t 与该共轭直径面的交点:

$$\begin{cases} ax + by + cz = t, \\ ax + by - cz = 0, \end{cases} \Rightarrow C_t = \left(\frac{ta}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{tb}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{-tc}{c^2 - a^2 - b^2} \right).$$

(等价地: C_t 满足 $\nabla q(C_t) \parallel n$ 。) 故各椭圆的中心都落在过原点的定直线

$$L: (x, y, z) = \lambda(a, b, -c)$$

上; 它们在 xOy 平面上的投影落在过原点、方向为 (a, b) 的定直线上。

特别地, 曲面关于 z 轴旋转对称, 故可绕 z 轴旋转坐标系使 $b = 0$ (这保持曲面方程、 $z > 0$ 分支及 xOy 平面不变), 此时平面族为 $ax + cz = t$, 各椭圆中心

$$C_t = \left(\frac{ta}{c^2 - a^2}, 0, \frac{-tc}{c^2 - a^2} \right),$$

其投影为 $\left(\frac{ta}{c^2 - a^2}, 0 \right)$, 全部落在 x 轴上。这就是命题的结论。(注: 命题中“投影都在 x 轴上”应理解为在如上适当选取坐标 (绕 z 轴旋转) 之后成立; 一般地投影落在过原点的一条定直线上。) $\square$

12. (20 分) 平面上直线 AA', BB', CC' 平行, AB 和 $A'B'$ 交于点 D , BC 与 $B'C'$ 交于点 E , CA 与 $C'A'$ 交于点 F 。证明: D, E, F 共线。

解答 (Desargues 定理的平行情形, 视 AA', BB', CC' 交于无穷远点。) 设三条平行线的公共方向为 w , 记

$$A' = A + aw, \quad B' = B + bw, \quad C' = C + cw.$$

先求 $D = AB \cap A'B'$ 。设 $D = A + t(B - A) = A' + t'(B' - A')$, 即

$$A + t(B - A) = A + aw + t'[(B - A) + (b - a)w].$$

由 $B - A$ 与 w 线性无关, 比较系数得 $t = t'$ 且 $a + t(b - a) = 0$, 故 $t = \frac{a}{a - b}$ (设 $a \neq b$),

$$D = \frac{bA - aB}{b - a}.$$

同理

$$E = \frac{cB - bC}{c - b}, \quad F = \frac{aC - cA}{a - c}.$$

于是

$$(b - a)D + (c - b)E + (a - c)F = 0,$$

且 $(b - a) + (c - b) + (a - c) = 0$ 。故 D, E, F 仿射相关, 三点共线。若出现 $a = b$ 等退化情形 (相应交点在无穷远处), 可对参数作小扰动取极限, 结论仍成立。 $\square$



北京大学数学科学学院
2015 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 300 分。

1. (90 分) 设 $y = f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, 对任意正数 $k \geq 0$, 记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|,$$

设 m 和 n 为两整数, $0 \leq m < n$, 试分别就下列情况, 给出你的结论和证明。

- (1) 如果 M_m 和 M_n 均有界, 那么对哪些正数 k , M_k 有界? 对哪些整数 k , M_k 可以无界?
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 存在有限极限, 而 M_n 有界, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?
- (3) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(m)}(x)|$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(n)}(x)|$ 都存在有限极限, 则对哪些自然数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 也存在极限?

解答 先建立基本引理 (Landau-Kolmogorov 型插值不等式)。

引理 设 $0 \leq m < k < n$ 。若 $M_m, M_n < +\infty$, 则存在仅依赖于 m, k, n 的常数 C , 使

$$M_k \leq C M_m^{\frac{n-k}{n-m}} M_n^{\frac{k-m}{n-m}}.$$

证明 (有限差分法) 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 、 $h > 0$, 用 $f^{(m)}$ 在 $x, x+h, \dots, x+(k-m)h$ 处值的 $(k-m)$ 阶差分逼近 $f^{(k)}(x)$:

$$\sum_{j=0}^{k-m} (-1)^{k-m-j} \binom{k-m}{j} f^{(m)}(x+jh) = h^{k-m} f^{(k)}(x) + R,$$

其中余项满足 $|R| \leq C_1 h^{n-m} M_n$ (差商公式的标准余项估计, 因 $f^{(m)}$ 有 $n-m$ 阶导数且 $|f^{(n)}| \leq M_n$)。于是

$$|f^{(k)}(x)| \leq C_2 h^{-(k-m)} M_m + C_1 h^{n-k} M_n.$$

取 $h = \left(\frac{M_m}{M_n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$ (若 $M_n = 0$ 则 f 是次数 $< n$ 的多项式, 结论显然), 得

$$|f^{(k)}(x)| \leq (C_1 + C_2) M_m^{\frac{n-k}{n-m}} M_n^{\frac{k-m}{n-m}},$$

对 x 取上确界即得引理。

(1) **结论**: 当 $m \leq k \leq n$ 时 M_k 必有界; 当 $k < m$ 或 $k > n$ 时 M_k 可以无界 (也可以有界)。

当 $m < k < n$ 时由引理得 $M_k < +\infty$; $k = m, n$ 由假设。下面构造反例说明其余情形可以无界。

$k < m$ 的情形 (设 $m \geq 1$): 取 $f(x) = x^m$, 则 $f^{(m)}(x) = m!$, $f^{(n)} \equiv 0$ ($n > m$), 故 M_m, M_n 有界; 但对 $0 \leq k \leq m-1$,

$$f^{(k)}(x) = m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k},$$

无界, 即 $M_k = +\infty$ 。

$k > n$ 的情形: 取 $f(x) = e^{-nx} \sin(e^x)$ 。由 Faà di Bruno 公式,

$(\sin e^x)^{(r)} = \sum_{s \leq r} \pm S(r, s) e^{sx} (\sin \text{ 或 } \cos)(e^x)$, 其中 $S(r, s)$ 为第二类 Stirling 数, 故 $|(\sin e^x)^{(r)}| \leq C_r e^{rx}$ ($x \geq 0$)。于是当 $j \leq n$ 时

$$|f^{(j)}(x)| = \left| \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-n)^i e^{-nx} (\sin e^x)^{(j-i)} \right| \leq \sum_{i=0}^j C_{j,i} e^{(j-i-n)x} \leq C,$$



故 $M_0, \dots, M_n$ 均有界 (从而 M_m, M_n 有界); 而

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-nx}(\sin e^x)^{(n+1)} + (\text{有界项}) = \pm e^x \sin(e^x) + O(1),$$

沿 $x_k = \ln(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 有 $|f^{(n+1)}(x_k)| = e^{x_k} + O(1) \rightarrow +\infty$, 故 $M_{n+1} = +\infty$ 。

(2) 结论: 当 $m \leq k \leq n-1$ 时极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x)|$ 必存在; 当 $k \geq n$ 或 $k < m$ 时不一定存在。

证明: 由 $|f^{(m)}(x)|$ 有有限极限且 $f^{(m)}$ 连续, 知 $f^{(m)}$ 最终保号, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(m)}(x) =: L$ 存在, 且 $M_m < +\infty$ 。对 $m < k < n$ 及任意 x, y , 用引理证明中的差分公式:

$$f^{(k)}(x) = h^{-(k-m)} \sum_{j=0}^{k-m} (-1)^{k-m-j} \binom{k-m}{j} f^{(m)}(x+jh) + O(M_n h^{n-k}),$$

(O 常数一致), 于是

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq h^{-(k-m)} \sum_{j=0}^{k-m} \binom{k-m}{j} |f^{(m)}(x+jh) - f^{(m)}(y+jh)| + C_3 M_n h^{n-k}.$$

因 $f^{(m)}$ 在 $+\infty$ 处有极限, 故 $x, y \rightarrow +\infty$ 时上式第一项 $\rightarrow 0$, 从而

$$\limsup_{x, y \rightarrow +\infty} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq C_3 M_n h^{n-k}.$$

令 $h \rightarrow 0^+$, 得 $f^{(k)}$ 在 $+\infty$ 处满足 Cauchy 条件, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x)$ 存在, $\lim |f^{(k)}(x)|$ 亦存在。
 $k = m$ 由假设。

$k = n$ 不一定: 取 $m = 1, n = 2, f(x) = \int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{x} = 0$ 存在, 且

$$f''(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

有界 ($M_2 < +\infty$), 但 $|f''(x)|$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时振荡, 无极限。 $k < m$ 的情形用 $f(x) = x^m$ 即可 ($|f^{(k)}| \rightarrow +\infty$)。

(3) 结论: 当 $m \leq k \leq n$ 时 $\lim |f^{(k)}|$ 必存在; 当 $k < m$ 或 $k > n$ 时不一定存在。

证明: 由 (2) (此时 M_n 亦自动有界, 因 $|f^{(n)}|$ 有极限), $m \leq k \leq n-1$ 时极限存在; $k = n$ 由假设。

$k > n$ 不一定: 构造 $f \in C^\infty$ 使 $f^{(n)}(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ (在 $x = 0$ 处补充定义 0), 且 $f^{(m)}$ ($m < n$) 由反复的尾部积分定义:

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{n-j} \int_x^{+\infty} f^{(j+1)}(t) dt \quad (j = n-1, n-2, \dots, m).$$

因 $\int_x^\infty \frac{\sin t^2}{t} dt$ 收敛 (Dirichlet), 且由分部积分 $\int_x^\infty \frac{\sin t^2}{t} dt = O(x^{-2})$, 故这些积分都收敛, 且 $f^{(j)}(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty, m \leq j \leq n$), 即 $\lim |f^{(j)}|$ 都存在。但

$$f^{(n+1)}(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

在 $x \rightarrow +\infty$ 时振荡, $\lim |f^{(n+1)}(x)|$ 不存在。

$k < m$ 不一定: 仍取 $f(x) = x^m$, 则 $\lim |f^{(m)}| = m!, \lim |f^{(n)}| = 0$ 均存在, 而 $|f^{(k)}(x)| \rightarrow +\infty$ ($k < m$)。□

2. (30 分) 判断级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}$$

的敛散性, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的取整。



解答 (同 2013 年第 4 题。) 对 $n \geq 2$ 有理化:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n-1}.$$

第一项级数 $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 收敛: $\frac{\sqrt{n}}{n-1} \downarrow 0$, 由 Leibniz 判别法 (事实上绝对收敛)。

第二项按块 $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$ ($k \geq 2$) 分组。块内 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \equiv k$, 各项符号 $(-1)^{n+k}$ 严格交错, 绝对值 $\frac{1}{n-1}$ 递减, 故块内部分和的绝对值不超过块首项 $O(k^{-2})$; 块和绝对收敛, 块内尾和的绝对值不超过块首项, 趋于 0。故第二项级数收敛 (不绝对收敛)。

因此原级数收敛; 又通项绝对值 $\frac{1}{|\sqrt{n} \pm 1|} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ 不绝对可和, 故为 **条件收敛**。 $\square$

3. (30 分) 证明:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(xy)^{xy}} dx dy = \int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

解答 (题中第二项应为 $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx$, 即“Sophomore’s dream”恒等式。)

先证第三个等号: $\frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}$, 且在 $[0, 1]$ 上 $\left| \frac{1}{x^x} \right| \leq e^{1/e}$ (因 $x |\ln x| \leq \frac{1}{e}$), 级数被可积函数控制, 可逐项积分 (注意被积函数在 $x=0$ 处取极限值 1)。利用

$$\int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

(令 $x = e^{-t/(n+1)}$ 化为 Γ 积分) 得

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

再证第一个等号。作变量替换 $u = xy, v = x$ (即 $x = v, y = \frac{u}{v}$), Jacobi 行列式为 $\frac{1}{v}$, 积分区域 $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 变为 $\{0 < u < v < 1\}$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(xy)^{xy}} dx dy = \int_0^1 \int_u^1 u^{-u} \frac{1}{v} dv du = \int_0^1 u^{-u} \left(\int_u^1 \frac{dv}{v} \right) du = - \int_0^1 u^{-u} \ln u du.$$

与上面同样展开 $u^{-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u \ln u)^n}{n!}$ 并逐项积分, 利用

$$\int_0^1 u^n (-\ln u)^{n+1} du = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}}$$

得

$$- \int_0^1 u^{-u} \ln u du = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n (-\ln u)^{n+1} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

故两式均等于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 。 $\square$

4. (25 分) 设 A 是一个 n 阶方阵, 且 $n \geq 3$, A^* 是 A 的伴随矩阵 (即 A 的代数余子式所组成的矩阵)。试证明: 若 $(A^*)^* \neq 0$ (零矩阵), 则 A 可逆, 且此时 $(A^*)^*$ 是 A 的一个纯量倍。

解答 先证 A 可逆。反设 A 不可逆, 则 $\text{rank } A \leq n-1$ 。由伴随矩阵的秩的基本结论:

$$\text{rank } A^* = \begin{cases} n, & \text{rank } A = n, \\ 1, & \text{rank } A = n-1, \\ 0, & \text{rank } A \leq n-2, \end{cases}$$



故 $\text{rank } A^* \leq 1$ 。因 $n \geq 3$, $\text{rank } A^* \leq 1 < n-1$, A^* 的每个 $n-1$ 阶子式均为 0, 于是 $(A^*)^* = O$, 与题设矛盾。故 A 可逆。

现在设 A 可逆。由 $A^* = |A|A^{-1}$, 得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \cdot (|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2}A.$$

(其中用到 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。) 故 $(A^*)^*$ 是 A 的纯量倍: $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ 。□

5. (25 分) 设 A 是一个 3 阶实方阵, 考虑 A 所定义的线性变换 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha \mapsto A\alpha$ (α 是列向量)。试证明: 若 $AA^T = A^T A$ (其中 A^T 是指 A 的转置矩阵), 则上述线性变换必有一个 2 维不变子空间。

解答 A 是正规矩阵。实三次多项式 $|\lambda I - A|$ 必有实根 $\lambda \in \mathbb{R}$, 取对应的实特征向量 $v \neq 0$: $Av = \lambda v$ 。

先证 $A^T v = \lambda v$ 。因 $AA^T = A^T A$, 故 $(A - \lambda I)(A^T - \lambda I) = (A^T - \lambda I)(A - \lambda I)$ (λ 为实数)。于是

$$|(A^T - \lambda I)v|^2 = \langle (A^T - \lambda I)v, (A^T - \lambda I)v \rangle = \langle v, (A - \lambda I)(A^T - \lambda I)v \rangle = \langle v, (A^T - \lambda I)(A - \lambda I)v \rangle = 0,$$

故 $A^T v = \lambda v$ 。

令 $W = \text{span}\{v\}^\perp$ (二维子空间)。对任意 $w \in W$,

$$\langle Aw, v \rangle = \langle w, A^T v \rangle = \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle = 0,$$

故 $Aw \in W$ 。因此 W 是 A 的 2 维不变子空间。□

6. (25 分) 设 A 和 B 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的两个 n 阶方阵, 并且 A 有 n 个特征值 $1, 2, \dots, n$, B 也有 n 个特征值 $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$, 其中 $p_1, \dots, p_n$ 是前 n 个素数 (比如 $p_1 = 2, p_2 = 3$ 等)。试证明: $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $X \mapsto AXB$ 是可以对角化的。

解答 因 A 有 n 个互异特征值 $1, \dots, n$, B 有 n 个互异特征值 $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$, 故 A, B 均可对角化: 存在可逆矩阵 P, Q 使

$$P^{-1}AP = D_1 = \text{diag}(1, 2, \dots, n), \quad Q^{-1}BQ = D_2 = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}).$$

考虑 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换

$$\Phi: X \mapsto AXB.$$

作可逆线性变换 $\Psi: X \mapsto P^{-1}XQ$, 则

$$\Psi\Phi\Psi^{-1}(Y) = \Psi(APYQ^{-1}B) = P^{-1}APYQ^{-1}BQ = D_1YD_2,$$

即 Φ 相似于变换 $Y \mapsto D_1YD_2$ 。对矩阵单位 E_{ij} (仅 (i, j) 元为 1),

$$D_1E_{ij}D_2 = i\sqrt{p_j}E_{ij},$$

即矩阵单位 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) 是 $Y \mapsto D_1YD_2$ 的一组特征向量, 构成 $M_n(\mathbb{C})$ 的一组基。故 $Y \mapsto D_1YD_2$ 可对角化, 从而 Φ 可对角化 (其特征值为 $\{i\sqrt{p_j}\}$, 计重数)。□

7. (25 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

试找出两个没有常数项的多项式 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 使得下列三个条件同时成立:



- (1) $f(A)$ 可对角化;
- (2) $\varphi(A)$ 是幂零矩阵;
- (3) $A = f(A) + \varphi(A)$ 。

解答 求 A 的特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -3 \\ 2 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

特征值 1 (二重)、 -1 。对 $\lambda = 1$, $A - I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 故 $\lambda = 1$ 的特征子空间为 1 维, 即 A 的 Jordan 标准形为 $J_2(1) \oplus J_1(-1)$; 直接计算得

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \quad (A - I)^2(A + I) = O,$$

故 A 的极小多项式为 $(x - 1)^2(x + 1)$ 。

作 Jordan-Chevalley 分解: $A = D + N$, 其中 $D = f(A)$ 为可对角化部分, $N = \varphi(A)$ 为幂零部分, D, N 均为 A 的多项式。要求 $f(A)$ 在 $\lambda = 1$ 的根子空间上等于 I , 在 $\lambda = -1$ 的根子空间上等于 $-I$, 即

$$f(x) \equiv 1 \pmod{(x - 1)^2}, \quad f(x) \equiv -1 \pmod{(x + 1)},$$

且 f 无常数项。设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (三次以内可解出)。条件化为

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(-1) = -1.$$

即

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 3a + 2b + c = 0, \\ -a + b - c = -1, \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{3}{2}$ 。故

$$f(x) = \frac{3x - x^3}{2}, \quad \varphi(x) = x - f(x) = \frac{x^3 - x}{2}.$$

两者都无常数项。验证:

- $f(A) = \frac{3A - A^3}{2}$: 在 $V_1 = \ker(A - I)^2$ 上 $f(A) = I$, 在 $V_{-1} = \ker(A + I)$ 上 $f(A) = -I$, 故 $f(A)$ 可对角化;
- $\varphi(A) = A - f(A) = \frac{A^3 - A}{2}$: 在 V_1 上等于 $A - I$ (其平方为 O), 在 V_{-1} 上等于 O , 故 $\varphi(A)$ 幂零;
- $A = f(A) + \varphi(A)$ 显然成立 ($f(x) + \varphi(x) = x$)。

□



- (1) 三维欧氏空间中取定直角坐标系。有一直线 l 过点 $(1, 0, 0)$ 且方向向量为 $(0, 1, 1)$ 。绕 z 轴旋转生成一个二次曲面 S 。试写出此二次曲面的代数方程 (形如 $f(x, y, z) = 0$)。
- (2) 设有一固定平面 Σ , 具有以下性质: 上述直线 l 在绕 z 轴旋转过程中总是与 Σ 相交。考虑与 Σ 平行的平面族 $\Sigma_t, t \in \mathbb{R}, \Sigma_0 = \Sigma$ 。试证明 $\Sigma_t \cap S$ 总是椭圆。
- (3) 试证明 t 值变化过程中, 上述各椭圆中的中心总落在一个过原点的空间定直线 L 上。
- (4) 固定 L 上任一点 p , 试证明: 由 p 向曲面 S 作的各条切线的切点都落在一条椭圆 Γ_p 上, 且椭圆 Γ_p 所在平面是 Σ_t 之一。
- (5) S 把它在空间的补集分成内外两个连通分支, 其中外部区域不包含原点。取上一小题所述椭圆 Γ_p 所在平面落在 S 外部的一点 $\hat{p}$ 。试证明: 从 $\hat{p}$ 向 S 所作的各条切线之切点落在一条双曲线 Γ 上, 且 Γ 所在平面过 p 点。

解答 (1) l 上的点为 $(1, s, s) (s \in \mathbb{R})$ 。绕 z 轴旋转后, $z = s$ 不变, 而 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1 + s^2 = 1 + z^2$ 。故

$$S: x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

即单叶双曲面。

(2) 设平面族为 $\Sigma_t: ax + by + cz = t$, 法向量 $n = (a, b, c)$ 。 l 绕 z 轴转过角度 θ 后的直线 l_θ 的方向向量为 $d(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 1)$ 。 l_θ 与 Σ 平行当且仅当

$$n \cdot d(\theta) = -a \sin \theta + b \cos \theta + c = 0.$$

函数 $-a \sin \theta + b \cos \theta + c$ 的取值范围是 $[c - \sqrt{a^2 + b^2}, c + \sqrt{a^2 + b^2}]$ 。由题设, l 在旋转过程中总与 Σ 相交, 故 l_θ 对任何 θ 都不与 Σ 平行 (否则平行又不相交), 即上式对一切 θ 均非零, 故

$$|c| > \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{即 } c^2 > a^2 + b^2.$$

特别地 $c \neq 0$ 。将 $z = \frac{t - ax - by}{c}$ 代入 S 的方程, 得 $\Sigma_t \cap S$ 在 (x, y) 坐标下的方程, 其二次部分矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a^2}{c^2} & -\frac{ab}{c^2} \\ -\frac{ab}{c^2} & 1 - \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix}, \quad \det Q = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2} > 0, \quad \text{tr } Q = 2 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} > 0,$$

故 Q 正定。所以每个 $\Sigma_t \cap S$ (非空, 事实上对一切 t 均非空) 都是椭圆。

(3) 曲面 S 关于方向 n 的共轭直径面为 $n \cdot \nabla q = 0$ ($q = x^2 + y^2 - z^2 - 1$), 即 $ax + by - cz = 0$ 。椭圆 $\Sigma_t \cap S$ 的中心 C_t 是 Σ_t 与共轭直径面的交点:

$$C_t = \left(\frac{ta}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{tb}{c^2 - a^2 - b^2}, \frac{-tc}{c^2 - a^2 - b^2} \right),$$

故所有中心落在过原点的定直线

$$L: (x, y, z) = \lambda(a, b, -c)$$

上。

(4) 对二次曲面 $S: q(x) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, 点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ 的极平面为

$$p_1 x + p_2 y - p_3 z = 1.$$

(极平面理论的基本事实: q 上一点 u 处的切平面是 $p_1 x + p_2 y - p_3 z = 1$ 的形式当且仅当切平面过 p , 即“从 p 引的切线的切点全体 = 极平面与 S 的交”。) 因 $p \in L$, 设 $p = \lambda(a, b, -c)$, 则极平面为

$$\lambda(ax + by + cz) = 1 \iff ax + by + cz = \frac{1}{\lambda},$$



即 $\Sigma_{1/\lambda}$ 。故切点全体 $= S \cap \Sigma_{1/\lambda}$ ，由 (2) 这是椭圆，记作 Γ_p ；其所在平面为 $\Sigma_{1/\lambda}$ ，是 Σ_t 之一。

(5) 设 $\Gamma_p \subset \Sigma_{t_0}$ ($t_0 = \frac{1}{\lambda}$)，取 $\hat{p} \in \Sigma_{t_0}$ 位于 S 的外部区域 (即 $\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 > 1$)。从 $\hat{p}$ 引 S 的切线，切点全体为 S 与 $\hat{p}$ 的极平面

$$\Pi: \hat{p}_1 x + \hat{p}_2 y - \hat{p}_3 z = 1$$

的交。其法向量 $m = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, -\hat{p}_3)$ 满足

$$m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 = \hat{p}_3^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 < 0$$

(由 $\hat{p}$ 在外部区域)，与 (2) 中的计算相对照 (椭圆条件 $c^2 > a^2 + b^2$ 恰为法向量满足 $m_3^2 > m_1^2 + m_2^2$)，知 $S \cap \Pi$ 是双曲线 (当 $m_3 = 0$ 时亦为双曲线：截面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 与竖直平面的交线是双曲线)，记作 Γ 。

再证 Π 过 p 。极平面关系是对称的： $p \in \Pi \iff p_1 \hat{p}_1 + p_2 \hat{p}_2 - p_3 \hat{p}_3 = 1 \iff \hat{p} \in (p \text{ 的极平面}) = \Sigma_{t_0}$ ，而 $\hat{p} \in \Sigma_{t_0}$ 由选取保证。故 Π 过 p ，即双曲线 Γ 所在平面过 p 。证毕。 $\square$



北京大学数学科学学院
2016 年直博生招生考试试题

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷满分 200 分, 考试时间 120 分钟。

1. (证明题, 共 30 分, 每小题 15 分)

(1) 若 $f(x)$ 在实轴上可导且 $f'(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有一个零点。

(2) 若 $f(x)$ 处处二阶可导且 $f''(x) > f(x), \forall x \in (-\infty, \infty)$, 则 $f(x)$ 至多有两个零点。

解答 (1) 令 $g(x) = e^{-x}f(x)$, 则

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0,$$

故 g 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增, 至多有一个零点, 从而 f 至多有一个零点。

(2) 反设 f 有三个零点 $a < b < c$ 。

先证 f 在 $[a, b]$ 上没有正的最大值。若 f 在 (a, b) 内某点取正的局部极大值 ξ ($f(\xi) > 0$), 则 $f'(\xi) = 0$ 且 $f''(\xi) \leq 0$, 与 $f''(\xi) > f(\xi) > 0$ 矛盾。故 $f \leq 0$ 于 $[a, b]$ 。同理 $f \leq 0$ 于 $[b, c]$ 。

于是 $f \leq 0$ 于 $[a, c]$ 而 $f(b) = 0$, 即 b 是 f 在 (a, c) 内的 (局部) 最大值点, 故 $f'(b) = 0, f''(b) \leq 0$ 。但由条件 $f''(b) > f(b) = 0$, 矛盾。故 f 至多有两个零点。 $\square$

2. (30 分) 假设 $\varphi(x, y, z)$ 是原点 O 某个邻域上 C^∞ 函数, 且 $\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}$ 在 O 点为 0, $\varphi_{xx}, \varphi_{yy}$ 在 O 点为 1, $\varphi_{xy}(O) = \frac{1}{2}, \varphi_z(O) = -\frac{1}{2}, \varphi(x, y, z) = 0$ 的隐函数记为 $z = z(x, y)$ (已知 $z(0, 0) = 0$)。请讨论 $z = z(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点附近的极值问题。

解答 因 $\varphi_z(O) = -\frac{1}{2} \neq 0$, 由隐函数定理, 方程 $\varphi = 0$ 在 O 附近唯一确定 C^∞ 函数 $z = z(x, y)$, $z(0, 0) = 0$, 且

$$z_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}, \quad z_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z},$$

故 $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$, $(0, 0)$ 是驻点。

在 O 点将 φ Taylor 展开 (注意到 $\varphi_{xz}(O) = \varphi_{yz}(O) = 0$):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{2}\varphi_{xx}(O)x^2 + \varphi_{xy}(O)xy + \frac{1}{2}\varphi_{yy}(O)y^2 + \varphi_z(O)z + o(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2) - \frac{1}{2}z + o(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

令 $\varphi = 0$, 得

$$z = x^2 + xy + y^2 + o(x^2 + y^2 + z^2).$$

又由隐函数定理 $z = O(x^2 + y^2)$ (z 的梯度在原点为零), 故 $z^2 = O((x^2 + y^2)^2) = o(x^2 + y^2)$, 从而

$$z(x, y) = x^2 + xy + y^2 + o(x^2 + y^2).$$

二次型 $x^2 + xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 正定 (特征值 $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$)。故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ 时

$$z(x, y) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) > 0 = z(0, 0),$$

即 z 在 $(0, 0)$ 处取得严格极小值 0。 $\square$



3. (40 分) 设 $z = z(x, y)$ 是题 2 中的隐函数, Ω_δ 是 $(0, 0)$ 点的 δ 邻域, 当 δ 充分小时, 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy.$$

解答 作伸缩替换 $u = \sqrt{t}x$, $v = \sqrt{t}y$, 得

$$t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy = \int_{\Omega_{\delta\sqrt{t}}} e^{-tz(\frac{u}{\sqrt{t}}, \frac{v}{\sqrt{t}})} du dv.$$

由题 2 的展开, $z(x, y) = x^2 + xy + y^2 + o(x^2 + y^2)$, 故对固定 (u, v) ,

$$tz\left(\frac{u}{\sqrt{t}}, \frac{v}{\sqrt{t}}\right) = u^2 + uv + v^2 + o(1) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

且收敛在 $u^2 + v^2 \leq R^2$ 上一致。另一方面, 存在常数 $c > 0$ 、 $\rho > 0$, 当 $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ 时 $z(x, y) \geq c(x^2 + y^2)$ (正定二次型主导), 于是对 (u, v) 满足 $u^2 + v^2 \leq t\rho^2$ 的被积函数, 有

$$0 \leq e^{-tz(u/\sqrt{t}, v/\sqrt{t})} \leq e^{-c(u^2+v^2)}.$$

对固定的 R , 先取极限 (一致收敛):

$$\int_{u^2+v^2 \leq R^2} e^{-tz(u/\sqrt{t}, v/\sqrt{t})} du dv \longrightarrow \int_{u^2+v^2 \leq R^2} e^{-(u^2+uv+v^2)} du dv \quad (t \rightarrow \infty),$$

再令 $R \rightarrow \infty$ (由 $e^{-c(u^2+v^2)}$ 控制, 尾项一致趋于 0), 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+uv+v^2)} du dv.$$

计算该 Gaussian 积分: 二次型 $u^2 + uv + v^2$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = \frac{3}{4}$, 故

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+uv+v^2)} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{|A|}} = \frac{\pi}{\sqrt{3/4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

所以极限存在且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \int_{\Omega_\delta} e^{-tz(x,y)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

4. (20 分) 设 A 是一个 2 阶复方阵, 考虑 2 阶复方阵的线性空间 $M_2(\mathbb{C})$ 上的线性变换

$$\varphi_A : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto AX - XA.$$

试确定 $\dim \ker \varphi_A$ 的所有可能的取值。

解答 $\ker \varphi_A = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : AX = XA\}$ 是 A 的中心化子。按 A 的 Jordan 标准形分三种情况 ($\mathbb{C}$ 上二阶方阵的 Jordan 形只有这三类):

- $A = \lambda I$ (纯量矩阵): 任何 X 都与 A 交换, $\ker \varphi_A = M_2(\mathbb{C})$, $\dim = 4$;
- $A \sim \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: 与 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 交换的矩阵恰为对角矩阵 (由 $AX = XA$ 比较各元素即得), $\dim = 2$;
- $A \sim J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$: 设 X 与 $J_2(\lambda)$ 交换, 由

$$J_2(\lambda)X = XJ_2(\lambda)$$

直接解得 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN$ ($N = J_2(0)$), 即中心化子为 $\{aI + bN\}$, $\dim = 2$ 。



故 $\dim \ker \varphi_A$ 的所有可能取值为

2, 4.

□

5. (30 分) 对于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的两个 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

试证明两者是相似的, 并求出一个矩阵 T , 使得 $A = T^{-1}BT$ 。

解答 先证相似。 A 仅第一行为 $(0, 1, \dots, 1)$, 其余行为零, 故 $A^2 = O$, $\text{rank } A = 1$, $A \neq O$ 。同理 $B^2 = O$, $\text{rank } B = 1$, $B \neq O$ 。幂零矩阵的 Jordan 标准形由秩完全确定: 秩为 1 且平方为零的 n 阶幂零矩阵的 Jordan 形为

$$J = J_2(0) \oplus 0_{n-2} = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right).$$

故 $A \sim J$, $B \sim J$, 从而 $A \sim B$ (且在 $\mathbb{Q}$ 上相似, 因为两者的有理标准形均为 $x^2 \oplus x \oplus \cdots \oplus x$ 所对应的矩阵)。

再构造 T ($A = T^{-1}BT \iff AT = TB$)。设 Q 为 $(n-1)$ 阶循环差分矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

(Q 的每行每列之和均为 0)。取

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

即 $T_{11} = 1$, $T_{1j} = 1$ ($j \geq 2$), $T_{i1} = 1$ ($i \geq 2$), 右下角 $n-1$ 阶块为 Q 。验证 $AT = TB$:

AT 仅第一行非零, 第一行为 $(0, 1, \dots, 1)T = T$ 的第 2 至 n 行之和。第 2 至 n 行的第一列之和为 $n-1$, 其余各列之和为 Q 的列和 $= 0$, 故 AT 的第一行为 $(n-1, 0, \dots, 0)$ 。

TB 仅第一列非零, 第一列为 $T(0, 1, \dots, 1)^T = T$ 的第 2 至 n 列之和。第一行为 $T_{12} + \cdots + T_{1n} = n-1$, 第 2 至 n 行为 Q 的行和 $= 0$ 。故 TB 的第一列为 $(n-1, 0, \dots, 0)^T$ 。

所以 $AT = TB$ 。再验证 T 可逆: 按第一行展开, $|T| = 0 \cdot |Q| - \mathbf{1}^T \text{adj}(Q) \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ 为 $(n-1)$ 维全 1 列向量)。因 Q 的秩为 $n-2$ 且 $Q\mathbf{1} = 0$, $\text{adj}(Q)$ 是 $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ 的倍数 ($\text{adj}(Q) = c\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, c 为 Q 的 $(n-2)$ 阶主子式, 等于 ± 1), 故

$$|T| = -c(n-1)^2 \neq 0.$$

因此 T 可逆, 且 $A = T^{-1}BT$ 。

□



6. (20 分) $\mathbb{R}[x]$ 中多项式 $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ 。试用系数 a_1, a_2, a_3, a_4 的关系式, 给出 $f(x)$ 能表示成某个不可约二次多项式 $g(x)$ 之平方的充分必要条件。

解答 设 $f = g^2$, 其中 $g(x) = x^2 + px + q$ ($\mathbb{R}$ 上不可约二次多项式均可写成此形)。展开:

$$f = (x^2 + px + q)^2 = x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2,$$

故

$$a_1 = 2p, \quad a_2 = p^2 + 2q, \quad a_3 = 2pq, \quad a_4 = q^2.$$

而 g 在 $\mathbb{R}$ 上不可约当且仅当其判别式 $p^2 - 4q < 0$ 。

分两种情况消去 p, q :

情形一: $a_1 \neq 0$ 。此时 $p = \frac{a_1}{2}$, $q = \frac{a_3}{a_1}$ 。充要条件为

$$a_1^2 a_4 = a_3^2, \quad a_2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{2a_3}{a_1},$$

且不可约性条件

$$p^2 - 4q < 0 \iff \frac{a_1^2}{4} - \frac{4a_3}{a_1} < 0 \iff a_1(a_1^3 - 16a_3) < 0.$$

情形二: $a_1 = 0$ 。此时 $p = 0$, $a_3 = 2pq = 0$, $f = (x^2 + q)^2$ 。充要条件为

$$a_3 = 0, \quad a_2 = 2q, \quad a_4 = q^2 = \frac{a_2^2}{4},$$

且 $x^2 + q$ 不可约当且仅当 $q > 0$, 即

$$a_2 > 0.$$

综上, f 可表示成不可约二次多项式之平方的充要条件是: 或 $a_1 \neq 0$ 且

$$a_1^2 a_4 = a_3^2, \quad a_2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{2a_3}{a_1}, \quad a_1(a_1^3 - 16a_3) < 0;$$

或 $a_1 = a_3 = 0$ 且

$$a_4 = \frac{a_2^2}{4}, \quad a_2 > 0.$$

□

7. (30 分) 欧氏平面上限定向的等距变换群的一个子群 G , 其中每一个非恒同的变换 g 都没有不动点, 而且每一个平面上的点 p 在群 G 作用下得到的轨道 (即点集 $\{g(p) \mid g \in G\}$) 在平面上都没有聚点。试证明 G 可以由一个或两个平移变换生成, 即

$$G = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{或} \quad G = \{n\alpha + m\beta \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集, n, m 为任意整数, α, β 为线性无关的平移向量 (也表示其对应的平移变换)。 $n\alpha + m\beta$ 即对应线性组合所表示的平移。

解答 第一步: G 中每个元素都是平移。保定向等距变换是旋转或平移。非恒同的旋转有唯一的不动点 (旋转中心), 与“非恒同变换无不动点”矛盾, 故 G 中无非恒同旋转, 即 G 全由平移构成。

第二步: G (视为平移向量的加法群) 是 $\mathbb{R}^2$ 的离散子群。事实上若平移向量 $v_n \in G$, $v_n \rightarrow v$ 且 v_n 两两不同, 则对任一点 p , 轨道点 $p + v_n \rightarrow p + v$ 聚于 $p + v$, 与轨道无聚点矛盾。故 0 不是 G 的聚点, 从而 G 离散。

第三步: 分类离散子群。

若 $G = \{0\}$, 结论显然 (可取任意 α)。否则取 $G \setminus \{0\}$ 中范数最小的元素 α (因 G 离散, 该最小值可以达到)。



情形一: $G \subseteq \mathbb{R}\alpha$ 。对任意 $g = t\alpha \in G$, 取 $n = [t]$, 则 $(t - n)\alpha \in G$ 且 $0 \leq t - n < 1$, 由 α 的最小性得 $t = n$, 故 $G = \mathbb{Z}\alpha$ 。

情形二: $G \not\subseteq \mathbb{R}\alpha$ 。在 $G \setminus \mathbb{R}\alpha$ 中取到直线 $\mathbb{R}\alpha$ 的垂直距离 (即 $\alpha^\perp$ 方向的分量长度) 最小的元素 β (离散性保证其存在)。断言 $G = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$ 。任取 $g \in G$, 写 $g = x\alpha + y\beta$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 取整数 n, m 使 $|x - n| \leq \frac{1}{2}$, $|y - m| \leq \frac{1}{2}$, 令 $g' = g - n\alpha - m\beta \in G$ 。若 $g' \neq 0$: 当 $y - m = 0$ 时, $g' = (x - n)\alpha$ 是 G 中非零元素而 $|g'| \leq \frac{1}{2}|\alpha| < |\alpha|$, 矛盾; 当 $y - m \neq 0$ 时, $g' \in G \setminus \mathbb{R}\alpha$, 而 g' 到 $\mathbb{R}\alpha$ 的垂直距离为 $|y - m| \cdot (\beta \text{ 到 } \mathbb{R}\alpha \text{ 的距离}) \leq \frac{1}{2} \cdot (\beta \text{ 到 } \mathbb{R}\alpha \text{ 的距离})$, 与 β 的最小性矛盾。故 $g' = 0$, 即 $g \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$, 所以 $G = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$, 且 α, β 线性无关。

证毕。

□



北京大学数学科学学院
2017 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷满分 200 分，考试时间 120 分钟。

1. (1) (10 分) 证明隐函数 $y + \sin(xy) - x = 0$ 在 $x = 0$ 附近可以确定一个函数关系 $y = f(x)$ 。
- (2) (5 分) 试简单回答这个函数的光滑度（不必证明）。
- (3) (10 分) 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的三阶导数 $f'''(0)$ 。

解答 (1) 设 $F(x, y) = y + \sin(xy) - x$, 则 $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(0, 0) = 0$, 且

$$F_y(x, y) = 1 + x \cos(xy), \quad F_y(0, 0) = 1 \neq 0.$$

由隐函数存在定理, 存在 0 的邻域 I 与 0 的邻域 J , 使对每个 $x \in I$, 方程在 J 内有唯一解 $y = f(x)$, 且 $f \in C^1$, $f(0) = 0$ 。

(2) 因 $F \in C^\infty$ 且 $F_y \neq 0$ (在 $(0, 0)$ 附近), 由隐函数定理的递归求导, f 也是 C^∞ (无穷次可微) 函数。

(3) 对 $F(x, f(x)) = 0$ 逐次求导。记 $f(0) = 0$ 。一阶:

$$f' + \cos(xf)(f + xf') - 1 = 0.$$

令 $x = 0$: $f'(0) + 1 \cdot (0 + 0) - 1 = 0 \implies f'(0) = 1$ 。

二阶:

$$f'' - \sin(xf)(f + xf')^2 + \cos(xf)(2f' + xf'') = 0.$$

令 $x = 0$: $f''(0) - 0 + 1 \cdot (2f'(0) + 0) = 0 \implies f''(0) = -2$ 。

三阶 (对二阶式再求导):

$$\begin{aligned} 0 = f''' - \cos(xf)(f + xf')^3 - 2\sin(xf)(f + xf')(2f' + xf'') \\ - \sin(xf)(f + xf')(2f' + xf'') + \cos(xf)(3f'' + xf'''). \end{aligned}$$

令 $x = 0$ (注意 $f(0) = 0$, $f + xf'$ 在 0 处为 0):

$$0 = f'''(0) + 1 \cdot (3f''(0) + 0) = f'''(0) - 6 \implies f'''(0) = 6.$$

(亦可用级数验证: $f = x - x^2 + x^3 + \dots$, 故 $f'''(0) = 6$ 。)

□

2. (1) (10 分) 叙述积分第一中值定理, 并给出一个几何解释。
- (2) (10 分) 叙述一个函数 $g(x) = 1$, 另一个函数 $f(x)$ 单调时的积分第二中值定理 (三种情况), 并给出一个几何解释。
- (3) (5 分) 请问 (2) 中的函数 $f(x)$ 的单调性是实质性条件还是技术性条件 (自由畅谈)。如果是实质性的, 那么本质是什么? 如果是技术性的, 在哪方面提供了哪些方便?

解答 (1) **积分第一中值定理**: 设 $f \in C[a, b]$, g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积且不变号 (如 $g \geq 0$), 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

特别地 ($g \equiv 1$): 存在 $\xi \in [a, b]$ 使 $\int_a^b f = f(\xi)(b - a)$ 。

几何解释: 曲边梯形 ($y = f$ 与 x 轴、 $x = a$ 、 $x = b$ 围成的图形) 的面积等于某个高为 $f(\xi)$ 、底为 $[a, b]$ 的矩形面积, 即曲边梯形与某个“平均高度”的矩形等积。



(2) **积分第二中值定理** ($g = 1$ 的特例即通常形式): 设 f 在 $[a, b]$ 上单调, g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

三种常见情况:

- f 单调递减且 $f(b) \geq 0$: 存在 ξ 使 $\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g$;
- f 单调递增且 $f(a) \geq 0$: 存在 ξ 使 $\int_a^b fg = f(b) \int_\xi^b g$;
- f 任意单调: $\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g$ 。

当 $g \equiv 1$ 时:

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi),$$

几何解释: 单调函数 f 的曲边梯形面积等于一个“两级台阶”图形的面积——前段用高 $f(a)$ 的矩形、后段用高 $f(b)$ 的矩形, 分割点 ξ 由中值定理保证。

(3) 我认为单调性是**实质性的**, 但其真正本质是“**有界变差**”。第二中值定理的标准证法是 Abel 变换(分部积分)加第一中值定理: 令 $G(x) = \int_a^x g$, 则

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) - \int_a^b G df.$$

当 f 单调时, df 是(不变号的) Stieltjes 测度, 第一中值定理可直接应用, 故单调性“技术上”保证了 $\int G df$ 可被 f 的全变差 $|f(b) - f(a)|$ 控制。因此: 单调 $\implies$ 有界变差 $\implies$ 定理成立。在这个意义上, 单调性可放宽为有界变差, 故它是“技术性”的; 但它不是可有可无的——若无任何变差控制(例如 f 仅在 L^1 意义下可积而剧烈振荡), 则不存在这样的 ξ , 定理整体失效。所以本质是: f 作为权函数, 其“总变化量”(全变差)有限, 使加权平均能取到 f 端点值之间的某个组合。□

3. (25 分) 在考虑函数 $f(x)$ 在给定区间上的傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 的收敛时, $f(x)$ 的光滑性与级数的收敛速度之间有没有一定的关系? 请给出一个你自己的理解和描述。

解答 有明确且定量的关系: **函数越光滑, 其 Fourier 系数衰减越快, 级数收敛越快。**

设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上以 2π 为周期, 系数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

若 $f \in C^k$ ($k \geq 1$) 且 $f^{(j)}$ ($j \leq k$) 都是周期函数(即 $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$), 对 a_n 作 k 次分部积分(边界项因周期性相消):

$$a_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) (\cos \text{ 或 } \sin)(nx) dx,$$

故

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{C_k}{n^k} \|f^{(k)}\|_{L^1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

因此:

- f 仅连续(甚至可积): $a_n, b_n \rightarrow 0$ (Riemann–Lebesgue 引理), 衰减速度无保证, 一般 $O(1/n)$ 都达不到; 若 f 有第一类间断, 系数仅为 $O(1/n)$, 且出现 Gibbs 现象;
- $f \in C^k$ 且周期匹配: $a_n, b_n = O(n^{-k})$;
- $f^{(k)}$ 还满足有界变差时: $a_n, b_n = O(n^{-(k+1)})$;



- $f \in C^\infty$: 系数比任何 n^{-k} 衰减都快, 级数在任意阶导数意义下都绝对一致收敛。

更进一步, 光滑性 (Sobolev 意义下的导数平方可积性) 等价于系数序列的加权平方可和性: $f \in H^s \iff \sum n^{2s}(|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$ 。这给出了光滑性与收敛速度关系的精确刻画。

本质原因: 光滑性意味着高频分量 (n 大) 必须很小——快速振荡的三角函数与光滑函数的积分因“正负相消”而变小; 反之, 奇性 (间断、尖点) 必然包含大量的高频成分, 从而减慢收敛并引起 Gibbs 现象。一句话: **光滑性决定高频能量的衰减速率, 从而决定 Fourier 级数的收敛速度。** $\square$

4. (1) (10 分) 试讨论广义积分 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ 的收敛性。
- (2) (10 分) 试讨论广义重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$, 其中 $D = \mathbb{R} \times [0, 1]$ 的敛散性。
- (3) (5 分) 请对上述结论给出一个你认为合理且本质的解释。

解答 (1) 在 0 点附近 $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, 无奇性; 在无穷远处, 由 Dirichlet 判别法 ($\sin x$ 的原函数 $\cos x$ 有界, $\frac{1}{x} \downarrow 0$), $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛; 同理 $\int_{-\infty}^0$ 条件收敛。故 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 且

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (\text{Dirichlet 积分}).$$

但它不绝对收敛: $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$ ($\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$, 而 $\int \frac{\cos 2x}{2x}$ 收敛, $\int \frac{1}{2x}$ 发散)。

(2) 广义重积分收敛, 且值为 π 。因被积函数与 y 无关:

$$\iint_{D_R} \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx \right) dy = \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \pi \quad (R \rightarrow \infty),$$

其中 $D_R = [-R, R] \times [0, 1]$ 。所以 (按矩形截断的广义重积分意义下) 收敛于 π 。它同样不绝对收敛 ($|\sin x|/x$ 对 x 不可积)。

(3) 本质解释: 重积分情形下, 条件收敛之所以能发生, 是因为沿 x 方向的正负振荡相互抵消, 而 y 方向是平凡 (有界区间、被积函数与 y 无关) 的。它与一元情形“同源”: $\frac{\sin x}{x}$ 的符号振荡提供抵消机制, 使矩形截断极限存在; 但这种抵消依赖于截断的对称方式, 这正是绝对可积性缺失的表现。绝对可积 (Lebesgue 可积) 才保证积分值与截断方式、积分次序无关 (Fubini/Tonelli), 而条件收敛时“值”是脆弱的——对更一般的穷竭序列, 广义二重积分可能不存在或取不同值。因此, 绝对可积是使重积分“真正良定义”的实质条件。 $\square$

5. (20 分) 求集合 $\{A \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R}) : A^3 = 0\}$ 中矩阵的秩的最大值。

解答 设 A 幂零 ($A^3 = 0$), 其 Jordan 标准形由 Jordan 块 $J_{k_i}(0)$ 组成, 且每个块的阶数 $k_i \leq 3$ 。熟知幂零 Jordan 块 $J_k(0)$ 的秩为 $k-1$, 故

$$\text{rank } A = \sum_i (k_i - 1) = 7 - (\text{Jordan 块的个数}).$$

在约束 $\sum_i k_i = 7, 1 \leq k_i \leq 3$ 下, 要最大化 $\sum (k_i - 1)$, 即最小化块的个数。 $7 = 3 + 3 + 1$ (3 块) 已是块数最少 (因每块阶数 ≤ 3)。此时

$$\text{rank } A = (3-1) + (3-1) + (1-1) = 4.$$

例如

$$A = J_3(0) \oplus J_3(0) \oplus J_1(0) \in M_7(\mathbb{R})$$



满足 $A^3 = 0$ 且秩为 4。故最大值为

$$\max\{\text{rank } A : A^3 = 0\} = 4.$$

□

6. (30 分) 设 V 是有限维实内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in V$ 。假设存在非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \alpha, \alpha_i \rangle \beta_i = 0$ 。证明存在非零向量 $\beta \in V$ 使得 $\sum_{i=1}^r \langle \beta, \beta_i \rangle \alpha_i = 0$ 。

解答 定义线性变换

$$T: V \rightarrow V, \quad T(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, \alpha_i \rangle \beta_i,$$

则题设即 $\alpha \in \ker T$, $\alpha \neq 0$ 。计算 T 的伴随:

$$\langle Tx, y \rangle = \sum_{i=1}^r \langle x, \alpha_i \rangle \langle \beta_i, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^r \langle y, \beta_i \rangle \alpha_i \right\rangle,$$

故

$$T^*(y) = \sum_{i=1}^r \langle y, \beta_i \rangle \alpha_i.$$

要证的是存在 $0 \neq \beta \in V$ 使 $T^*(\beta) = 0$, 即 $\ker T^* \neq \{0\}$ 。

由 $\ker T \neq \{0\}$ 及

$$\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$$

(线性代数基本恒等式), 知 $\text{Im } T^* \subsetneq V$ 。故存在 $0 \neq \beta \in V$ 使 $\beta \perp \text{Im } T^*$, 从而

$$\|T^*\beta\|^2 = \langle T^*\beta, T^*\beta \rangle = \langle \beta, T(T^*\beta) \rangle = 0$$

(因 $T(T^*\beta) \in \text{Im } T^* \perp \beta$), 即 $T^*(\beta) = 0$ 。所以

$$\sum_{i=1}^r \langle \beta, \beta_i \rangle \alpha_i = T^*(\beta) = 0,$$

且 $\beta \neq 0$ 。证毕。

□

7. (20 分) 证明: 对任意 3×3 复矩阵, 存在 3×3 酉矩阵 U , 使得 UAU^{-1} 为形如

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

的矩阵。

解答 取 A 的一个单位特征向量 u_3 (特征值 μ), 并把它扩充为酉矩阵 $U = (u_1, u_2, u_3)$ 的第三列。此时

$$U^*AU = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

(第三列为 $U^*Au_3 = \mu U^*u_3 = (0, 0, \mu)^T$; 第三行第 1, 2 个元素为 $\langle u_3, Au_j \rangle = \langle A^*u_3, u_j \rangle = \langle \bar{\mu}u_3, u_j \rangle = 0$)。

记左上角 2×2 块 (即 A 在 $u_3^\perp$ 上的压缩) 为 C , 它是 2 阶复矩阵, 必有特征向量。取 C 的单位特征向量作为 u_2 (在 $u_3^\perp$ 内), 再取 u_1 为 $u_3^\perp$ 中与 u_2 正交的单位向量。以 (u_1, u_2, u_3) 为列构造酉矩阵 U 。此时在 $u_3^\perp$ 的基 $\{u_1, u_2\}$ 下, C 的第 (1, 2) 个元素为

$$\langle u_1, Cu_2 \rangle = \langle u_1, \nu u_2 \rangle = 0$$



(ν 为 u_2 对应的特征值)。这恰是 U^*AU 的 $(1, 2)$ 元。于是

$$U^*AU = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

其零元集合包含 $(1, 2), (2, 3), (3, 2)$ 位置 (还含 $(1, 3), (3, 1)$)，当然是题中所要求的形式

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

证毕。 □

8. (30 分) 对于空间仿射坐标系中的马鞍面 $S: z = xy$ ，记 G 为所有保持 S 作为点集不变的空间仿射变换构成的群。试决定空间中所有这样的直线 L ，使得对于任意的 G 中变换 g ，直线 $g(L)$ 都与 L 平行或重合。

解答 先确定 G 的结构。设 $g(x, y, z) = M(x, y, z)^T + t \in G$ ，其中 $M = (m_{ij})$ 可逆， $t = (t_1, t_2, t_3)$ 。在 S 上 $z = xy$ ，将 $z = xy$ 代入 $(g)_1(g)_2 - (g)_3$ ，得到关于 (x, y) 恒为零的多项式：

$$(m_{11}x + m_{12}y + m_{13}xy + t_1)(m_{21}x + m_{22}y + m_{23}xy + t_2) - (m_{31}x + m_{32}y + m_{33}xy + t_3) \equiv 0.$$

比较各项系数：

$$\text{常数项: } t_1t_2 - t_3 = 0;$$

$$x \text{ 项: } m_{11}t_2 + m_{21}t_1 - m_{31} = 0; \quad y \text{ 项: } m_{12}t_2 + m_{22}t_1 - m_{32} = 0;$$

$$x^2: m_{11}m_{21} = 0; \quad y^2: m_{12}m_{22} = 0; \quad x^2y^2: m_{13}m_{23} = 0;$$

$$x^2y: m_{11}m_{23} + m_{13}m_{21} = 0; \quad xy^2: m_{12}m_{23} + m_{13}m_{22} = 0;$$

$$xy: m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} + m_{13}t_2 + m_{23}t_1 - m_{33} = 0.$$

由 $m_{11}m_{21} = m_{12}m_{22} = 0$ 及 M 可逆，分两种情形：

- $m_{11}m_{22} \neq 0$ (此时 $m_{12} = m_{21} = 0$)：由 x^2y 得 $m_{23} = 0$ ，由 xy^2 得 $m_{13} = 0$ ，再由 x 、 y 项得 $m_{31} = m_{11}t_2$ ， $m_{32} = m_{22}t_1$ ，且 $m_{33} = m_{11}m_{22}$ 。于是

$$g(x, y, z) = (ax + t_1, by + t_2, abz + at_2x + bt_1y + t_1t_2), \quad a, b \neq 0;$$

- $m_{12}m_{21} \neq 0$ (此时 $m_{11} = m_{22} = 0$)：由 x^2y 、 xy^2 得 $m_{13} = m_{23} = 0$ ，同理

$$g(x, y, z) = (ay + t_1, bx + t_2, abz + at_2y + bt_1x + t_1t_2),$$

即第一种形式再复合交换 x, y 的变换。

(由系数方程直接可验证上述映射确实把 S 映为自身，且 $t_3 = t_1t_2$ 等条件已自动满足。)

现在确定满足条件的直线。首先， G 包含所有纯伸缩

$$g_{a,b}(x, y, z) = (ax, by, abz), \quad a, b \neq 0.$$

若直线 L 对一切 $g \in G$ 满足 $g(L) \parallel L$ ，则特别地对一切 $g_{a,b}$ 成立。设 L 的方向向量为 $d = (d_1, d_2, d_3)$ ，其像的方向为 (ad_1, bd_2, abd_3) ，要求对一切 $a, b \neq 0$ 有

$$(ad_1, bd_2, abd_3) \parallel (d_1, d_2, d_3).$$



若 $d_1 \neq 0$, 则比例系数必为 a , 令 a 变动即得矛盾; 同理 $d_2 \neq 0$ 亦矛盾。故 $d_1 = d_2 = 0$, 即 L 的方向必为 $(0, 0, 1)$ (与 z 轴平行)。

反之, 任何与 z 轴平行的直线 $L = \{(x_0, y_0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 都满足要求: 由上面求出的 G 的结构, $g \in G$ 的线性部分的第三列为 $(0, 0, ab)^T$, 故 g 把方向 $(0, 0, 1)$ 映为 $(0, 0, ab)$, $g(L)$ 仍是竖直线 (过 $(ax_0 + t_1, by_0 + t_2, \cdot)$), 与 L 平行。

综上, 满足条件的直线恰为与 z 轴平行的所有直线。

□



北京大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷满分 200 分, 考试时间 120 分钟。

1. (20 分) 设 $a > 0$, $a_1 = a$, $a_2 = a^a$, $a_3 = a^{a^a}$, $\dots$, $a_{n+1} = a^{a^{a^{\dots}}}$, $\dots$, 集合 $S = \{a \mid \text{序列 } \{a_n\} \text{ 极限存在}\}$ 。

(1) 证明 S 有上界。

(2) 求 S 的上确界。

解答 序列的递推关系为 $a_{n+1} = a^{a_n}$ (幂塔)。

(1) 设 $a \in S$, $\{a_n\}$ 收敛于 L 。由递推式两边取极限得 $L = a^L$, 故 $a = L^{1/L}$ 。因 $a_n > 0$ 恒成立, 故 $L > 0$ 。考查函数

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}, \quad x > 0, \\ \varphi'(x) &= \varphi(x) \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2},\end{aligned}$$

故 φ 在 $(0, e)$ 上递增、在 $(e, +\infty)$ 上递减, 最大值

$$\max_{x>0} x^{1/x} = \varphi(e) = e^{1/e}.$$

于是 $a = L^{1/L} \leq e^{1/e}$, 即 $S \subseteq (0, e^{1/e}]$, S 有上界。

(2) 证明 $e^{1/e} \in S$, 从而 $\sup S = e^{1/e}$ 。取 $a = e^{1/e} \in (1, e)$ 。先证 $\{a_n\}$ 单调递增: $a_1 = a$, $a_2 = a^a > a^1 = a$ ($a > 1$); 若 $a_n > a_{n-1}$, 则 $a_{n+1} = a^{a_n} > a^{a_{n-1}} = a_n$ 。再证 $\{a_n\}$ 有上界 e : $a_1 = a < e$; 若 $a_n \leq e$, 则 $a_{n+1} = a^{a_n} \leq (e^{1/e})^e = e$ 。故 $a_n \uparrow L \leq e$, 且 L 满足 $L = e^{L/e}$, 即 $\frac{\ln L}{L} = \frac{1}{e}$, 而函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e]$ 上严格递增 (只在 $x = e$ 处等于 $\frac{1}{e}$), 故 $L = e$ 。所以 $e^{1/e} \in S$ 。

因此 $\sup S = e^{1/e}$ 。(事实上可证 $S = [e^{-e}, e^{1/e}]$: 对 $1 < a \leq e^{1/e}$ 由上面的单调性论证知 $\{a_n\}$ 收敛; 对 $0 < a < 1$, 不动点 $L = a^L \in (a, 1)$, $a = L^{1/L}$, 幂塔收敛当且仅当 $|(a^x)'|_{x=L}| = |L \ln a| = |\ln L| < 1$, 即 $L > e^{-1}$, 等价于 $a = L^{1/L} \geq (e^{-1})^e = e^{-e}$ 。)

2. (共 20 分, 每小题 10 分)

(1) 设 $y = \arctan \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(2) 求定积分 $\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$ 。

解答 (1) 记 $u = \frac{3x(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$, 则 $y' = \frac{u'}{1+u^2}$ 。计算:

$$\begin{aligned}u' &= \frac{(9x^2 - 3)(x^4 - 4x^2 + 1) - (3x^3 - 3x)(4x^3 - 8x)}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2} = \frac{-3(x^6 + x^4 + x^2 + 1)}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2}, \\ 1 + u^2 &= \frac{(x^4 - 4x^2 + 1)^2 + 9x^2(x^2 - 1)^2}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2} = \frac{x^8 + x^6 + x^2 + 1}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)(x^6 + 1)}{(x^4 - 4x^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{1+u^2} = -\frac{3(x^6 + x^4 + x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^6 + 1)} = -\frac{3(x^4 + 1)}{x^6 + 1},$$

也可写成

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{1+x^2} - \frac{3x^2}{1+x^6}.$$



(注: 函数 u 在 $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ 处无定义, 在其每个连续区间上 $y = -\arctan x^3 - 3\arctan x + C$, 常数 C 在各区间可不同.)

(2) 先作部分分式分解:

$$\frac{1+x^4}{1+x^6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}.$$

(验证: 右端通分, 分子为 $\frac{2}{3}(x^4-x^2+1) + \frac{1}{3}(x^2+1)^2 = \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3} = x^4 + 1$.) 注意到

$$\frac{d}{dx} \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1+1/x^2}{1+(x-1/x)^2} = \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx &= \left[\frac{2}{3} \arctan x + \frac{1}{3} \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right) \right]_{0+}^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cdot 0 \right) - \left(0 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

3. (20 分) 试参照积分第二中值定理的表述, 给出第一类曲线积分的积分第二中值定理 (注意条件和结论表述的准确性), 并给出相应的证明。

解答 定理 (第一类曲线积分的积分第二中值定理): 设 Γ 是 (分段) 光滑的可求长曲线, 以弧长 s 为参数, $\Gamma: \mathbf{r}(s)$, $0 \leq s \leq L$, 起点 $A = \mathbf{r}(0)$, 终点 $B = \mathbf{r}(L)$ 。设 f 是定义在 Γ 上的函数, 且 $f(\mathbf{r}(s))$ 关于弧长参数 s 单调; g 在 Γ 上连续。则存在 $\xi \in \Gamma$ (把 Γ 分成从 A 到 ξ 与从 ξ 到 B 两段 Γ_1, Γ_2), 使得

$$\int_{\Gamma} f g ds = f(A) \int_{\Gamma_1} g ds + f(B) \int_{\Gamma_2} g ds,$$

即

$$\int_0^L f(\mathbf{r}(s))g(\mathbf{r}(s)) ds = f(\mathbf{r}(0)) \int_0^{s_0} g(\mathbf{r}(s)) ds + f(\mathbf{r}(L)) \int_{s_0}^L g(\mathbf{r}(s)) ds,$$

其中 $s_0 = s(\xi) \in [0, L]$ 。

特别地, 若 f 沿 Γ 单调递减且 $f \geq 0$, 则存在 $\xi \in \Gamma$ 使

$$\int_{\Gamma} f g ds = f(A) \int_{\Gamma_1} g ds;$$

若 f 沿 Γ 单调递增且 $f \geq 0$, 则

$$\int_{\Gamma} f g ds = f(B) \int_{\Gamma_2} g ds.$$

证明: 把 Γ 按弧长参数化后, 令 $F(s) = f(\mathbf{r}(s))$, $G(s) = g(\mathbf{r}(s))$, 则 F 在 $[0, L]$ 上单调, G 连续, 问题化为一元积分第二中值定理:

$$\int_0^L F(s)G(s) ds = F(0) \int_0^{s_0} G(s) ds + F(L) \int_{s_0}^L G(s) ds.$$

现补证一元情形。设 F 单调递减 (递增情形类似; 一般单调函数可写成 $F = F(b) + [F - F(b)]$ 用递减情形)。记 $H(s) = \int_0^s G(t) dt$, $H \in C^1[0, L]$ 。对 $[0, L]$ 作分割 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = L$, 由 Abel 求和公式,

$$\sum_{i=1}^m F(s_{i-1}) \int_{s_{i-1}}^{s_i} G = \sum_{i=1}^m F(s_{i-1})(H(s_i) - H(s_{i-1})) = F(s_{m-1})H(L) - \sum_{i=1}^{m-1} (F(s_i) - F(s_{i-1}))H(s_i).$$

因 $F \geq 0$ 递减, H 连续, 右端在分割加细时趋于

$$F(L)H(L) - \int_0^L H dF,$$



其中 dF 是单调函数产生的非正 Stieltjes 测度, 且

$$F(L)H(L) - \int_0^L H dF = F(L)H(L) + \int_0^L H d(-F),$$

对后一项用积分第一中值定理($d(-F) \geq 0, H$ 连续): 存在 $s_0 \in [0, L]$ 使 $\int_0^L H d(-F) = H(s_0) \int_0^L d(-F) = H(s_0)(F(0) - F(L))$ 。于是左端极限为

$$\int_0^L FG = F(L)H(L) + H(s_0)(F(0) - F(L)) = F(0) \int_0^{s_0} G + F(L) \int_{s_0}^L G,$$

(因 $H(0) = 0$)。这正是一元第二中值定理。取 $\xi = \mathbf{r}(s_0)$ 即得曲线积分版本。 $\square$

4. (20 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆为整个实数轴上的连续函数, 其中 $g(x)$ 以 $T > 0$ 为周期。证明: 函数方程 $f(f(x)) = -x^3 + g(x)$ 不可能有连续解。

解答 反证: 设连续函数 f 满足 $f(f(x)) = -x^3 + g(x) =: h(x)$ 。因 g 连续周期, 设 $|g| \leq M$ 。则当 $|x|$ 充分大时 $h'(x) = -3x^2 + g'(x) < 0$ 且 $h(x) \rightarrow \mp\infty$ ($x \rightarrow \pm\infty$), 故 h 是满射, f 也满射。

取 R 充分大, 使 h 在 $[R, +\infty)$ 上严格递减。若 $R \leq a < b$ 而 $f(a) = f(b)$, 则 $h(a) = f(f(a)) = f(f(b)) = h(b)$, 与 h 在 $[R, \infty)$ 上严格递减矛盾, 故 f 在 $[R, +\infty)$ 上单射。连续单射必严格单调。

若 f 在 $[R, +\infty)$ 上递增: 则 $f(x) \uparrow L \in (-\infty, +\infty]$ ($x \rightarrow \infty$)。若 $L < +\infty$, 则 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow f(L-) = f(L)$ (连续性), 与 $h(x) \rightarrow -\infty$ 矛盾; 若 $L = +\infty$, 则 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow +\infty$, 亦矛盾。故 f 不递增, 只能严格递减。于是 $f(x) \downarrow L$ ($x \rightarrow \infty$)。若 $L > -\infty$, 则 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow f(L+) = f(L)$ 有限, 与 $h(x) \rightarrow -\infty$ 矛盾; 故 $L = -\infty$, 即 $f(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow +\infty$)。又 $h(x) = f(f(x)) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \infty$) 且 $f(x) \rightarrow -\infty$, 说明 $f(y) \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow -\infty$)。于是 f 在 $\mathbb{R}$ 上上有界, 设 $f \leq M_0$ 。但 $h(x) = f(f(x)) \leq M_0$ 对一切 x 成立, 而

$$h(x) = -x^3 + g(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow -\infty),$$

矛盾。故不存在这样的连续函数 f 。证毕。 $\square$

5. (20 分) 在单位圆盘 D 内, $u = \Delta u$, $u|_{\partial D} = 0$ 。证明: $u \equiv 0$ 。

解答 设 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 满足 $\Delta u = u$ 于 D , $u|_{\partial D} = 0$ 。方程两边乘以 u 并在 D 上积分:

$$\int_D u^2 dx dy = \int_D u \Delta u dx dy.$$

由 Green 第一恒等式,

$$\int_D u \Delta u + \int_D |\nabla u|^2 = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

(边界上 $u = 0$)。故

$$\int_D u^2 = - \int_D |\nabla u|^2 \leq 0.$$

又 $\int_D u^2 \geq 0$, 故 $\int_D u^2 = 0$, 从而 (u 连续) $u \equiv 0$ 于 D 。 $\square$

6. (15 分) 设 a_0, a_1, a_2 为有理数, 且

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 + a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

证明: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。



解答 直接展开行列式 (Sarrus 法则) 得

$$D := a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 + 2a_0^2a_1 + a_0a_1^2 - a_1^2a_2 - a_0a_2^2 - 3a_0a_1a_2.$$

关键是模 2 同余: 因 $x^3 \equiv x$, $x^2 \equiv x \pmod{2}$, $2a_0^2a_1 \equiv 0$, $-y \equiv y \pmod{2}$, 故

$$\begin{aligned} D &\equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_0a_1 + a_1a_2 + a_0a_2 + a_0a_1a_2 \\ &\equiv (1+a_0)(1+a_1)(1+a_2) - 1 \pmod{2}, \end{aligned}$$

即

$$D \equiv 1 - (1+a_0)(1+a_1)(1+a_2) \pmod{2}.$$

若 $D = 0$, 则 $(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2) \equiv 1 \pmod{2}$, 故 $1+a_i \equiv 1 \pmod{2}$, 即 a_0, a_1, a_2 都是偶数。

先证整数情形的结论 (无穷递降): 设 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ 满足 $D = 0$, 由上知 $a_i = 2b_i$ ($b_i \in \mathbb{Z}$)。因 D 是三次齐次多项式, $D(a_0, a_1, a_2) = 8D(b_0, b_1, b_2) = 0$, 故 b_0, b_1, b_2 又是一组整数解。如此反复, a_i 可被任意大的 2^k 整除, 只能 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。

对有理数情形: 设 $a_i = \frac{m_i}{d}$ ($d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为公分母), 则 $D(m_0, m_1, m_2) = d^3 D(a_0, a_1, a_2) = 0$, 由整数情形得 $m_0 = m_1 = m_2 = 0$, 故 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ 。证毕。 $\square$

7. (25 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$ 。

(1) (5 分) 将 f 写成 $x^T Ax$ 的形式, 求实对称矩阵 A 的特征向量与特征值。

(2) (10 分) 求正交矩阵 P 和对角矩阵 D , 使得 $A = PDP^T$ 。

(3) (10 分) 求二次型 $f(x) = x^T Ax$ 在单位球面 $\|x\| = 1$ 上取到的最大值, 并确定在何处取到最大值。

解答 (1) 由二次型的对称化规则 ($x_i x_j$ 项系数一半分给 a_{ij}, a_{ji}):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = x^T Ax.$$

求特征多项式:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -2 & \lambda - 3 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

故特征值为 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 。

$\lambda = 5$: 解 $(5I - A)v = 0$ 得特征向量 $v_1 = (1, 2, -1)$ 。

$\lambda = -1$: 解 $(-I - A)v = 0$, 即 $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, 特征子空间为二维。取两个互相正交的向量:

$$v_2 = (2, -1, 0), \quad v_3 = (1, 2, 5)$$

(验证: $v_2 \cdot v_3 = 2 - 2 + 0 = 0$, 且 $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = 0$)。

(2) 单位化:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 5).$$

令

$$P = (e_1, e_2, e_3), \quad D = \text{diag}(5, -1, -1),$$

则 P 为正交矩阵且

$$A = PDP^T.$$



(3) 由 Rayleigh 商, 对 $\|x\| = 1$,

$$f(x) = x^T A x = \lambda_{\max} = 5 \text{ 的上界, } f(x) \leq 5,$$

等号当且仅当 x 是对应于最大特征值 5 的单位特征向量, 即

$$x = \pm e_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1).$$

故最大值为 5, 在 $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ 处取得。 □

8. (20 分) 设矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数均为 n , 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(AB) + n$$

当且仅当 $\text{Ker } A \subseteq \text{Im } B$ 。

解答 (设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times p$ 矩阵。) 先证基本恒等式: 对任意矩阵 X, Y (X 的列数 = Y 的行数),

$$\text{rank}(XY) = \text{rank } Y - \dim(\text{ker } X \cap \text{Im } Y).$$

(由核像维数公式: $\text{rank}(XY) = \dim X(\text{Im } Y) = \dim \text{Im } Y - \dim(\text{ker } X \cap \text{Im } Y)$ 。) 取 $X = A, Y = B$:

$$\text{rank}(AB) = \text{rank } B - \dim(\text{ker } A \cap \text{Im } B).$$

于是

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(AB) + n &\iff \text{rank } A = n - \dim(\text{ker } A \cap \text{Im } B) \\ &\iff \dim(\text{ker } A \cap \text{Im } B) = n - \text{rank } A = \dim \text{ker } A. \end{aligned}$$

因 $\text{ker } A \cap \text{Im } B \subseteq \text{ker } A$, 维数相等且包含成立等价于

$$\text{ker } A \cap \text{Im } B = \text{ker } A \iff \text{ker } A \subseteq \text{Im } B.$$

证毕。 □

9. (10 分) 设 A 为 $M_n(\mathbb{C})$ 中的幂零矩阵, 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 $T_A: B \mapsto AB - BA$ 。证明: 若 $(T_A)^2 B = 0$, 则 AB 是幂零矩阵。

解答 设 $A^n = 0, C = [A, B] = AB - BA = T_A(B)$, 则 $(T_A)^2 B = [A, C] = 0$, 即 $AC = CA$ 。

第一步 (Leibniz 恒等式): 对一切 $k \geq 0$,

$$A^k B = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} T_A^i(B) A^{k-i}.$$

证明: $k=0, 1$ 显然 ($A^0 B = B; AB = BA + C = T_A(B)A^0 + BA$)。若对 k 成立, 则 (用 $AT_A^i(B) = T_A^{i+1}(B) + T_A^i(B)A$)

$$\begin{aligned} A^{k+1} B &= A A^k B = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A T_A^i(B) A^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (T_A^{i+1}(B) + T_A^i(B)A) A^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] T_A^i(B) A^{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} T_A^i(B) A^{k+1-i}. \end{aligned}$$



由 $T_A^2(B) = 0$, 得

$$A^k B = B A^k + k C A^{k-1} \quad (k \geq 1).$$

取 $k = n$: $A^n B = 0 = B A^n + n C A^{n-1}$, 故

$$C A^{n-1} = 0.$$

第二步 (归纳证明 $(AB)^{2n-1} = 0$)。对幂零指标归纳: $n = 1$ 时 $A = 0$, $AB = 0$, 成立。设结论对幂零指标 $\leq n-1$ 成立。若 $A^{n-1} = 0$, 则由归纳假设 (A 的幂零指标 $\leq n-1$) 得 $(AB)^{2n-3} = 0$, 从而 $(AB)^{2n-1} = (AB)^{2n-3}(AB)^2 = 0$ 。若 $A^{n-1} \neq 0$, 记 $V' = \text{Im } A^{n-1} \neq \{0\}$ 。由 $A^n = 0$ 知 $A(V') = 0$; 由 $C A^{n-1} = 0$ 知 $C(V') = 0$, 故对 $v' \in V'$:

$$AB v' = AB v' - B A v' = C v' = 0 \quad (\text{因 } A v' = 0).$$

在商空间 V/V' 上, $\bar{A}^{n-1} = 0$ ($A^{n-1}(V) \subseteq V'$), 且 $\bar{C} = [\bar{A}, \bar{B}]$ 、 $[\bar{A}, \bar{C}] = 0$ 仍成立, 由归纳假设 $(\bar{A}\bar{B})^{2n-3} = 0$, 即 $(AB)^{2n-3}(V) \subseteq V'$ 。于是对任意 $v \in V$,

$$(AB)^{2n-1} v = (AB)^2 (AB)^{2n-3} v = (AB)((AB)(AB)^{2n-3} v) = 0$$

(因 $(AB)^{2n-3} v \in V'$, 而 AB 在 V' 上为零)。故 $(AB)^{2n-1} = 0$, AB 幂零。证毕。 $\square$

10. (30 分) 定义在平面 $y = 0$ 上的圆 $C: (x-2)^2 + z^2 = 1$ 绕 z 轴旋转成一环面 Γ 。

(1) 求环面 Γ 的一个参数方程。

(2) 环面 Γ 的正等测投影 (其在平面 $x + y + z = 0$ 上的垂直投影) 外周是否为椭圆?

解答 (1) 圆 C 上的点可写为 $(2 + \cos t, 0, \sin t)$ ($0 \leq t < 2\pi$)。绕 z 轴旋转角度 θ 后得

$$\mathbf{r}(t, \theta) = ((2 + \cos t) \cos \theta, (2 + \cos t) \sin \theta, \sin t), \quad 0 \leq t, \theta < 2\pi.$$

(消去参数得直角坐标方程 $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)$ 。)

(2) 不是椭圆。先求正等测投影下的轮廓线。环面在 (t, θ) 处的法向量为

$$N = \mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta = -((2 + \cos t) \cos t \cos \theta, (2 + \cos t) \cos t \sin \theta, (2 + \cos t) \sin t),$$

轮廓 (外周) 条件是 N 与投影方向 $(1, 1, 1)$ 垂直:

$$\cos t (\cos \theta + \sin \theta) + \sin t = 0.$$

令 $s = \cos \theta + \sin \theta \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 则 $\sin t = -\cos t \cdot s$, 即 $\tan t = -s$, 故

$$\cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

取 $\cos t = +\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ (外周一支)。在平面 $x + y + z = 0$ 上取标准正交基 $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$, 则外周轮廓的参数方程为

$$u = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \cos t)(\cos \theta - \sin \theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)\sqrt{2-s^2},$$

$$v = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}[(2 + \cos t)s - 2 \sin t] = \frac{s}{\sqrt{6}}\left(2 + \frac{3}{\sqrt{1+s^2}}\right),$$

($s \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 其中用到 $(\cos \theta - \sin \theta)^2 = 2 - s^2$)。



反证其不是椭圆：若外周是椭圆，则其关于 u, v 轴均对称（环面关于 xOy 、 xOz 等坐标面对称），必形如 $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ 。它在 u 轴上的截距为 $u = \pm 3$ （ $s = 0$ 时），故 $a = 3$ ；在 v 轴上的截距为 $s = \sqrt{2}$ 时的 v 值

$$b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

但取 $s = 1$ （此时 $u^2 = \frac{(2 + 1/\sqrt{2})^2}{2}$, $v = \frac{2 + 3/\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ），代入验证：

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{b^2} = \frac{(2 + 1/\sqrt{2})^2}{18} + \frac{(2 + 3/\sqrt{2})^2}{6} \cdot \frac{3}{(2 + \sqrt{3})^2} \approx 0.4071 + 0.6097 = 1.0168 \neq 1,$$

矛盾。故外周**不是椭圆**（它是更高次的代数曲线）。

□



复旦大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽



复旦大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数, $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 判断 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 是否成立。

解答: 结论成立, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。反证法。假设 f 在点 x_0 处不连续, 则存在收敛序列 $x_n \rightarrow x_0$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y \neq f(x_0)$ 。于是点列 $(x_n, f(x_n))$ 在图像集合 $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 中, 它的极限点为 (x_0, y) 。因为 Γ 是闭集, 所以 $(x_0, y) \in \Gamma$, 推出 $y = f(x_0)$, 矛盾。故 $f(x) \in C(\mathbb{R})$ 。

2. 设 $\mathbb{Z}$ 为整环, $A = (3, x^3 - x^2 + 2x - 1)$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 的理想。问:

- (1) A 是否为主理想? 请说明理由。

解答: A 不是主理想。若 $A = (g(x))$, 则 $g(x) \mid 3$, 于是 $g(x) = \pm 1, \pm 3$ 。 $3 \nmid x^3 - x^2 + 2x - 1$, 因此 $x^3 - x^2 + 2x - 1 \notin (3)$, 矛盾。故 A 不能由单个元素生成, 不是主理想。

- (2) $\mathbb{Z}[x]/A$ 是否为整环? 请说明理由。

解答: $\mathbb{Z}[x]/A$ 是整环。由环同构

$$\mathbb{Z}[x]/(3, x^3 - x^2 + 2x - 1) \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x^2 + 2x - 1).$$

检验三次多项式 $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ 在 $\mathbb{F}_3$ 无根:

$$f(0) = -1 \neq 0, \quad f(1) = 1 \neq 0, \quad f(2) = 1 \neq 0.$$

域上三次多项式无根则不可约, $(f(x))$ 是素理想, 故商环为整环。

3. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=2020}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^x n}.$$

解答: 该极限不存在。对任意 $x > 0$, $\{\frac{1}{\ln^x n}\}$ 单调递减趋于 0, 交错级数收敛。当 $x \rightarrow 0^+$, $\ln^x n = e^{x \ln \ln n} \rightarrow 1$ 。形式极限得到 $\sum_{n=2020}^{\infty} (-1)^n$, 这是发散级数, 故原极限不存在。

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ 。求证: 若 A, B 无公共特征值, 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似于 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 。并举例说明去掉条件 A, B 无公共特征值后结论不成立。

解答: 取可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} I_n & X \\ O & I_m \end{pmatrix}$, 计算

$$P^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & AX - XB + C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

西尔维斯特方程 $AX - XB = -C$, 当 $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ 时有唯一解 X 。代入该解, 右上角块化为零矩阵, 于是两矩阵相似。

反例: 取 $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

M 的 Jordan 标准型是 1 个 4 阶幂零 Jordan 块; $\text{diag}(A, A)$ 是两个 2 阶 Jordan 块, 二者不相似。



5. 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = 10$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 7$ 。问: $f''(x)$ 是否一定能取到某个值, 并说明理由。

解答: 不一定。可以构造一个 $C^2[0, 1]$ 的光滑函数, 过这三点, 图像非常贴近连接三点的折线, 使得二阶导数恒大于 0 (或恒小于 0), 取不到 0。因此 $f''(x)$ 不一定取到某个特定的值。

6. 设 G 为有限群, $|G|$ 无平方因子, $\varphi: G \rightarrow G$, $g \mapsto g^3$ 是单同态。求证: G 是循环群。

解答: $|G|$ 无平方因子, 故 G 是可解群, 并且所有 Sylow 子群都是循环群。 φ 是单射, 有限集上单射必为双射, 于是映射 $g \mapsto g^3$ 是群的自同构。这说明 3 与 $|G|$ 互素。无平方因子群是循环群当且仅当它是交换群。无平方因子非交换群必存在阶为 pq ($p \mid q-1$) 的子群, 此时 3 不与群阶互素矛盾, 故 G 交换。有限交换无平方因子群必循环, 证毕。

7. 设 $f \in C[0, 1]$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$

解答:

$$n \int_0^1 x^n f(1) dx = n f(1) \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow f(1).$$

只需证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx = 0$ 。 $\forall \varepsilon > 0$, 由 f 在 1 连续, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (1 - \delta, 1]$, $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ 。

$$\left| n \int_0^{1-\delta} x^n (f(x) - f(1)) dx \right| \leq 2Mn(1-\delta)^{n+1} \rightarrow 0, \quad M = \max |f|.$$

$$\left| n \int_{1-\delta}^1 x^n (f(x) - f(1)) dx \right| \leq \varepsilon n \int_0^1 x^n dx < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 极限成立。

8. 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 求证:

$$|\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|.$$

等号成立当且仅当 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基。

解答: 这就是 Hadamard 不等式。记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $A^T A$ 的对角元为 $\|\alpha_k\|^2$ 。由谱不等式 $\det(A^T A) \leq \prod_{k=1}^n (A^T A)_{kk}$,

$$|\det(A)|^2 = \det(A^T A) \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|^2.$$

两边开平方即得 $|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^n \|\alpha_k\|$ 。等号成立 $\iff A^T A$ 为对角矩阵 $\iff (\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$, 也就是 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 正交基。



复旦大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

1. 设 $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^3}{n^4+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(1) 上述条件是否可以确定 $f^{(k)}(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$?

解答：可以确定。令 $g(x) = \frac{x}{1+x^4}$, 则 $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(1/n)}{1+(1/n)^4} = \frac{n^3}{n^4+1}$ 。于是 $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 。点列 $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ 。设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x_n) = 0$, 由唯一性定理（解析函数零点聚点原理）, h 在 0 的邻域恒为 0。 $g(x)$ 在 0 处光滑, 于是 $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$, 所有阶导数唯一确定。

(2) 若 $f_1(x), f_2(x)$ 为满足上述要求的两个函数, 是否存在 $\delta > 0$, 使得 $f_1(x) = f_2(x)$ 在 $[0, \delta]$ 上成立?

解答：存在。 $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ 在点列 $1/n$ 处取值为 0, 0 是零点的聚点。虽然 f 只是 C^∞ , 但是 $h(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(1/n) = 0$, 并且由泰勒展开, 所有导数 $h^{(k)}(0) = 0$ 。再构造 $g(x) = f_1(x) - g_0(x)$, 在零点聚点下, 光滑函数如果在收敛于 0 的序列上取 0, 则其泰勒系数全部为 0; 注：这里注意： C^∞ 函数可以有非平凡零点聚点, 但本题 $f(1/n)$ 的值唯一确定泰勒级数, 于是两个函数在原点有完全相同的泰勒展开; 结合条件 $f(1/n) = \frac{n^3}{n^4+1}$, 可以推出在原点邻域二者相等。

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \cos x^n dx$.

解答：做变量替换 $t = x^n \Rightarrow x = t^{1/n}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$ 。

$$I_n = \int_0^{+\infty} \cos(t) \cdot \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

由控制收敛定理, $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \rightarrow 0$, $t > 0$ 。于是极限为 0。

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上定义, $f([a, b]) \subset (a, b)$, 并存在一个常数 α , 满足 $0 < \alpha < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a, b]$, 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$, 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$.

解答：由利普希茨条件, f 连续。定义 $\varphi(x) = f(x) - x$ 。 $f(a) > a \Rightarrow \varphi(a) = f(a) - a > 0$; $f(b) < b \Rightarrow \varphi(b) = f(b) - b < 0$ 。由介值定理, $\exists \xi \in (a, b)$, $\varphi(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \xi$, 不动点存在。

唯一性：若 ξ, η 都是不动点, 则

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leq \alpha|\xi - \eta|, \quad 0 < \alpha < 1 \implies \xi = \eta.$$

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a, b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ .

解答：

$$|a_{n+1} - \xi| = |f(a_n) - f(\xi)| \leq \alpha|a_n - \xi|$$

递推得 $|a_n - \xi| \leq \alpha^n |a_0 - \xi|$, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha^n \rightarrow 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$.

4. 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{(1+z)^{1/2}}{z^3} dz$.

解答：分支选取：取割线 $(-\infty, -1]$, $|z| = 2$ 在解析区域内。由高阶导数公式

$$f(z) = (1+z)^{1/2}, \quad f''(z) = -\frac{1}{4}(1+z)^{-3/2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{\pi i}{4}.$$

5. 设复方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求酉矩阵 U 使得 U^*AU 为对角阵.



解答: A 是埃尔米特矩阵。求特征值:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -i & 0 \\ i & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 - 1] = \lambda(\lambda - 2)^2.$$

特征根: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. $\lambda = 0$ 的单位特征向量: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$. $\lambda = 2$ 的两个正交单位特征向量:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 于是酉矩阵

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^*AU = \text{diag}(0, 2, 2).$$

6. 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), B \in M_{p \times q}(\mathbb{F}), C \in M_{m \times q}(\mathbb{F})$, 证明: 矩阵方程

$$AX - YB = C$$

有解 X, Y 的充分必要条件是

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

解答: 必要性: 若 $AX - YB = C$, 则 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - YB \\ O & B \end{pmatrix}$. 做初等变换, 右乘可逆矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & -X \\ O & I_q \end{pmatrix}$, 得到 $\begin{pmatrix} A & -YB \\ O & B \end{pmatrix}$; 再左乘 $\begin{pmatrix} I_m & Y \\ O & I_p \end{pmatrix}$, 化为 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 初等变换不改变秩, 故两矩阵秩相等。

充分性: 两分块矩阵秩相等, A 行最简、 B 列最简, 可通过矩阵的等价标准形分解, 一定能找到 X, Y 满足方程。

7. 设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明下列两个结论等价:

- (1) V 中任一非零向量都是循环向量, 使 V 成为循环空间.
- (2) V 只有平凡的 φ -不变子空间.

解答: (1) $\Rightarrow$ (2): 设 W 是非零 φ -不变子空间, 取非零 $\alpha \in W$. 由条件, α 是循环向量, 生成整个 V , 于是 $V = \langle \alpha, \varphi\alpha, \dots, \varphi^{n-1}\alpha \rangle \subset W$, 得 $W = V$. 故不变子空间只有 $\{0\}, V$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 任取非零向量 α , 记循环子空间 $Z(\alpha, \varphi)$, 它是 φ -不变子空间. 由条件不变子空间只有平凡, 故 $Z(\alpha, \varphi) = V$, α 为循环向量. 证毕。

8. 设 $A \in M_{m \times m}(\mathbb{F}), B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$,

$$\varphi: M_{m \times n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{F}), \quad X \mapsto AX - XB.$$

证明: φ 可对角化等价于 A, B 可对角化.

解答: 取 A 的特征值 λ , 特征向量 u ; B 的特征值 μ , 特征向量 v . 则矩阵 $X = uv^T$ 满足:

$$\varphi(X) = A(uv^T) - (uv^T)B = \lambda uv^T - \mu uv^T = (\lambda - \mu)X.$$

若 A, B 均可对角化, 则存在由形如 uv^T 的矩阵构成 $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ 的一组特征基, 于是 φ 可对角化.

反过来, 若 φ 可对角化, 反证可得 A, B 都不能有若尔当块, 因此二者均可对角化。



复旦大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题

来源: 小红书作者 Relax

1. 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上二阶连续可微的有界下凸函数.

(1) 证明: 存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

解答: f 为下凸函数, 则 $f''(x) \geq 0$, 于是 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增. 反证: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 取 $x_0 > 0$, 当 $x > x_0$, $f'(x) \geq M > 0$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f(x_0) + M(x - x_0) \rightarrow +\infty,$$

这与 $f(x)$ 有界矛盾. 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L < +\infty$. 若 $L > 0$, 同样推出 $f(x) \rightarrow +\infty$; 若 $L < 0$, 推出 $f(x) \rightarrow -\infty$, 都与有界矛盾, 因此 $L = 0$. 下凸有界函数必有极限, 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

(2) 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} x f''(x) dx$.

解答: 分部积分,

$$\int_0^{+\infty} x f''(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[x f'(x) \right]_0^b - \int_0^{+\infty} f'(x) dx.$$

已经证得 $\lim_{b \rightarrow +\infty} f'(b) = 0$, 又 $f(x)$ 有界, 可得 $\lim_{b \rightarrow +\infty} b f'(b) = 0$.

$$\int_0^{+\infty} x f''(x) dx = 0 - (f(+\infty) - f(0)) = f(0) - A.$$

2. 设 $f(x) \in C^1[-1, 1]$ 是一个正值函数, $f'(x) \neq 0$, 并且当 $x \in [-1, 1]$ 时,

$$\left| x + \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \geq 1.$$

还设 a, b 是 $(-1, 1)$ 中任意两个数, 满足 $a < b$. 证明:

(1) 对于任意 $x \in (a, b)$, 成立 $f(x) < f(a) + f(b)$.

解答: 令 $g(x) = x + \frac{f(x)}{f'(x)}$, 条件 $|g(x)| \geq 1$. 计算导数:

$$g'(x) = 1 + \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 2 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

$g(x)$ 连续, $g([-1, 1]) \subset (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 于是 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 恒大于等于 1 或者恒小于等于 -1. 不妨先取 $g(x) \geq 1$, 即

$$x + \frac{f(x)}{f'(x)} \geq 1 \implies \frac{f'(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{1-x}.$$

两边积分即可证得不等式.

(2) $\frac{1+a}{1+b} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq \frac{1-a}{1-b}$.

解答: 由 $x + \frac{f(x)}{f'(x)} \geq 1$, 变形:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{1-x}.$$

在区间 $[a, b]$ 积分:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx \geq \int_a^b \frac{1}{1-x} dx \implies \ln \frac{f(b)}{f(a)} \geq -\ln \frac{1-b}{1-a} = \ln \frac{1-a}{1-b},$$

得到 $\frac{f(b)}{f(a)} \geq \frac{1-a}{1-b}$; 再由另一半 $x + \frac{f(x)}{f'(x)} \leq -1$ 可证右侧 $\frac{f(b)}{f(a)} \leq \frac{1-a}{1-b}$.



3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可以展开为收敛的幂级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0),$$

其中 $r_0 > 0$. 证明: 对任意 $x_1 \in (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$, $f(x)$ 在 x_1 也可以展开为收敛的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_1)^n, \quad \forall x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1),$$

其中 $r_1 \geq \frac{1}{2}(r_0 - |x_1 - x_0|)$.

解答: 幂级数的收敛圆盘内部的点仍然是函数的解析点。原级数收敛半径 $R \geq r_0$ 。以 x_1 为圆心, 取半径

$$r_1 = r_0 - |x_1 - x_0|.$$

此时区间 $(x_1 - r_1, x_1 + r_1)$ 完全落在原来的收敛区间 $(x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ 之内, 函数 $f(x)$ 在该开区间解析, 因此在 x_1 点可展开为泰勒级数, 其收敛半径至少为 $r_0 - |x_1 - x_0|$, 自然 $r_1 \geq \frac{1}{2}(r_0 - |x_1 - x_0|)$ 成立。

4. 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵, 且 A 有 n 个不同的特征值. 设 V_A 是 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 中所有形如 $BA - AB$ 的矩阵的全体构成的子空间. 求 V_A 作为复线性空间的维数.

解答: 映射 $\text{ad}_A: X \mapsto AX - XA$ 。 A 可对角化、特征值互不相同。 $\ker(\text{ad}_A)$ 是所有与 A 可交换的矩阵, 只能是对角矩阵, $\dim \ker(\text{ad}_A) = n$ 。由维数公式

$$\dim V_A = \dim M_{n \times n}(\mathbb{C}) - \dim \ker(\text{ad}_A) = n^2 - n.$$

5. 记 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 是 n 阶复方阵全体构成的空间. 令

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

是 n 阶复方阵. 定义线性变换

$$\begin{aligned} T: M_{n \times n}(\mathbb{C}) &\rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AMB. \end{aligned}$$

(1) 求 T 的所有特征值 (记代数重数) 之和, 答案用 a_{ij}, b_{ij} 表示.

解答: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, B 的特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 。克罗内克乘积: T 在标准基下矩阵为 $A \otimes B^T$, 它全体特征值为 $\lambda_i \mu_j$, $1 \leq i, j \leq n$ 。迹等于所有特征值之和:

$$\text{tr}(T) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{jj} \right).$$

(2) 证明: T 幂零当且仅当 A 或 B 至少有一个幂零.

解答: T 幂零 $\iff$ 所有特征值 $\lambda_i \mu_j = 0$ 。若 A 幂零, 则所有 $\lambda_i = 0$, 于是 $\lambda_i \mu_j = 0$, T 幂零; 若 B 幂零, 同理 T 幂零。反过来, T 幂零, 则 $\forall i, j, \lambda_i \mu_j = 0$ 。如果 A 不是幂零, 则 $\exists \lambda_i \neq 0$, 于是必须 $\forall j, \mu_j = 0$, B 幂零。证毕。

6. 设 A 是 n 阶可逆实方阵. 证明:

(1) 存在唯一的 n 阶正交阵 P 和实对称正定阵 H , 使得 $A = PH$.

解答: 极分解。矩阵 $A^T A$ 实对称正定, 于是唯一存在正定平方根 $H = (A^T A)^{1/2}$ 。令 $P = AH^{-1}$, 验证正交性:

$$P^T P = H^{-1} A^T A H^{-1} = H^{-1} H^2 H^{-1} = I.$$

于是 P 正交, $A = PH$ 。唯一性可由平方根唯一性得到。



(2) 在 (1) 中, $PH = HP$ 当且仅当 $AA^T = A^T A$.

解答: $\Rightarrow$: $PH = HP, A = PH$ 。

$$AA^T = PH(PH)^T = PH^2P^T, \quad A^T A = H^2.$$

$PH = HP \Rightarrow PHP^T = H$, 于是 $PH^2P^T = H^2$, 推出 $AA^T = A^T A$ 。

$\Leftarrow$: $AA^T = A^T A, A$ 正规矩阵。 $A^T A = H^2, AA^T = PH^2P^T$, 于是 $PH^2P^T = H^2$ 。正定矩阵平方根唯一, $PHP^T = H$, 得 $PH = HP$ 。



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 25 日)

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于学术学位营员, 考试时间 120 分钟.

1. 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-r_n)^{1/3}}{2^n}$, 其中 $\{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中有理数的一个排列, 证明:

(1) $f \in C(\mathbb{R})$.

解答: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{(x-r_n)^{1/3}}{2^n} \right| \leq \frac{(|x|+1)^{1/3}+1}{2^n}$. 级数 $\sum \frac{1}{2^n}$ 收敛, 由魏尔斯特拉斯判别法, 该函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 每一项 $u_n(x) = \frac{(x-r_n)^{1/3}}{2^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 一致收敛的连续函数列极限连续, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

(2) f 在 $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ 上可导.

解答: 取 $x_0 \notin [0, 1]$, 则存在 $\delta > 0$, 使得区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 与 $[0, 1]$ 不交. 逐项求导得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^n (x-r_n)^{2/3}}$. 在该邻域内 $|x-r_n| \geq \delta$, 通项绝对值 $\leq \frac{1}{3\delta^{2/3} 2^n}$, 级数一致收敛. 由逐项求导定理, $f'(x)$ 存在, 故 f 在 $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ 处处可导.

(3) $\forall x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, 存在 $\{r_n\}$ 的一个排列, 使得 f 在 x_0 处可导.

解答: x_0 是 $[0, 1]$ 内无理数, 重新排列有理数序列, 令 r_n 离 x_0 衰减得足够快, 使得导数级数 $\sum \frac{1}{3 \cdot 2^n (x_0-r_n)^{2/3}}$ 收敛. 只要 $|x_0-r_n| > 2^{-3n/4}$, 通项 $\leq \frac{1}{3 \cdot 2^n \cdot 2^{-n/2}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n/2}}$, 级数收敛. 此时逐项求导级数收敛, $f'(x_0)$ 存在.

2. 设 V 是由点 $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ 构成的三角形绕 y 轴旋转得到的几何体.

(1) 记 $x_0 = (3, 0, 0)$, 求点 x_0 到 V 的最短距离.

解答: 三角形三个顶点绕 y 轴旋转, 得到三条圆周:

$$y = -1, x^2 + z^2 = 4; \quad y = 1, x^2 + z^2 = 4; \quad y = 0, x^2 + z^2 = 1.$$

旋转体上任意一点坐标 (x, y, z) , 满足 $x^2 + z^2$ 在两条直线线段旋转形成的圆台侧面上. 点 $(3, 0, 0)$, $y = 0$, 旋转体在 $y = 0$ 截面圆盘半径为 1. 最短距离 $d = 3 - 1 = 2$.

(2) 求 V 的体积.

解答: 旋转体为圆台. $y \in [-1, 1]$, 截面半径函数 $R(y) = y + 2$.

$$V = \pi \int_{-1}^1 R(y)^2 dy = \pi \int_{-1}^1 (y+2)^2 dy = \pi \int_{-1}^1 (y^2 + 4y + 4) dy = \pi \left(\frac{2}{3} + 8 \right) = \frac{26\pi}{3}.$$

3. (1) 设 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy = 1$, 求 k 的值.

解答: 极坐标变换,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{kr^2} r dr d\theta.$$

积分收敛必须 $k < 0$. 令 $u = r^2$,

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{ku} du = \frac{\pi}{-k} = 1 \implies k = -\pi.$$

(2) 在 (1) 的条件下, 证明:

$$\left(\iint_{D_1} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) \left(\iint_{D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy \right) < \iint_{D_1 \cap D_2} e^{k(x^2+y^2)} dx dy.$$

其中区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid |y| \leq 1\}$.



解答: 记 $f(x, y) = e^{k(x^2+y^2)} > 0$, $k = -\pi < 0$, 函数径向递减。利用概率视角: $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1$, f 是二维高斯概率密度。左边 $P(D_1)P(D_2)$, 右边 $P(D_1 \cap D_2)$ 。 D_1 与 D_2 不是独立事件, 且 D_1 发生的条件下 $|y| \leq 1$ 的条件概率大于 $P(D_2)$:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_2 | D_1)P(D_1) > P(D_2)P(D_1).$$

不等式成立。

4. 设 $\mathcal{T}$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换, $A \in M_n(\mathbb{C})$, 并且 $\mathcal{T}$ 可逆当且仅当 A 可逆, 证明:

$$\exists c \in \mathbb{C}, \text{ s.t. } \det(\mathcal{T}A) = c \cdot \det A.$$

解答: 条件: $\det A = 0 \iff \det(\mathcal{T}(A)) = 0$, 因此 $\det(\mathcal{T}(A))$ 作为 A 的 n^2 元多项式, 它的零点集与 $\det(A)$ 的零点集完全一致。在复数域上, 不可约多项式 $\det A$ 的多项式倍只能是常数乘以 $\det A$ 。于是存在常数 c , $\det(\mathcal{T}(A)) = c \det(A)$ 。

5. 设 A 为 n 阶复方阵, 定义 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, 证明:

$$(1) \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}.$$

解答: 若 A 上三角, 对角元 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 e^A 上三角, 对角元 e^{λ_i} 。

$$\det(e^A) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}.$$

一般矩阵可由上三角矩阵逼近, 连续性得等式成立。

(2) e^A 可对角化的充分必要条件是 A 可对角化。

解答: 必要性: 若 A 有 Jordan 块 $J_k(\lambda)$, $k \geq 2$, 则 $e^{J_k(\lambda)}$ 仍然是一个非对角可分 Jordan 块, 因此 e^A 不可对角化; 逆否: e^A 可对角化 $\implies A$ 无高阶 Jordan 块, A 可对角化。充分性: 若 A 可对角化, $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 $e^A = Pe^{\Lambda}P^{-1}$, e^{Λ} 对角矩阵, e^A 可对角化。

(3) 对任意行列式为 1 的 2 阶实方阵 A , 都存在矩阵 B 使得 $A = e^B$ 。

解答: $\det A = 1$ 。实二阶矩阵分三类: 1. 两个不同实特征值 λ, λ^{-1} , 取对角对数; 2. 二重特征值 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e^B = A; 3. 一对共轭复特征值 $e^{\pm i\theta}$, 旋转矩阵 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$$

$$\text{取 } B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, e^B = A。所有情形均存在 } B。$$

6. 设 Q 为 $n \times m$ 实矩阵且满足 $Q^T Q = I_m$, A 为 n 阶实正定矩阵。证明:

$$Q^T A^{-1} Q - (Q^T A Q)^{-1}$$

半正定。

解答: 利用矩阵舒尔补 / 柯西交错定理, 或者正定矩阵的凹不等式。令 $P = A^{1/2}Q$, 由 $Q^T Q = I_m$, $P^T P = Q^T A Q$ 。目标矩阵:

$$Q^T A^{-1} Q - (P^T P)^{-1} = P^T (A^{-1} - A^{-1/2} Q (P^T P)^{-1} Q^T A^{-1/2}) P.$$

括号内是正交投影算子的补, 半正定, 故原式半正定。



复旦大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (6 月 27 日)

来源: 小红书作者 Relax

注: 本试卷仅适用于专业学位营员, 考试时间 120 分钟.

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

解答: 令 $t = \frac{1}{x}$, $t \rightarrow 0^+$ 。

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

答案: $\frac{1}{2}$.

2. 设 $f(x) = (e^x \cos \sqrt{3}x)$, 求 $f^{(98)}(x)$.

解答: 欧拉公式, $\cos \sqrt{3}x = \operatorname{Re} e^{i\sqrt{3}x}$ 。

$$e^x \cos \sqrt{3}x = \operatorname{Re} e^{(1+i\sqrt{3})x}.$$

记 $\lambda = 1 + i\sqrt{3}$, 模长 $|\lambda| = \sqrt{1+3} = 2$, 辐角 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\lambda = 2e^{i\pi/3}$ 。

$$\lambda^{98} = 2^{98} e^{i\frac{98\pi}{3}} = 2^{98} e^{i(32\pi + \frac{2\pi}{3})} = 2^{98} e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$f^{(98)}(x) = \operatorname{Re} (\lambda^{98} e^{\lambda x}) = 2^{98} e^x \cos \left(\sqrt{3}x + \frac{2\pi}{3} \right).$$

3. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 + y^2 - xy) dx dy,$$

其中区域 $D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$.

解答: 极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 。边界: $r^4 \leq r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \implies r^2 \leq \cos 2\theta$ 。 $x \geq 0$, 于是 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。被积函数 $x^2 + y^2 - xy = r^2 - r^2 \cos \theta \sin \theta$ 。注意到 $xy = r^2 \sin \theta \cos \theta$ 关于 θ 奇函数, 积分区间对称, 该项积分等于 0。

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{4} \cos^2 2\theta d\theta.$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \stackrel{u=2\theta}{=} \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

答案: $\frac{\pi}{16}$.

4. 求函数 $f(x) = \sin^2 x$ 在 $x = \pi$ 处的 Taylor 展开式, 并确定其收敛区间.

解答: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 。令 $t = x - \pi$, $x = \pi + t$ 。

$$\cos 2x = \cos(2\pi + 2t) = \cos 2t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x - \pi)^{2n}}{(2n)!}.$$

收敛区间: $(-\infty, +\infty)$.



5. 设 $y(x)$ 为下述常微分方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = e^{3x}$ 满足 $y(0) = y'(0) = 0$ 的解, 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - 2(\arctan x)^2}{y(x)}.$$

解答: 泰勒展开分子:

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4), \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$2(\arctan x)^2 = 2\left(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4).$$

$$\text{分子} = x^2 - \frac{x^2}{2} - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) = -x^2 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

初值 $y(0) = y'(0) = 0$, 代入方程 $y''(0) = e^0 = 1$, 所以 $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = -2.$$

答案: **-2**.

6. 设

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

计算 $f'_+(0)$ 的值.

解答: 分部积分. 令 $u = t^2$, $dv = \cos \frac{1}{t} \frac{dt}{t^2}$ 。

$$\int \cos \frac{1}{t} dt = t^2 \sin \frac{1}{t} - \int 2t \sin \frac{1}{t} dt.$$

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} - \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt \right) = 0.$$

答案: **0**.

7. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

且 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

是 $f(x)$ 的傅里叶级数, 求 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 的值.

解答: 周期 $T = 2$, 偶函数. $S(-5/2) = S(-1/2) = S(1/2)$ 。 $x = \frac{1}{2}$ 是连续点, $S\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 。

答案: **$\frac{1}{2}$** .

8. 计算二重积分

$$\iint_D (x-y)^2 \tan^2(x+y) dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$.



解答: 换元 $u = x - y$, $v = x + y$ 。雅可比行列式 $J = \frac{1}{2}$ 。区域变换后关于原点对称, 被积函数 $\tan^2 v$, $(x - y)^2 = u^2$ 。

$$I = \frac{1}{2} \iint u^2 \tan^2 v \, du \, dv = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u^2 \, du \right) \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 v \, dv \right).$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u^2 \, du = \frac{\pi^3}{12}, \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 v \, dv = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec^2 v - 1) \, dv = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{12} \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^3(4 - \pi)}{48}.$$

9. 求满足

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x - t)f(t) \, dt$$

的二次连续可微函数 $f(x)$ 。

解答: 变形 $f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t) \, dt + \int_0^x t f(t) \, dt$ 。求导两次:

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t) \, dt, \quad f''(x) = -\sin x - f(x).$$

微分方程: $f''(x) + f(x) = -\sin x$, 初值 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ 。齐次解 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$, 特解 $y^* = \frac{1}{2}x \cos x$ 。

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x.$$

10. 设数列 $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ 。

(1) 证明 $\{a_n\}$ 收敛。

解答: 考察差分

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}.$$

$$\text{有理化: } 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0.$$

$\{a_n\}$ 单调递减。放缩: $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$, 累加得 $a_n > -2$, 数列有下界。单调递减有下界数列必收敛。

(2) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 。

解答: 由 (1), $1 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + a_n$, $\{a_n\}$ 收敛故有界。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} + a_n}{\sqrt{n}} = 2.$$

答案: 2.



复旦大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题

来源：小红书作者 Relax

注：本试卷仅适用于学术学位营员，考试时间 120 分钟。

1. 填空题 (12 分)

- (1) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则参数 t 的取值范围为__.

解答：二次型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

顺序主子式：

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0 \implies -2 < t < 2.$$

$$\Delta_3 = \det(A) = 4 - 4t - 4t^2 > 0 \implies t^2 + t - 1 < 0 \implies \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

取交集, $t \in \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

- (2) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2b & -b-1 & 1 \end{pmatrix}$ 可对角化, 则 b 的取值范围为__.

解答：先求特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

$\lambda = -1$ 二重根, 可对角化等价于 $\dim \ker(A + I) = 2$, 即 $\text{rank}(A + I) = 1$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2b & -b-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

第二行 $(4, -4, 0)$, 第一行 $(2, -2, 4)$ 线性无关, $\text{rank} \geq 2$ 。 $\text{rank}(A + I) = 2$ 恒成立, 不存在 b 使得秩为 1, 无实数 b 满足条件.

- (3) 设 A 是 6 阶矩阵, 满足 $A^2 = O, \text{rank } A = 3$, 则 A 的 Jordan 标准形为__.

解答： $A^2 = 0 \implies$ Jordan 块阶数最多为 2。设 2- 阶块个数为 s 。每个 2 阶块贡献秩 1, 1 阶零块秩 0, 故 $\text{rank}(A) = s = 3$ 。总阶数： $2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 6$ 。

$$J = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0, 0 \right).$$

2. 计算题 (30 分)

- (1) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的原函数.

解答： $x \neq 0$, 分部积分

$$\int \cos \frac{1}{x} dx = x^2 \sin \frac{1}{x} - \int 2x \sin \frac{1}{x} dx.$$



$$F(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(2) 计算二重积分 $\iint_{0 \leq x \leq y \leq \pi} \ln |\sin(x-y)| dx dy$.

解答: 令 $u = y - x$, $v = x + y$ 。区域 $0 \leq x \leq y \leq \pi$, $0 \leq u \leq \pi$, $u \leq v \leq 2\pi - u$, 雅可比 $J = \frac{1}{2}$ 。

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\pi - u) \ln |\sin u| du = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \ln \sin u du - \frac{1}{2} \int_0^\pi u \ln \sin u du.$$

$$\int_0^\pi \ln \sin u du = -\pi \ln 2, \quad \int_0^\pi u \ln \sin u du = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.$$

$$I = \frac{\pi}{2}(-\pi \ln 2) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{2} \ln 2 \right) = -\frac{\pi^2}{4} \ln 2.$$

(3) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\ln(1-x)}$ 。

解答: $\ln(1-x) \sim -x$, $x \rightarrow 1^-$ 。由 Stolz-Cesàro 与生成函数渐近, $\sum a_n x^n \sim -\ln(1-x)$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\ln(1-x)} = -1.$$

3. 解答题 (58 分)

(1) 已知 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 求积分

$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx$$

能取到的最小值, 并求出此时的 $f(x)$ 。

解答: 柯西 - 施瓦茨不等式

$$1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \sqrt{\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx \geq \frac{1}{\pi/4} = \frac{4}{\pi}.$$

等号成立当且仅当

$$f(x) \sqrt{1+x^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \implies f(x) = \frac{\lambda}{1+x^2}.$$

$$\text{代入 } \int_0^1 \frac{\lambda}{1+x^2} dx = \lambda \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \implies \lambda = \frac{4}{\pi}. \text{ 最小值为 } \frac{4}{\pi}, \text{ 此时 } f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}.$$

(2) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续并且一阶可导, $f'(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得

$$f'(\xi) = 2024(f(\xi) - f(0)).$$

解答: 构造辅助函数

$$\varphi(x) = e^{-2024x} (f(x) - f(0)).$$

$\varphi(0) = 0$ 。分两种情形: ① $\varphi(2) = 0$, 罗尔定理, $\exists \xi \in (0, 2)$, $\varphi'(\xi) = 0$, 展开即得; ② $\varphi(2) \neq 0$ 。由 $\varphi'(1) = e^{-2024} (f'(1) - 2024(f(1) - f(0))) = e^{-2024} \cdot (-2024(f(1) - f(0)))$ 。再用达布定理, 导数可取介于 $\varphi'(0)$ 与 $\varphi'(2)$ 之间的值, 必存在 $\xi \in (0, 2)$, $\varphi'(\xi) = 0$, 原式成立。



(3) 已知方阵 $C \in M_m(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$, 对于任意矩阵 A, B 都有

$$\text{rank}(C - AB) + n = \text{rank}(D - BA) + m.$$

证明: 存在非零数 k 使得 $C = kI_m$, $D = kI_n$.

解答: 取 $A = 0$, 则 $\text{rank}(C) + n = \text{rank}(D) + m$. 取任意可逆矩阵 P, Q , 令 $A = P$, $B = Q^{-1}$, 则 $AB = I_m$, $BA = I_n$,

$$\text{rank}(C - I_m) + n = \text{rank}(D - I_n) + m.$$

再取秩 1 矩阵 AB , 可推得 $C - \lambda I$ 对任意 λ 奇异, 只有当 C 为数量矩阵 kI_m ; 同理 $D = kI_n$.

(4) 已知 A, B 为 n 阶复方矩阵, 存在正整数 m 使得

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = O,$$

证明: $|A| = |B|$.

解答: 原式就是 $(A - B)^m = 0$, 即 $A - B$ 幂零矩阵。于是 A 与 B 的特征多项式相等, 所有特征值之和相同, 行列式相等, $\det A = \det B$.



复旦大学数学科学学院

2025 年学术营笔试

来源：小红书作者 Relax

回忆版整理

1. 设 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 为实内积空间, $T: V \rightarrow V$ 为线性映射。

(a) 写出 T 的伴随算子 T^* 的定义。

解答: $T^*: V \rightarrow V$ 是唯一线性算子满足: 对任意 $u, v \in V$,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle.$$

(b) 考虑 $V = \mathbb{R}^2$ 及其一组基 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, 设 V 上两个线性映射在这组基下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

若它们在 V 的某个内积下均成为自伴随算子, 求该内积在上述基下的矩阵。

解答: 设内积矩阵 $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, G 正定对称。算子自伴等价于 $GA = A^T G, GB = B^T G$ 。

$$GA = A^T G \implies \begin{cases} b = 0 \\ 6b + a - c = 0 \end{cases} \implies b = 0, a = c.$$

代入第二个方程 $GB = B^T G$, 自动成立。取 $a = c > 0$, 可取

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{所有解为 } kI, k > 0).$$

2. 求 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$.

解答: 分部积分 + 狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = -\frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

答案: $\frac{\pi}{2}$.

3. 求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & (x_2 + \cdots + x_n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & (x_1 + \cdots + x_{n-1})^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解答: 令 $S_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j$, 第 i 行末元 S_i^{n-2} 。该行列式本质为范德蒙德型, 展开 S_i^{n-2} 后可表示为前面列的线性组合,

$$D = 0.$$

4. 分析 $\int_0^{+\infty} \sin \left(x^p + \frac{1}{x^p} \right) dx$ 在何时绝对收敛、条件收敛和发散。

解答: 换元 $t = x^p$ 。- $p \leq 0$: $x \rightarrow +\infty$ 时被积函数不趋于 0, 积分发散。- $p > 0$: 拆分 $[0, 1]$ 与 $[1, +\infty)$; 无穷远处用狄利克雷判别法。绝对值: $|\sin(\dots)|$ 不衰减, ** 永远不绝对收敛 **; $p > 0$ 条件收敛; $p \leq 0$ 发散。



5. 设 a_n 为方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 的正实根, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 的收敛域 D , 并问其在 D 中是否绝对收敛和一致收敛。

解答: 先估计根: $a_n \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$ 。级数 $\sum \frac{1}{n} \cos nx$: - 收敛域: $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 在 $x = 2k\pi, \sum a_n$ 发散。- 非端点处条件收敛, ** 不绝对收敛 **; 在不含 $2k\pi$ 的闭区间上一致收敛, 全体收敛域上不一致收敛。

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) 问: A 是否可对角化?

解答: 特征值 $\lambda_1 = 1$ (二重), $\lambda_2 = 2$ 。

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(A - I) = 2.$$

几何重数 $= 1 < 2$, A 不可对角化。

- (b) 设 $\varphi: M(3, \mathbb{R}) \rightarrow M(3, \mathbb{R}), X \mapsto A^{-1}XA$, 求 $\text{tr}(\varphi^{100})$ 。

解答: φ 是相似变换诱导的线性算子, 其 9 维矩阵的迹等于特征值之和, 即 A 的全部特征值两两乘积之和。 A 的特征值: $1, 1, 2$ 。 $\varphi^{100}(X) = A^{-100}XA^{100}$, φ^{100} 的特征值: $\lambda_i^{-1}\lambda_j$ 的 100 次幂。

$$\text{tr}(\varphi^{100}) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2^{100} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2^{100} + 2^{-1} \cdot 2 + 2^{-1} \cdot 2 + 2^{-1} \cdot 2 = 6 + 2^{101}.$$

7. 设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\int_0^x \frac{t}{\arctan t} dt - \frac{1}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi^2}x - \frac{8}{\pi^3} \ln x + A \right) = B.$$

求 A 的表达式及 B 的值。

解答: 渐近展开 $t \rightarrow +\infty, \frac{t}{\arctan t} = \frac{t}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} - \dots}$ 。

$$\frac{t}{\arctan t} = \frac{2}{\pi}t + \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3 t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

积分:

$$\int_0^x \frac{t}{\arctan t} dt = \frac{1}{\pi}x^2 + \frac{4}{\pi^2}x + \frac{8}{\pi^3} \ln x + A + o(1).$$

余项积分给出常数项 A ; 再乘 x 求极限: $B = -\frac{8}{\pi^4}$ 。



上海交通大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽



上海交通大学数学科学学院
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)
来源: 小红书作者 Relax

1. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sqrt{\sin x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所得旋转体体积。

解答: 旋转体体积公式

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{+\infty} f^2(x) dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx. \\ \int e^{-2x} \sin x dx &= -\frac{e^{-2x}(2 \sin x + \cos x)}{5} + C, \\ V &= \pi \left(-\frac{e^{-2x}(2 \sin x + \cos x)}{5} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

2. 设积分

$$\oint_L 2[xf(y) + g(y)]dx + [x^2g(y) + 2xy^2 - 2xf(y)]dy = 0,$$

其中 L 为任意一条平面曲线, 求可微函数 $f(y), g(y)$ 满足 $f(0) = -2, g(0) = 1$ 。

解答: 由曲线积分与路径无关, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$2xg(y) + 2y^2 - 2f(y) = 2xf'(y) + 2g'(y).$$

比较 x 的系数与常数项:

$$\begin{cases} g(y) = f'(y) \\ 2y^2 - 2f(y) = 2g'(y) \end{cases} \implies f''(y) + f(y) = y^2.$$

通解 $f(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y + y^2 - 2$ 。初值 $f(0) = -2 \implies C_1 = 0, g(0) = f'(0) = 1 \implies C_2 = 1$ 。

$$f(y) = \sin y + y^2 - 2, \quad g(y) = \cos y + 2y.$$

3. 设 $e < a < b < e^2$, 证明: $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$ 。

解答: 令 $f(x) = \ln^2 x$, 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (a, b)$,

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2 \ln \xi}{\xi}(b - a).$$

记 $h(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, $h'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} < 0, x > e$ 。 $h(x)$ 在 (e, e^2) 严格递减, $h(\xi) > h(e^2) = \frac{4}{e^2}$, 代入即证。

4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, $W_1, W_2, \dots, W_s$ 为 V 的 s 个子空间, $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s$ 。

证明: W 为 V 的子空间的充分必要条件是存在某个 $i (1 \leq i \leq s)$, 使得 $W = W_i$ 。

证明: 必要性: 反证。若不存在, 任取 $w_i \in W_i \setminus \bigcup_{j \neq i} W_j$ 。利用子空间并集定理, 有限个真子空间的并不能构成子空间, 可得矛盾。充分性显然。

5. 设 A 是 3 阶方阵, 线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为

$$x = \gamma_0 + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2,$$

其中 $\beta = (1, 2, 3)^T, \gamma_0 = (1, 0, 1)^T, \eta_1 = (2, -1, 0)^T, \eta_2 = (1, 0, -1)^T$, 试求矩阵 A 。



解答: $A\gamma_0 = \beta$, $A\eta_1 = \mathbf{0}$, $A\eta_2 = \mathbf{0}$ 。记 $P = (\gamma_0, \eta_1, \eta_2)$, $AP = (\beta, \mathbf{0}, \mathbf{0})$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A = (\beta, \mathbf{0}, \mathbf{0})P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 $r(A) + r(B) \leq n$ 。证明: 存在 n 阶可逆矩阵 M 使得 $AMB = O$ 。

证明: 设 $r = \text{rank}(A)$, $s = \text{rank}(B)$, $r + s \leq n$ 。由相抵标准形, $\exists$ 可逆阵 P, Q , $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$;

$\exists$ 可逆阵 R, S , $B = R \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_s \end{pmatrix} S$ 。取 $M = Q^{-1} \begin{pmatrix} O & I_{n-r} \\ I_r & O \end{pmatrix} R^{-1}$, 则 $AMB = O$, M 可逆。

7. 设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 求统计量 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 和 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 的相关系数。其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是样本均值。

解答: 记 $U = \sum (X_i - \bar{X})^2$, $V = \sum (X_i - \mu)^2$ 。

$$U/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1), \quad V/\sigma^2 \sim \chi^2(n).$$

$$V = U + n(\bar{X} - \mu)^2, \quad \text{Cov}(U, V) = \text{Var}(U) = 2(n-1)\sigma^4,$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}} = \frac{2(n-1)\sigma^4}{\sqrt{2(n-1)\sigma^4 \cdot 2n\sigma^4}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

8. 叙述随机变量四种收敛的定义及相互关系。

解答:

(a) 依概率收敛: $X_n \xrightarrow{P} X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$;

(b) 几乎必然收敛 (以概率 1 收敛): $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$;

(c) r -阶矩收敛: $\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X|^r = 0$;

(d) 依分布收敛: $X_n \xrightarrow{d} X$, 在分布函数 F 的连续点上 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ 。

关系: 几乎必然收敛 $\implies$ 依概率收敛 $\implies$ 依分布收敛; r -阶收敛 $\implies$ 依概率收敛。

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, 1)$, 试求第 k 个次序统计量 $X_{(k)}$ 的密度函数, 并求出 $E(X_{(k)})$ 和 $\text{Var}(X_{(k)})$ 。

解答: 次序统计量密度

$$f_{X_{(k)}}(x) = \begin{cases} \binom{n}{k-1, 1, n-k} x^{k-1} (1-x)^{n-k}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 $X_{(k)} \sim \text{Beta}(k, n-k+1)$ 。

$$E(X_{(k)}) = \frac{k}{n+1}, \quad \text{Var}(X_{(k)}) = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 试给出参数 $\ln \sigma$ 的估计并讨论其相合性。

解答: 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$, 由大数定律 $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ 。取估计量 $\widehat{\ln \sigma} = \frac{1}{2} \ln S^2$ 。由连续映射定理, $\widehat{\ln \sigma} \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \ln \sigma^2 = \ln \sigma$, 故该估计是相合估计。



11. 甲乙两人进行一项竞技游戏，初始时甲持有 10 元，乙持有 20 元。每局游戏规则如下：若甲获胜，乙向甲支付 1 元；若乙获胜，甲向乙支付 1 元，且每局甲乙获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$ 。游戏持续进行，直至某一方资金归零之时终止，此时另一方获胜。求甲最终获胜的概率。

解答：对称随机游走赌徒破产问题，本金 $a = 10, b = 20$ ，总资金 30。公平游戏下甲获胜概率

$$P = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}.$$

12. 叙述 UMVUE 的定义并写出几种常见的求解方法。

解答：UMVUE（一致最小方差无偏估计）：设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，对任意 θ 的无偏估计 $\tilde{\theta}$ ，恒有 $\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\tilde{\theta})$ ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 UMVUE。

常用求解方法：

- (a) 充分完备统计量 + 无偏估计（Lehmann-Scheffé 定理）；
- (b) 零无偏估计法；
- (c) C-R 下界法（达到克拉美 - 罗下界的无偏估计必为 UMVUE）。



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题 (数学)

来源: 小红书作者 Relax

1. 设 $\{a_n\}$ 为一数列, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。证明: $|l| \leq 1$ 。

证明: 反证法。若 $|l| > 1$, 取 $\varepsilon = \frac{|l| - 1}{2} > 0$, 则存在 N , 当 $n > N$ 时

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > |l| - \varepsilon = \frac{|l| + 1}{2} > 1.$$

于是 $|a_{n+1}| > \frac{|l| + 1}{2} |a_n|$, 递推得 $|a_n| \rightarrow +\infty$, 与 $\{a_n\}$ 收敛矛盾。故 $|l| \leq 1$ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 令 $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 。

(1) 求 $g'(x)$ 。

(2) 讨论 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

解答: 先换元, 令 $u = xt$ 。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(1) 当 $x \neq 0$,

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}.$$

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, 则 $f(0) = 0$ 。由导数定义:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}.$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = g'(0).$$

所以 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 连续。

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = 0$ 。证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}.$$

证明: 构造辅助函数

$$F(x) = e^{-\frac{x}{b-a}} (f(x) - f(a)).$$

$$F'(x) = e^{-\frac{x}{b-a}} \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b-a} \right).$$

只需证 $\exists \xi$ 使 $F'(\xi) = 0$ 。- 若 $f(c) = f(a)$, 则 $F(c) = 0 = F(a)$, 由罗尔定理即得。- 若 $f(c) \neq f(a)$, 不妨 $f(c) > f(a)$, 则 $F(c) > 0$ 。 $F'(c) = e^{-\frac{c}{b-a}} \left(-\frac{f(c) - f(a)}{b-a} \right) < 0$ 。于是 F 在 c 附近递减, 故 $\exists x_1 > c$ 使 $F(x_1) < F(c)$ 。 $F(a) = 0$, 由介值 $\exists x_2 \in (a, c)$ 使得 $F(x_2) = F(x_1)$, 罗尔定理给出 $\xi \in (x_2, x_1)$, $F'(\xi) = 0$ 。命题得证。

4. 设函数项级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2}$ 。

(1) 求函数 $S(x)$ 的定义域。



(2) 讨论 $S(x)$ 在定义域内的连续性.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ 是否存在? 给出证明.

解答: (1) 定义域: $x \in \mathbb{R}$. 通项 $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2}$, e^{-nx} 收敛, 交错级数. (2) 对任意 $x_0 > 0$, 取闭区间 $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$; 由狄利克雷判别法级数内闭一致收敛, 每一项连续, 故 $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续; $x = 0$ 处级数收敛, 由阿贝尔定理, $S(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续. (3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x^2} = 0.$$

极限存在, 值为 0.

5. 设 $\partial\Omega$ 为区域 Ω 的边界曲面, 分片光滑, u, v 在 $\bar{\Omega}$ 上二阶连续可微, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u 在 $\mathbf{n}$ 方向上的方向导数.

(1) 证明:

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

(2) 设 $\Delta u = 0$, p_0 为 Ω 的内点. 证明:

$$u(p_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{\cos(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n})}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2} u + \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

证明: (1) 由散度定理, $\nabla \cdot (v \nabla u) = v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v$, 两边在 Ω 积分

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) \, dV = \iint_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

左边展开即得恒等式.

(2) 取格林函数基本解 $v = \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|}$, 它在 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ 奇异. 挖去以 $\mathbf{p}_0$ 为心半径 ε 的小球 B_ε , 在 $\Omega \setminus B_\varepsilon$ 上 $\Delta v = 0$, $\Delta u = 0$. 代入第一问恒等式, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 取极限即得该调和函数的泊松积分表达式.

6. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.

(1) 若 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$. 证明: $r(A) = n$.

(2) 进一步设 A 的主对角元素均大于零, 证明: $|A| > 0$.

证明: (1) A 严格对角占优矩阵. 若 $\det(A) = 0$, 则齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 存在非零解 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. 设 $|x_k| = \max_i |x_i| > 0$, 考察第 k 个方程

$$a_{kk}x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j, \quad |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}|.$$

约去 $|x_k|$ 得到 $|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, 矛盾. $\det(A) \neq 0$, 故秩为 n .

(2) 严格对角占优, 对角线元素全正. 考察 $A(t) = (a_{ij}(t))$, $a_{ii}(t) = a_{ii}$, $a_{ij}(t) = ta_{ij}$, $i \neq j$, $t \in [0, 1]$. $A(t)$ 始终严格对角占优, $\det(A(t)) \neq 0$. $\det(A(0)) = \prod a_{ii} > 0$. 行列式关于 t 连续, 不能变号, 故 $\det(A) = \det(A(1)) > 0$.

7. 设 A, B 均为正定矩阵, 证明: 矩阵方程 $AX + XA = B$ 有唯一解 $X = C$, 并且 C 是正定矩阵.

证明: 在复空间上, A 可正交对角化. 算子 $T(X) = AX + XA$, 它的特征值为 $\lambda_i + \lambda_j > 0$ (λ_i 是 A 的特征根), 所以 T 可逆, 方程解唯一. 对 $AX + XA = B$ 两边取共轭转置: $X^*A + AX^* = B$, 由唯一性 $X = X^*$, X 是 Hermite 矩阵. 设 μ 是 X 的特征值, $\mathbf{y}$ 为对应特征向量, 则

$$\mathbf{y}^* A X \mathbf{y} + \mathbf{y}^* X A \mathbf{y} = \mu \mathbf{y}^* A \mathbf{y} + \mu \mathbf{y}^* A \mathbf{y} = 2\mu \mathbf{y}^* A \mathbf{y} = \mathbf{y}^* B \mathbf{y} > 0.$$

$\mathbf{y}^* A \mathbf{y} > 0$, 于是 $\mu > 0$, X 正定.



8. 设 V 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 6 维线性空间, φ 是 V 上的一个线性变换, 其极小多项式 $m(x) = x^3 + x - 3$.
- (1) 求线性变换 φ 的特征多项式.
- (2) 求线性变换 φ 的有理标准型.

解答: $m(x) = x^3 + x - 3$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约 (有理根检验无有理根, 三次不可约)。极小多项式次数为 3, $\dim V = 6$, 不变因子为 $\{x^3 + x - 3, x^3 + x - 3\}$ 。(1) 特征多项式: $f(x) = (x^3 + x - 3)^2$ 。(2) 有理标准形为两个友块对角:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 为三个实数域上两两互素的非常数多项式, 记 $\text{rad } f(x)$ 为多项式 $f(x)$ 在复数域上不相同的根的个数。

- (1) 证明: 若 $f(x) + g(x) = h(x)$, 则 $\max\{\deg f(x), \deg g(x), \deg h(x)\} \leq \text{rad}(f(x)g(x)h(x)) - 1$.
- (2) 证明: 若 $[f(x)]^n + [g(x)]^n = [h(x)]^n$, 则 $n = 1$ 或 2 .

证明: (1) 多项式版本的 Mason-Stothers 定理, 即 ABC 定理, 直接给出结论。(2) 若 $f^n + g^n = h^n$, 两两互素, 由 ABC 定理

$$\max(\deg f^n, \deg g^n, \deg h^n) \leq \text{rad}(f^n g^n h^n) - 1 = \text{rad}(fgh) - 1.$$

$\text{rad}(fgh) \leq \deg f + \deg g + \deg h$ 。设 $\deg f \geq \deg g, \deg h$, 则

$$n \deg f \leq \deg f + \deg g + \deg h - 1 \leq 3 \deg f - 1.$$

$n \geq 3$ 导出矛盾, 故 $n = 1, 2$ 。

10. 设 n 阶方阵 A, B 满足 $A + B + AB = O$, 且 $\text{rank}(A) \geq n - 1$ 。证明: 对任意自然数 k , 有

$$\text{rank}(A^k) + \text{rank}(B^k) \geq 2\text{rank}(AB).$$

证明: 条件变形: $(A + I)(B + I) = I$ 。于是 $A + I$ 与 $B + I$ 互为逆矩阵, 因此 $A + I, B + I$ 均可逆。

$$AB = -A - B.$$

利用秩不等式 $\text{rank}(X) + \text{rank}(Y) \geq \text{rank}(X + Y)$ 。又 $(A + I)$ 可逆, $A^k + I = (A + I)(A^{k-1} - A^{k-2} + \cdots + I)$, $A^k + I$ 可逆。同理 $B^k + I$ 可逆。再结合 $\text{rank}(A^k) + \text{rank}(B^k) \geq 2\text{rank}(AB)$, 利用已知 $\text{rank}(A) \geq n - 1$, 分 $\text{rank}(A) = n$ 与 $\text{rank}(A) = n - 1$ 两种情形讨论可证得不等式。



上海交通大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题 (应用统计)
来源: 小红书作者 Relax

1. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2 - y^2) e^{(x+y)^2} dx dy,$$

$$\text{其中区域 } D = \left\{ (x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

解答: 极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。由区域条件: $y \leq x \implies \tan \theta \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1$ 。

$$x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\theta, \quad (x+y)^2 = r^2(1+\sin 2\theta), \quad dx dy = r dr d\theta.$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \cos 2\theta \cdot e^{r^2(1+\sin 2\theta)} \cdot r dr d\theta.$$

对内层先对 θ 换元, 令 $u = 1 + \sin 2\theta, du = 2 \cos 2\theta d\theta$, 最后算出结果

$$I = \frac{e-1}{4}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right].$$

解答: 欧拉 - 麦克劳林求和公式, 或者拆分积分

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx.$$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(- \int_x^{\frac{k}{n}} f'(t) dt \right) dx.$$

交换积分次序, 取极限得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

3. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶实矩阵.

(1) 若 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: $r(\mathbf{A}) = n$.

(2) 进一步设 $\mathbf{A}$ 的主对角元素均大于零, 证明: $|\mathbf{A}| > 0$.

证明: (1) $\mathbf{A}$ 为严格对角占优矩阵. 反证, 若 $\det(\mathbf{A}) = 0$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解. 设 $|x_k| = \max |x_i| > 0$, 考察第 k 行:

$$a_{kk}x_k = - \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j, \quad |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

约去 $|x_k|$, 得到 $|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, 矛盾. $\det(\mathbf{A}) \neq 0, r(\mathbf{A}) = n$.

(2) 构造连续矩阵族 $\mathbf{A}(t)$, 对角线不变, 非对角元乘 $t, t \in [0, 1]$. $\mathbf{A}(t)$ 恒严格对角占优, $\det \mathbf{A}(t) \neq 0$. $\det \mathbf{A}(0) = \prod a_{ii} > 0$. 行列式连续不能变号, $\det(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}(1) > 0$.

4. 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的所有 1 阶主子式之和, 2 阶主子式之和均为 0. 证明:

(1) $\mathbf{A}$ 的特征值全为 0.



(2) $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$.

证明: (1) 特征多项式

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n \det \mathbf{A}.$$

$\text{tr}(\mathbf{A})$ 即全部 1 阶主子式之和, s_2 即全部 2 阶主子式之和。题设 $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0, s_2 = 0$ 。设特征根为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则

$$\sum \lambda_i = 0, \quad \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = 0 \implies \sum \lambda_i^2 = \left(\sum \lambda_i\right)^2 - 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = 0.$$

若 $\mathbf{A}$ 是实矩阵, 并且可对角化, 则特征根全为 0; 在复数域, 结合牛顿幂和, $p_1 = p_2 = 0$, 再由对称多项式, 极小多项式根只能为 0, 故所有特征根都是 0。

(2) 所有特征根为 0, 则 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形对角线元素全为 0, 幂零矩阵。幂零指数不超过阶数 n , 于是 $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$ 。

5. 设 $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, 证明: 事件 A 与 B 独立的充要条件是 $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\bar{B})$ 。

证明:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|\bar{B}) \iff \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})}.$$

利用 $\mathbb{P}(A\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$, 交叉相乘:

$$\mathbb{P}(AB)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(B)(\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)).$$

展开化简: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, 即独立。每一步可逆, 充要条件成立。

6. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ 。定义 $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$, 求 S_n 的特征函数 $\varphi_n(t)$ 并求当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限分布。

解答: 单个 X_i 的特征函数:

$$\varphi_{X_i}(t) = \mathbb{E}e^{itX_i} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \cos t.$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \varphi_n(t) = \mathbb{E} \exp \left(it \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \ln \cos \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

极限特征函数是标准正态分布 $N(0, 1)$ 的特征函数。故极限分布为 $\mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ 。

7. 设随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布 $\mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right)$, 记

$$U = \begin{cases} 1 & X \geq 0, \\ -1 & X < 0, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1 & Y \geq 0, \\ -1 & Y < 0. \end{cases}$$

求 U 和 V 的相关系数 $\text{Corr}(U, V)$ 。

解答: U, V 都是对称取值 ± 1 , $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = 0$, $\text{Var}(U) = \text{Var}(V) = 1$ 。

$$\text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{P}(UV = 1) - \mathbb{P}(UV = -1).$$

$$\mathbb{P}(UV = 1) = \mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0) + \mathbb{P}(X < 0, Y < 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho.$$

$$\mathbb{P}(UV = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \rho.$$

$$\text{Corr}(U, V) = \mathbb{E}(UV) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho.$$



8. $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, \theta)$, $Y_1, \dots, Y_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, 2\theta)$, 试求 θ 的无偏估计中方差最小的统计量, 给出构造思路, 并证明其方差最小.

解答: 由因子分解定理, $X_{(n)} = \max\{X_i\}$, $Y_{(m)} = \max\{Y_j\}$ 为联合充分统计量. $X_{(n)} \sim \text{Beta}(n, 1) \cdot \theta$, $\mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta$, $\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 无偏. $Y_{(m)}$ 支撑上限 2θ , $\mathbb{E}(Y_{(m)}) = \frac{m}{m+1} \cdot 2\theta$, $\hat{\theta}_2 = \frac{m+1}{2m}Y_{(m)}$ 无偏. 由 Lehmann-Scheffé, 充分完备统计量的无偏估计是 UMVUE. 最优估计为两个无偏估计的加权组合, 权重反比于各自方差, 得到方差最小无偏估计.

9. 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是从两点分布族 $\{b(1, p) : 0 < p < 1\}$ 中抽取的简单样本, 且 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ 为充分完备统计量, 求 $g(p) = p(1-p)$ 的 UMVUE.

解答: $T \sim B(n, p)$. 先找无偏估计:

$$\mathbb{E}\left(\frac{T(n-T)}{n(n-1)}\right) = p(1-p).$$

由 Lehmann-Scheffé 定理, UMVUE 为

$$\widehat{g(p)} = \frac{T(n-T)}{n(n-1)}.$$

10. 设 $x_1, \dots, x_n$ 为来自 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的样本, 试求假设 $H_0 : \sigma^2 = 1$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ 的似然比检验.

解答: 似然函数

$$L(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2\right).$$

$\Omega = \{\sigma^2 > 0\}$, $\omega = \{\sigma^2 = 1\}$. Ω 上 MLE: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2$. 似然比

$$\lambda = \frac{L(1)}{L(\hat{\sigma}^2)} = \left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum x_i^2 + \frac{n}{2}\right).$$

拒绝域: $\lambda \leq c$, 等价于 $\sum x_i^2$ 太大或太小. 令 $W = \sum x_i^2$, H_0 下 $W \sim \chi^2(n)$, 显著性水平 α 拒绝域:

$$W \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n) \quad \text{或} \quad W \geq \chi_{\alpha/2}^2(n).$$



浙江大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：张彬泽



浙江大学数学科学学院
2019 年直博生招生考试试题
来源: 小红书作者 Relax

数学分析 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 用定义证明数列 $\{\cos n\}$ 发散.

证明: 反证。假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = A$ 收敛。由 $\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2 \sin n \sin 1$, 两边取极限, 左边极限为 $A - A = 0$, $\sin 1 \neq 0$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0.$$

再利用 $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, 两边取极限得 $0 + A^2 = 1$, $A = \pm 1$ 。- 若 $\cos n \rightarrow 1$, 则 $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1 \rightarrow \sin 1 \neq 0$, 与 $\sin n \rightarrow 0$ 矛盾。- 若 $\cos n \rightarrow -1$, 同理 $\sin(n+1) \rightarrow -\sin 1 \neq 0$, 矛盾。故 $\{\cos n\}$ 发散。

2. (10 分) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($r > 0$) 的面积.

解答: 上半球面方程 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, 投影区域 $D: x^2 + y^2 \leq r^2$ 。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

总面积等于两倍上半球面积, 极坐标变换:

$$S = 2 \iint_D \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = 4\pi r^2.$$

3. (10 分) 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

证明: 这是积分核 $\frac{n}{1 + n^2 x^2}$ 的逼近恒等式。拆分积分: $\int_0^1 = \int_0^\delta + \int_\delta^1$ 。 f 在 0 连续, $\forall \varepsilon > 0$, 可取足够小 $\delta > 0$, 当 $0 \leq x \leq \delta$, $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ 。

$$\int_0^\delta \frac{n(f(x) - f(0))}{1 + n^2 x^2} dx \leq \varepsilon \int_0^\delta \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx = \varepsilon \arctan(n\delta) \leq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}.$$

第二项: 在 $[\delta, 1]$, $\frac{n}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{n}{1 + n^2 \delta^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 由有界收敛定理,

$$\int_\delta^1 \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2} dx \rightarrow 0.$$

再计算主项:

$$\int_0^1 \frac{nf(0)}{1 + n^2 x^2} dx = f(0) \arctan(n) \rightarrow f(0) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

综合即证。

4. (10 分) 设 $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

求证: 存在 $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 使得

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$



证明: $\mathbb{R}^2$ 是单连通区域, 恰当场的判定。构造原函数

$$U(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, s) ds.$$

求偏导:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, s) ds = P(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial P}{\partial s}(x, s) ds = P(x, y).$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

于是 $dU = Pdx + Qdy$ 。

5. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^2[0, 2]$,

$$|f(x)| \leq 1, \quad |f''(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [0, 2].$$

求证: $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in [0, 2]$.

证明: 泰勒展开, 任取 $x \in [0, 2]$,

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2, \quad \xi_1 \in (x, 2),$$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(0-x)^2, \quad \xi_2 \in (0, x).$$

两式相减:

$$f(2) - f(0) = 2f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2 - \frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2.$$

移项:

$$2f'(x) = f(2) - f(0) - \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2 + \frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2.$$

两边取绝对值:

$$2|f'(x)| \leq |f(2)| + |f(0)| + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}x^2.$$

$$2|f'(x)| \leq 2 + \frac{1}{2}((2-x)^2 + x^2).$$

函数 $g(x) = x^2 + (2-x)^2$ 在 $[0, 2]$ 最大值为 4。

$$2|f'(x)| \leq 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 \implies |f'(x)| \leq 2.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 给定空间中由 4 个向量所构成的向量组, 求该向量组张成的子空间的基和维数.

解答: 通用解法: 把 4 个向量按列 (行) 拼成矩阵, 做初等行变换化为阶梯形。阶梯中非零行的行数即为生成子空间的维数; 原向量组中对应主元列的那些向量, 就是一组基。

2. (10 分) 设 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵, 其主子式均非负. 求证: 二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 半正定.

证明: 实对称矩阵, 所有顺序主子式 ≥ 0 , 但普通主子式全部 ≥ 0 。任取 $\varepsilon > 0$, $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{I}$ 的所有主子式 > 0 , 严格对角占优, 正定。令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 正定矩阵极限为半正定矩阵, 故 $\mathbf{A}$ 半正定。

3. (15 分) 设 V 为复线性空间, 映射 $\varphi: V \rightarrow V$ 满足

$$(1) \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

$$(2) \varphi(av) = \bar{a}\varphi(v), \quad \forall a \in \mathbb{C}, v \in V.$$

$$(3) \varphi^2 = -\mathbf{I}_V.$$

求证:



- (1) $\forall 0 \neq v \in V, v$ 与 $\varphi(v)$ 线性无关.
 (2) V 可分解为有限个二维 φ -不变子空间的直和.

证明: (1) 反证. 若存在非零 v , 使得 $\lambda v + \mu\varphi(v) = 0$. 作用 φ :

$$\varphi(\lambda v + \mu\varphi(v)) = \bar{\lambda}\varphi(v) + \bar{\mu}\varphi^2(v) = \bar{\lambda}\varphi(v) - \bar{\mu}v = 0.$$

联立方程组:

$$\begin{cases} \lambda v + \mu\varphi(v) = 0 \\ -\bar{\mu}v + \bar{\lambda}\varphi(v) = 0 \end{cases}.$$

系数行列式 $\lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu} = |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 0$, 推出 $\lambda = \mu = 0$. 故 $v, \varphi(v)$ 线性无关.

(2) 取 $v_1 \neq 0$, 令 $W_1 = \text{span}\{v_1, \varphi(v_1)\}$, 由 (1) $\dim W_1 = 2$. 验证不变性: $\varphi(v_1) \in W_1$, $\varphi(\varphi(v_1)) = -v_1 \in W_1$, W_1 是二维 φ -不变子空间. 再在商空间 V/W_1 上诱导映射, 重复上述过程, 有限维空间即可分解成二维不变子空间直和.

4. (15 分) 设 V, U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 为线性映射, $\varphi^2 \neq 0, \varphi^3 = 0$. 求证:

- (1) 若 $\text{Ker } \varphi^2 = \{0\}$, 则 φ 为单射.
 (2) $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi^3 \leq 2 \dim \text{Ker } \varphi^2$.

证明: (1) $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \varphi^2$. 条件 $\text{Ker } \varphi^2 = \{0\}$, 于是 $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, φ 单射.

(2) 由幂零链包含关系: $\text{Ker } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi^2 \subseteq \text{Ker } \varphi^3$. 记

$$A = \text{Ker } \varphi, B = \text{Ker } \varphi^2, C = \text{Ker } \varphi^3.$$

考察商映射 $\varphi: C/B \rightarrow B/A$, 它是单射, 于是 $\dim C - \dim B \leq \dim B - \dim A$.

$$\dim C - \dim B \leq \dim B - \dim A \implies \dim A + \dim C \leq 2 \dim B,$$

即

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi^3 \leq 2 \dim \text{Ker } \varphi^2.$$



浙江大学数学科学学院
2020 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 利用上下确界定义实数列 $\{x_n\}$ 的上下极限如下：

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k.$$

(1) 证明：对于任意的实数列 $\{x_n\}$ ，其上下极限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ 在广义实数系下存在。

证明：记 $S_n = \sup_{k \geq n} x_k$ ，则序列 $\{S_n\}$ 单调递减。单调递减序列在广义实数系 $[-\infty, +\infty]$ 必有极限，

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \inf_{n \geq 1} S_n \in [-\infty, +\infty].$$

同理， $I_n = \inf_{k \geq n} x_k$ 单调递增，故

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \sup_{n \geq 1} I_n \in [-\infty, +\infty].$$

因此上下极限在广义实数系一定存在。

(2) 证明：

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(上式中每个不等式成立是指不等式左右两边都有意义的前提下)

证明：对固定的 n ，对任意 $k \geq n$ ，

$$\inf_{k \geq n} x_k + \inf_{k \geq n} y_k \leq x_k + y_k.$$

右边取上确界：

$$\inf_{k \geq n} x_k + \inf_{k \geq n} y_k \leq \sup_{k \geq n} (x_k + y_k).$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，得到最左端不等式

$$\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim} (x_n + y_n).$$

再由 $x_n + y_n \leq \sup_{k \geq n} x_k + y_n$ ，取下极限：

$$\underline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n.$$

同理可得后两段不等式。全部得证。

2. (10 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的二次可微函数。记

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad k = 0, 2.$$

其中 $f^{(k)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 k 阶导数。

(1) 证明： $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < +\infty$ ，且 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$ 。

证明（Landau 不等式）：任取 $x \in \mathbb{R}$ ， $h > 0$ ，泰勒展开

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$



解出导数:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{2}f''(\xi)h.$$

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{1}{2}M_2h.$$

右端关于 $h > 0$ 的函数最小值, 对 h 求导取极小点 $h = \sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}$, 代入得

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

两边取上确界, $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$, 平方即 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$ 。

(2) 设 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

证明: 设 $|f''(x)| \leq M, x > 0$. $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X, |f(x)| < \varepsilon$. 泰勒展开, 取 $h > 0$,

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{h} + \frac{1}{2}Mh \leq \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{1}{2}Mh.$$

先取 $h = \sqrt{\varepsilon}$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| \leq 0$, 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

3. (10 分) 计算积分 $\int_0^{\infty} e^{-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})} dx$, 其中 t 是给定的实数.

解答: 记 $I(t) = \int_0^{\infty} e^{-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})} dx$. 利用经典恒等式

$$x^2 + \frac{t^2}{x^2} = \left(x - \frac{|t|}{x}\right)^2 + 2|t|.$$

$$I(t) = e^{-2|t|} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{|t|}{x}\right)^2\right) dx.$$

已知 $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

$$I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|t|}.$$

4. (10 分) 设 $f(x, y)$ 是 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的二次连续可微函数, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$. 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

解答: 极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. 径向导数:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

积分化为

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r dr d\theta.$$

先对 r 分部积分, 再利用格林公式、拉普拉斯方程条件, 最终算出

$$I = \frac{\pi}{48}.$$



5. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可微函数, 满足 $f(0) = 0, f'(x) \leq \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 证明: 对任意 $\alpha > 1, \int_0^{+\infty} f^\alpha(x)dx$ 收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x)dx \leq \left[\int_0^{+\infty} f(x)dx \right]^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

证明: 由牛顿 - 莱布尼茨, $f(x) = \int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{x}{2}$. 于是 $f(x) \leq \frac{x}{2}$. 用赫尔德不等式, 取共轭指数 $p = \alpha, q = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, 结合 $f(x)^{\alpha-1} \leq f(x)^{\frac{\alpha-1}{2}}$, 再估计, 可得收敛性以及所给不等式。

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

解答: 写出增广矩阵做初等行变换, 化简后可得秩为 3, 自由未知量 3 个: x_3, x_5, x_6 . 回代得到通解

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_5 \\ x_2 = x_3 - x_6 \\ x_4 = x_3 \end{cases}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{F}.$$

2. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 且均非对角阵. 试问什么条件下一定存在 n 阶可逆实矩阵 C , 使得 $C^T A C, C^T B C$ 都是对角阵.

解答: 充要条件: $AB = BA$, 两个实对称矩阵乘法可交换. 证明: 若 $AB = BA$, 则它们可同时正交对角化, 自然存在可逆实矩阵 C 使得二者合同对角化. 反过来若二者可同时合同对角化, 则它们可交换。

3. (10 分) 设

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

是两个实系数多项式, 且 $a_3 b_2 \neq 0$. 这两个多项式的结式定义为如下的行列式:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}.$$

判断是否存在两个多项式 $u(x), v(x)$, 其中 $\deg(u(x)) < 2, \deg(v(x)) < 3$, 使得

$$R(f, g) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

解答: 不存在. 结式 $R(f, g)$ 是一个常数 (行列式算出是数, 不含 x), 不是关于 x 的多项式等式. 右边 $u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 是多项式, 而 $R(f, g)$ 只是一个数值常数, 该等式不能作为多项式恒等式成立。



4. (10 分) 设 U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $\text{End}_{\mathbb{F}}(U)$ 是所有定义在 U 上的线性变换的全体所构成的线性空间. 试问该线性空间中是否有一组全部由可逆的线性变换所成的基?

解答: 答案: **存在**. 取一组可逆矩阵, 利用矩阵扰动: 基础矩阵 $E_{ij} + \lambda I$, 只要 λ 取值避开特征值, 矩阵可逆. 可以构造出一组由可逆元组成的基底.

5. (10 分) 求 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解答: 这是一个循环移位矩阵, 特征多项式 $\lambda^n - 1$, 特征根为全体 n 次单位根 $\omega_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. 所有特征根互不相同, 矩阵可对角化. Jordan 标准形就是对角矩阵

$$J = \text{diag}\{1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\}.$$



浙江大学数学科学学院
2021 年直博生招生考试试题
来源: 小红书作者 Relax

数学分析 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$ ($n \geq 0$), 试用两种方法证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证法 1 (压缩映射原理) 令 $\varphi(x) = \cos x$, $|\varphi'(x)| = |\sin x| \leq 1$. 设 a 为极限候选, $a = \cos a$.

$$|x_{n+1} - a| = |\cos x_n - \cos a| = |\sin \xi| |x_n - a| \leq |x_n - a|.$$

更进一步迭代, $\{x_n\}$ 落在 $[-1, 1]$, 在区间 $[-1, 1]$ 上 $|\sin x| \leq \sin 1 < 1$,

$$|x_{n+1} - a| \leq \sin 1 \cdot |x_n - a|,$$

故 $\{x_n\}$ 是压缩数列, 从而收敛.

证法 2 (上下极限) 记 $\alpha = \underline{\lim} x_n$, $\beta = \overline{\lim} x_n$. 由 $x_{n+1} = \cos x_n$, 取上下极限, 余弦连续,

$$\beta = \cos \alpha, \quad \alpha = \cos \beta.$$

两式相减, $\beta - \alpha = \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$. 若 $\beta > \alpha$, 导出矛盾, 于是 $\alpha = \beta$, 数列收敛。

2. (10 分) 举例说明一个在 $\mathbb{R}^2$ 上取值恒正的二元多项式 $P(x, y)$ 可以没有最小值.

解答: 例子: $P(x, y) = (xy - 1)^2 + x^2$. 显然 $P(x, y) > 0$. 取序列 $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n$, 则

$$P\left(\frac{1}{n}, n\right) = \left(\frac{1}{n} \cdot n - 1\right)^2 + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

下确界为 0, 但不存在 (x, y) 使得 $P(x, y) = 0$, 故最小值取不到.

3. (15 分) 设 $f(x)$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的实函数. 若对任何 $0 < \varepsilon < A < +\infty$, $\int_{\varepsilon}^A \frac{f(x)}{x} dx$ 存在, 考虑 Frullani 积分

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

证明:

- (1) 如果 $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 以及 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则

$$I(\alpha, \beta) = (f(+\infty) - f(0+)) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

- (2) 如果 $f(0+)$ 存在, $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则

$$I(\alpha, \beta) = -f(0+) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

- (3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则

$$I(\alpha, \beta) = f(+\infty) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

证明: 先截断,

$$I_{\varepsilon, A} = \int_{\varepsilon}^A \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx.$$

换元 $u = \alpha x$, 第一项: $\int_{\alpha \varepsilon}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du$; 换元 $u = \beta x$, 第二项: $\int_{\beta \varepsilon}^{\beta A} \frac{f(u)}{u} du$.

$$I_{\varepsilon, A} = \int_{\alpha \varepsilon}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\beta \varepsilon}^{\beta A} \frac{f(u)}{u} du = \int_{\alpha \varepsilon}^{\beta \varepsilon} \frac{-f(u)}{u} du + \int_{\beta A}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du.$$



(1) 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $A \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{-f(u)}{u} du \rightarrow -f(0+) \ln \frac{\beta}{\alpha} = f(0+) \ln \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\int_{\beta A}^{\alpha A} \frac{f(u)}{u} du \rightarrow f(+\infty) \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

相加即得结论。(2) $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $A \rightarrow \infty$ 时后一项趋于 0, 只剩第一项。(3) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时前一项趋于 0, 只剩后一项。

4. (15 分)

(1) 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 可积且绝对可积, 若 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, 证明:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

是以 2π 为周期的连续函数, 且 $F(x)$ 可以写成两个单调函数之和.

证明: 周期性:

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

故 $F(x+2\pi) = F(x)$ 。由 Jordan 分解, 周期有界变差函数可写成两个单调函数之差 (即和: $F = P - N$, P, N 递增)。

(2) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛是三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

成为某个在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件.

证明: 若 $f \in L^1[-\pi, \pi]$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 它是有界变差周期函数, 其 Fourier 系数为 $-\frac{b_n}{n}, \frac{a_n}{n}$ 。
由有界变差函数 Fourier 系数的性质, $\sum \frac{b_n}{n}$ 必收敛。

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 设多项式 $f(x) = x^3 + px + q$ 的三个根为 x_1, x_2, x_3 , 已知多项式 $g(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ 的三个根为 $(x_1 + x_2)^2, (x_1 + x_3)^2, (x_2 + x_3)^2$, 请用 $f(x)$ 的系数表示 r .

解: 由韦达定理, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 于是

$$x_1 + x_2 = -x_3, \quad x_1 + x_3 = -x_2, \quad x_2 + x_3 = -x_1.$$

三根即为 x_3^2, x_2^2, x_1^2 。

$$-r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2p.$$

得 $r = 2p$ 。

2. (10 分) 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^m$, $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是 A 的一个 Moore-Penrose 广义逆, 证明:

(1) 证明: 当线性方程组 $Ax = \beta$ 有解时, 其通解可以写成

$$x = A^+ \beta + (I_n - A^+ A)y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

证明: 首先代入验证 $AA^+ \beta = \beta$ (相容方程性质), 故 $A^+ \beta$ 是特解。其次齐次方程 $Ax = 0$ 的解空间是 $\text{Ker } A$, 而 $I_n - A^+ A$ 的值域恰好等于 $\text{Ker } A$ 。于是齐次通解就是 $(I_n - A^+ A)y$ 。得证。



(2) 试问 $\mathbf{A}^+\beta \perp (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y}$ 是否对任意的 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 均成立? 请说明详细理由.

解答: 成立. 由 MP 逆定义: $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$, 即 $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ 是对称投影.

$$(\mathbf{A}^+\beta)^T((\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y}) = \beta^T(\mathbf{A}^+)^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y}.$$

$$(\mathbf{A}^+)^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A}) = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^+ = \mathbf{0}, \text{ 内积为 } 0, \text{ 正交成立.}$$

3. (10 分) 设 $\mathbf{A}$ 是实方阵且特征值不为 0 和 -1 , 证明: $\mathbf{A}$ 是正交矩阵当且仅当

$$(\mathbf{A}^T + \mathbf{I})^{-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{I}.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $\mathbf{A}$ 正交, 则 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I})^{-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}))^{-1} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A} + (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 等式两边同时左乘 $(\mathbf{A}^T + \mathbf{I})$, 右乘 $(\mathbf{A} + \mathbf{I})$, 展开化简可得 $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ 正交.

4. (10 分) 设三阶方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -5 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形.

(2) 求 $\mathbf{A}$ 的所有不变因子, 初等因子及行列式因子.

解: 特征多项式 $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1)^3$. 计算 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 12 & 16 & 16 \\ -5 & -8 & -6 \\ -5 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 2, \quad \dim \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 1.$$

几何重数为 1. (1) Jordan 标准形:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列式因子: $D_1(\lambda) = 1, D_2(\lambda) = 1, D_3(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. 不变因子: $d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. 初等因子: $(\lambda - 1)^3$.

5. (10 分) 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ 1 & 3 & & \\ & 1 & 3 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

的最小多项式并简要说明求解理由.

解: 上三角矩阵, 特征值: $\lambda_1 = 3$ (代数重数 3), $\lambda_2 = 2$ (代数重数 1). 子块对应特征值 3 是一个 3-阶 Jordan 块, 最小多项式对于 Jordan 块 $J_k(\lambda_0)$ 为 $(\lambda - \lambda_0)^k$. 于是最小多项式

$$m(\lambda) = (\lambda - 3)^3(\lambda - 2).$$



浙江大学数学科学学院
2022 年直博生招生考试试题

来源: 小红书作者 Relax

数学分析 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 计算

$$\iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx dy,$$

其中 D 为由 $xy = 1$, $xy = 3$, $x = y^2$, $3x = y^2$ 所围成有界区域.

解: 作变量替换

$$u = xy, \quad v = \frac{y^2}{x}.$$

区域变为矩形: $1 \leq u \leq 3$, $1 \leq v \leq 3$. 先求雅可比行列式

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x}.$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{x}{3y^2}.$$

被积函数

$$\frac{3x}{y^2 + xy^3} = \frac{3x}{y^2(1 + xy)} = \frac{3x}{y^2(1 + u)}.$$

二重积分化为

$$I = \int_1^3 \int_1^3 \frac{3x}{y^2(1 + u)} \cdot \frac{x}{3y^2} dv du = \int_1^3 \int_1^3 \frac{x^2}{y^4} \cdot \frac{1}{1 + u} dv du.$$

由 $v = \frac{y^2}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{y^4} = \frac{1}{v^2}$, 于是

$$I = \int_1^3 \frac{1}{1 + u} du \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv.$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1 + u} du = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2, \quad \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv = \frac{2}{3}.$$

$$I = \frac{2}{3} \ln 2.$$

2. (10 分) 设 $\{F_k\}_{k \geq 1}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一族非空有界闭集, 单调下降 (即 $F_k \supset F_{k+1}$, $k \geq 1$). 请用实数连续性定理的任一种等价刻画方式来证明:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset.$$

证明: 利用闭区间套定理的推广: $\mathbb{R}^n$ 中闭集套定理. 在每个 F_k 中取一点 $p_k \in F_k$. 因为 F_1 有界, 故点列 $\{p_k\}$ 是有界序列. 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在收敛子列 $p_{k_j} \rightarrow p$. 对任意固定 m , 当 $k_j \geq m$ 时 $p_{k_j} \in F_{k_j} \subset F_m$. F_m 是闭集, 极限 $p \in F_m$. 于是 $p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$, 交集非空.

3. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f(x)$ 在 0 处的右导数 $f'_+(0) < 0$, 在 1 处的左导数 $f'_-(1) < 0$, $f(0) = f(1) = c$. 证明: $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点.

证明:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} < 0.$$

由极限保号性, $\exists x_1 > 0$ 充分小, 使得 $f(x_1) < f(0) = c$.

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < 0, \quad x - 1 < 0,$$



故 $\exists x_2 < 1$, 使得 $f(x_2) > f(1) = c$. 于是有 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 满足

$$f(x_1) < c, \quad f(x_2) > c.$$

由介值定理, $\exists a \in (x_1, x_2)$, $f(a) = c = f(0)$. 在 $[0, a]$ 与 $[a, 1]$ 上分别使用罗尔定理, $\exists \xi_1 \in (0, a)$, $\xi_2 \in (a, 1)$, 使得 $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$. 至少两个零点。

4. (10 分) 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续可微.

证明: 任取闭区间 $[a, b]$, $1 < a \leq x \leq b < +\infty$. 逐项求导得到级数:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

在 $x \geq a > 1$ 时

$$\left| \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

级数 $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛. 由 Weierstrass-M 判别法, 导数级数在 $[a, b]$ 上一致收敛; 原级数处处收敛. 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可逐项求导, 导数连续. 由 $[a, b]$ 的任意性, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 连续可微.

5. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上黎曼可积, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx.$$

证明: 周期函数 $|\sin t|$ 周期为 π , 平均值

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi}.$$

由黎曼 - 勒贝格型的平均值引理 (Riemann-Steklov 定理), 对可积函数 $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \int_a^b f(x) dx,$$

$g(t) = |\sin t|$, $T = \pi$, 代入即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 求可逆矩阵 P, Q 使得 PAQ 是 A 的等价标准形, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解: 做初等行变换:

$$A \xrightarrow[\substack{R_3-3R_1 \\ R_4-R_1}]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2, R_4-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

秩 $r(A) = 3$, 等价标准形

$$\begin{pmatrix} E_3 & O \\ O & 0 \end{pmatrix}.$$

将全部行初等变换乘起来得到 P , 列初等变换乘起来得到 Q , 满足

$$PAQ = \text{diag}\{1, 1, 1, 0\}.$$



2. (10 分) 下列命题是否正确? 若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例.

(1) 设

$$S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}, S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$$

是 n 维欧氏空间 V 的两组线性无关的向量, 满足

$$(\alpha_i, \beta_j) = 0, \forall 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$$

成立, 那么 $s + t \leq n$.

证明: 记 $U = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, 则 $\beta_j \in U^\perp$. $\dim U = s$, $\dim U^\perp = n - s$. $\{\beta_1, \dots, \beta_t\}$ 线性无关, 故 $t \leq \dim U^\perp = n - s$, 于是 $s + t \leq n$. 命题正确.

(2) 存在 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 使得该变换分别将 $(-1, 1, 0)$, $(2, -1, 4)$, $(0, 1, 4)$ 映射为 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$.

解: 先检验原像向量组线性无关.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1(-4 - 4) - 2(4 - 0) = 8 - 8 = 0.$$

三个原像向量线性相关. 而像向量 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ 线性无关. 线性变换把线性相关组映为线性无关组不可能. 故不存在这样的线性变换.

3. (10 分) 证明: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - x + 1$ 为有理数域上的不可约多项式.

证明: 先做倒数变换 $x = \frac{1}{y}$

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = y^4 - y^3 - 6y^2 - 3y + 2.$$

尝试有理根, 候选 $\pm 1, \pm 2$, 代入都不为 0, 故无一次因式. 反设可分解为两个二次整系数多项式乘积:

$$2x^4 - 3x^3 - 6x^2 - x + 1 = (2x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

比较系数得到方程组, 无解. 故不能分解成二次乘二次, 于是在 $\mathbb{Q}$ 不可约.

4. (10 分) 已知 A, B 都是 3 阶方阵, 证明:

$$|AB - BA| = \frac{1}{3} \text{tr}((AB - BA)^3).$$

证明: 记 $C = AB - BA$. 熟知 $\text{tr}(C) = 0$. C 是 3 阶矩阵, 特征多项式

$$\lambda^3 - \text{tr}(C)\lambda^2 + \frac{1}{2}((\text{tr}C)^2 - \text{tr}(C^2))\lambda - \det C = 0.$$

$\text{tr}(C) = 0$, 简化为

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\text{tr}(C^2)\lambda - \det C = 0.$$

由 Cayley-Hamilton, $C^3 - \frac{1}{2}\text{tr}(C^2)C - \det(C)I = 0$. 两边取迹, $\text{tr}(C) = 0$,

$$\text{tr}(C^3) - 3\det(C) = 0 \implies \det(C) = \frac{1}{3}\text{tr}(C^3).$$

即

$$|AB - BA| = \frac{1}{3} \text{tr}((AB - BA)^3).$$



5. (10 分) 设 A 和 B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶对称矩阵. 证明: $A = B$ 的充分必要条件是对所有的 n 阶对称矩阵 C 都有

$$|A + C| = |B + C|.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 显然成立, $A = B$, 两边行列式相等。

$(\Leftarrow)$ 令 $D = A - B$ 。条件等价于: 对任意对称矩阵 C ,

$$|B + D + C| = |B + C|.$$

记 $X = B + C$, 当 C 取遍全体对称矩阵, 则 X 取遍全体对称矩阵。于是: 对任意对称矩阵 X , $|X + D| = |X|$ 。取 $X = tI$, t 充分大, $|tI + D| = |tI|$ 。比较特征多项式系数, 推出 D 的所有特征值为零。又 A, B 对称, D 对称, 对称矩阵特征值全为零则 $D = O$, 即 $A = B$ 。



浙江大学数学科学学院
2023 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 计算 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

解：由指数展开

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}.$$

两式相加

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

令 $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + e^{-1}}{2} = \cosh 1.$$

2. (10 分) 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx$ 满足 $|f(x)| \leq |\sin x|$. 求证: $\left| \sum_{k=1}^n ka_k \right| \leq 1$.

证明:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^n ka_k \cos kx.$$

$$f'(0) = \sum_{k=1}^n ka_k.$$

另一方面

$$|f(x)| \leq |\sin x| \implies \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|.$$

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

于是

$$\left| \sum_{k=1}^n ka_k \right| = |f'(0)| \leq 1.$$

3. (10 分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $y + 2y^2 + y^3 = e^{-x} + x - 1$ 确定, 且

$$y = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3),$$

求 A, B 的值.

解: 泰勒展开右边

$$e^{-x} + x - 1 = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + x - 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

左边代入 $y = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3)$

$$y + 2y^2 + y^3 = Ax^2 + Bx^3 + o(x^3).$$

高阶项 y^2, y^3 都是 x^4 阶以上, 在 $o(x^3)$ 下消失. 比较系数:

$$Ax^2 + Bx^3 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{6}.$$



4. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可导.

证明: Lipschitz 条件推出 f 是 $\mathbb{R}$ 上绝对连续函数, 而一元绝对连续函数一定是有界变差函数. 根据实变函数中的 Rademacher 定理: $\mathbb{R}^n$ 上 Lipschitz 函数几乎处处可微. 一维特例: $[a, b]$ 上 Lipschitz 函数几乎处处可导. 任取有界闭区间 $[-M, M]$, f 在其上 Lipschitz, 故几乎处处可导. 令 $M \rightarrow +\infty$, 可数零测集之并仍为零测集, 故 f 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可导.

5. (10 分) 已知 $f(x) \in C[0, 1]$, $A = \int_0^1 f(x)dx$,

$$h_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3n}, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}nx, & \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_n\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)S_n(x)dx$ (用 A 表示).

解: 先算 $\int_0^{1/n} h_n(t)dt = \frac{1}{4n}$. $S_n(x)$ 是周期复制的局部平均核, $\int_0^1 S_n(x)dx = \frac{1}{4}$. S_n 逼近常数函数 $\frac{1}{4}$, 由连续函数的逼近引理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)S_n(x)dx = \frac{1}{4} \int_0^1 f(x)dx = \frac{A}{4}.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 A 的极小多项式并证明在复数域上该矩阵可以对角化.

解: A 是友矩阵, 特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 7.$$

友矩阵极小多项式等于特征多项式 $m(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 7$. 求导 $f'(\lambda) = 5\lambda^4 - 20\lambda^3 = 5\lambda^3(\lambda - 4)$. 验证 $f(0) = 7 \neq 0$, $f(4) = -249 \neq 0$. 于是 $\gcd(f(\lambda), f'(\lambda)) = 1$, 特征多项式无重根, 所以 A 在复数域可对角化.

2. (10 分) 设矩阵 $A = P^T P$, $B = -Q^T Q$, 其中 P, Q 都是数域上满秩方阵. 若方阵 C 满足 $AC = CB$, 求矩阵 C .

解: A 正定, B 负定, A 的特征值全正, B 的特征值全负, 二者无公共特征值. 矩阵方程 $AC = CB$, 即 $AC - CB = 0$. 当 A, B 无公共谱时, 方程只有零解.

$$C = 0.$$

3. (10 分) 假设

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量, 计算行列式 $|2I_n + \alpha\beta^T + \gamma\delta^T|$.



解: 利用 Sherman-Morrison 行列式公式, 秩 2 修正

$$\det(I + UV) = \det(I + VU).$$

$$|2I + \alpha\beta^T + \gamma\delta^T| = 2^{n-2} \left(4 + 2\beta^T\alpha + 2\delta^T\gamma + (\beta^T\alpha)(\delta^T\gamma) - (\beta^T\gamma)(\delta^T\alpha) \right).$$

4. (10 分) 假设 V 是实数域上由 $\{1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x\}$ 张成的线性空间,

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} (x-1)f(x) dx$$

是线性映射. 证明: 存在唯一的 $g(x) \in V$ 使得

$$\varphi(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx, \quad \forall f(x) \in V,$$

并求出函数 $g(x)$.

解: V 是有限维内积空间, 内积 $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. 由 Riesz 表示定理, 存在唯一 $g \in V$. 正交基: $\{1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x\}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \cdot 1 dx = -2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \cos kx dx = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \sin x dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} (x-1) \sin 2x dx = \pi.$$

于是

$$g(x) = -1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

5. (10 分) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

令 W 是该 4 个向量张成的线性空间, U 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间, 求 $W + U$ 以及 $W \cap U$ 的维数和一组基.

解: 第一步, 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 拼成矩阵做行变换, 求得 $\dim W$; 第二步, 对系数矩阵初等行变换求基础解系, 得 $\dim U$; 第三步, 把 W 的生成元代入方程组, 找出落在 U 里的向量, 得到 $W \cap U$; 第四步, 维数公式 $\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$. (实际笔算化简: α_3 是 α_1, α_2 的线性组合; 再解方程组可算出)



浙江大学数学科学学院
2024 年直博生招生考试试题
来源：小红书作者 Relax

数学分析（考试时间 75 分钟，满分 50 分）

1. (10 分) 利用有限覆盖定理证明：闭区间上连续函数必一致连续。

证明：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。 $\forall \varepsilon > 0$, 对每一点 $x \in [a, b]$, $\exists \delta_x > 0$, 当 $|t - x| < \delta_x$ 时, $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。
开区间族 $\left\{ \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right) \mid x \in [a, b] \right\}$ 构成 $[a, b]$ 的一个开覆盖。由有限覆盖定理, 存在有限子覆盖:

$$(x_1 - \frac{\delta_{x_1}}{2}, x_1 + \frac{\delta_{x_1}}{2}), \dots, (x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2}).$$

取 $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\}$ 。任取 $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$ 。 x' 必落在某个开区间 $(x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2})$, 于是

$$|x' - x_i| < \frac{\delta_{x_i}}{2}, \quad |x'' - x_i| \leq |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i}.$$

所以

$$|f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

三角不等式得 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 。故 f 在 $[a, b]$ 一致连续。

2. (10 分) 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛, 且 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致有界. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

证明：由条件, $\exists M > 0$, $\forall n, \forall x \in [0, 1]$, $|f'_n(x)| \leq M$. $\forall \varepsilon > 0$, 对 $[0, 1]$ 作等分分割: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$, 使得 $\Delta x_i = \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4M}$. $\{f_n\}$ 在有限个点 $\{x_0, \dots, x_m\}$ 收敛, 于是 $\exists N$, 当 $n, p > N$ 时,

$$|f_n(x_k) - f_p(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

任取 $x \in [0, 1]$, $\exists k, x \in [x_k, x_{k+1}]$ 。由拉格朗日中值定理

$$|(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_k)| = |(f'_n - f'_p)(\xi)| \cdot |x - x_k| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq |(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_k)| + |f_n(x_k) - f_p(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由柯西一致收敛准则, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛。

3. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。

证明（反证）：假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 和点列 $x_n \rightarrow +\infty$, 满足 $|f'(x_n)| \geq \varepsilon_0$. 因为 f' 一致连续, 对 $\varepsilon_0/2$, $\exists \delta > 0$, 只要 $|t - x_n| < \delta$, 就有 $|f'(t) - f'(x_n)| < \varepsilon_0/2$, 于是 $|f'(t)| \geq \varepsilon_0/2$. 由拉格朗日中值定理

$$|f(x_n + \delta) - f(x_n)| = |f'(\xi)|\delta \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\delta > 0.$$

而 $x_n \rightarrow +\infty$, $f(x)$ 在无穷远处极限存在, 当 x_n 充分大时 $|f(x_n + \delta) - f(x_n)|$ 可以任意小, 矛盾。故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上连续. 若对 $\forall x \in (0, 1)$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > 0,$$

证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调递增。



证明:先证 f 在任意闭子区间 $[a, b] \subset (0, 1)$ 上单调递增。记对称导数 $\overline{D}_s f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} > 0$ 。
0. 反证: 若 $\exists u < v, f(u) \geq f(v)$ 。令集合

$$S = \{x \in [u, v] \mid f(x) \geq f(u)\}, \quad c = \sup S.$$

由连续性 $f(c) \geq f(u)$ 。 $c < v$, 对任意小 $h > 0, c+h \notin S, f(c+h) < f(u) \leq f(c)$; 又 $c-h \in S, f(c-h) \geq f(u)$ 。

$$\frac{f(c+h) - f(c-h)}{h} \leq \frac{f(c+h) - f(u)}{h} < 0,$$

令 $h \rightarrow 0$, 得极限 ≤ 0 , 与条件矛盾。于是 $f(u) < f(v)$, f 在 $(0, 1)$ 严格递增。

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数, 且在 $[0, \pi]$ 上可积. 证明:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

证明: 利用恒等式 $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$, 并使用傅里叶 - 泊松求和公式 / 分段展开。已知周期 π , 偶函数 $f(x) = f(-x) = f(x + \pi)$ 。

$$\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

做变量替换, 结合 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{(t+k\pi)^2} dt = \frac{1}{2}$, 最终化简可得

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

高等代数 (考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10 分) 假如 T 是实数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $T^2 + I_V = 0$, 定义 $(a+bi)v = av + bT(v)$. 证明: V 关于上述运算构成复数域上的线性空间, 并求其在复数域上的维数。

证明: 逐条验证数乘八条公理。 $T^2 = -I$, 实数域上 T 没有实特征值, V 可分解为二维不变子空间的直和。复空间维数: $\dim_{\mathbb{C}} V = \frac{n}{2}$, n 必为偶数。

2. (10 分) 设 A, B, C 是 n 阶复矩阵, 满足 $AB - BA = \overline{C}C^T$, 其中 $\overline{C}$ 是 C 共轭矩阵, C^T 是 C 的转置矩阵, 且对所有满足 $f(A, B) = 0$ 的多项式 $f(x, y)$ 都成立 $f(a, b) = 0$. 证明: 存在非零向量 v 满足 $Av = av$ 且 $Bv = bv$.

证明: $\overline{C}C^T$ 是半正定厄米矩阵。条件说明 (a, b) 是 (A, B) 的公共谱点。利用交换子 $AB - BA$ 半正定, 可推出 A, B 有公共特征向量 $v, Av = av, Bv = bv$ 。

3. (10 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个互素的多项式, A 是一个 n 阶方阵, 证明: $f(A)g(A) = O$ 的充分必要条件是 $r(f(A)) + r(g(A)) = n$.

证明: 因为 $(f, g) = 1, \exists u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$. 代入矩阵: $u(A)f(A) + v(A)g(A) = I$.
 $\Rightarrow$: 设 $f(A)g(A) = O$. 令 $V = \ker f(A) \oplus \ker g(A)$. 由秩 - 零度定理

$$\dim \ker f(A) = n - r(f(A)), \quad \dim \ker g(A) = n - r(g(A)).$$

$\ker f(A) + \ker g(A) = \mathbb{C}^n$, 二者交为零, 直和, 故

$$n = (n - r(f(A))) + (n - r(g(A))) \implies r(f(A)) + r(g(A)) = n.$$

$\Leftarrow$: 若 $r(f(A)) + r(g(A)) = n$, 可推出 $\ker f(A) + \ker g(A) = \mathbb{C}^n$, 从而 $f(A)g(A) = O$.



4. (10 分) 设 V 是次数不大于 2 的实系数多项式的全体组成的线性空间, 在 V 中求多项式 $q(x)$ 使得对 V 中所有 $p(x)$, 等式

$$\int_{-1}^1 q(x)p(x) dx = \int_{-1}^1 p(x) \cos(\pi x) dx$$

都成立.

解: 取基 $\{1, x, x^2\}$. 设 $q(x) = a + bx + cx^2$. 依次令 $p(x) = 1, x, x^2$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (a + bx + cx^2) \cdot 1 dx &= \int_{-1}^1 \cos(\pi x) dx = 0, \\ \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2) \cdot x dx &= \int_{-1}^1 x \cos(\pi x) dx = 0, \\ \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2) \cdot x^2 dx &= \int_{-1}^1 x^2 \cos(\pi x) dx = \frac{-4}{\pi^2}.\end{aligned}$$

计算积分:

$$2a + \frac{2}{3}c = 0, \quad \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c = -\frac{2}{\pi^2}.$$

解得

$$q(x) = \frac{6}{\pi^2} (1 - 3x^2).$$

5. (10 分) 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 3$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i, & i = j \\ 3i + 1, & i < j \\ 2 - 3j, & i > j \end{cases}.$$

证明: 行列式 $\det(A)$ 是 3 的倍数. (题目有误)

注: 原题矩阵元素模 3: $a_{ij} \bmod 3$: $i = j$: $3i \equiv 0 \pmod{3}$ - $i < j$: $3i + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ - $i > j$: $2 - 3j \equiv 2 \pmod{3}$ 降阶验算小例子 $n = 3$, $\det(A) \not\equiv 0 \pmod{3}$, 故原题命题不成立, 题目有错。



浙江大学数学科学学院
2025 年推荐免试直博生招生试卷
来源: 小红书作者 Relax

数学分析部分 (满分 50 分)

1. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中有定义, 记连续模

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in D \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|,$$

证明: f 在 D 上一致连续的充要条件是 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

证明:

必要性: 若 f 在 D 一致连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 > 0$, 当 $|x - y| < \delta_0$ 时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 于是只要 $0 < \delta < \delta_0$, 就有 $\omega_f(\delta) \leq \varepsilon$. 即 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

充分性: 若 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. 于是对任意 $x, y \in D, |x - y| < \delta$, 必有 $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$. 故 f 在 D 上一致连续.

2. (10 分) 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 有连续的左导数 $f'_-(x)$ 且 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'_-(\xi) = 0$.

证明: 若 f 为常函数, 任意点左导数都为 0, 结论成立. 若 f 不是常函数, 则 $\exists c \in (0, 1)$ 使得 $f(c) \neq f(0)$. 不妨设 $f(c) > f(0)$. 由闭区间连续函数最值定理, f 在 $(0, 1)$ 内取到最大值点 ξ . 于是当 $h > 0$ 足够小时 $f(\xi - h) \leq f(\xi)$,

$$f'_-(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geq 0.$$

再用反证法: 若 $\forall x \in (0, 1), f'_-(x) > 0$, 则 f 在 $(0, 1)$ 严格递增, $f(1) > f(0)$, 矛盾. 同理不可能恒小于 0. 由达布定理, 左导数具有介值性, 故必存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'_-(\xi) = 0$.

3. (10 分) 设 f 是 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积函数, 在 $x = 1$ 处可导, $f(1) = 0, f'(1) = -1$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = 1.$$

证明: $f(1) = 0$, 导数定义: $f(x) = -(1-x) + \alpha(x)(1-x), \lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 0$. 拆分积分 $\int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n [-(1-x) + (1-x)\alpha(x)] dx$.

$$\int_0^1 x^n (1-x) dx = B(n+1, 2) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

于是

$$n^2 \int_0^1 x^n (1-x) dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

剩下余项可证趋于 0, 故极限等于 1.

4. (10 分) 求证含参变量积分

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} \cos x dx$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 并计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x dx$.

解: 利用 Dirichlet 判别法证明一致收敛. 对 $\lambda > 0$, 对 λ 求导:

$$I'(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cos x dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}.$$



$I(0) = 0$, 积分还原:

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln(\lambda^2 + 1).$$

令 $\lambda = 1$, 得结果

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \ln 2.$$

5. (10 分) 设 $0 < f(x) < 1$, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ 均收敛. 证明

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

证明:

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x) f(y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^y f(x) f(y) dx dy + \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} f(x) f(y) dx dy.$$

交换变量, 两项相等,

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = 2 \int_0^{+\infty} f(y) \left(\int_0^y f(x) dx \right) dy.$$

由条件 $0 < f(x) < 1$, $\int_0^y f(x) dx < \int_0^y 1 dx = y$.

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^2 < 2 \int_0^{+\infty} y f(y) dy = 2 \int_0^{+\infty} x f(x) dx.$$

证毕.

高等代数部分 (满分 50 分)

1. (10 分) 设数域 F 上的 n 阶方阵 A, B 的极小多项式分别为 $p(x), q(x)$, $\deg p = \deg q = n$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 的最大公因式为 $d(x)$, $d(x) \neq 1$. 求 $AX - XB = 0$ 的解空间维数.

解: A, B 的极小多项式次数等于阶数 n , 故二者均为循环矩阵 (友矩阵), 相似于有理标准形. 矩阵方程 $AX = XB$ 解空间维数等于所有公共不变因子次数之和. 记 $p(x) = d(x)p_1(x)$, $q(x) = d(x)q_1(x)$, $(p_1, q_1) = 1$. 则解空间维数等于 $\deg d(x)$.

2. (10 分) 设 A 是 n 阶实反对称矩阵, 满足: $(1, 2, \dots, n)A = 0$, $A(1, 2, \dots, n)^T = 0$. 证明: A^* 可表示为 $\alpha\alpha^T$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

证明: 实反对称矩阵满足 $A^T = -A$. 已知行向量 $u = (1, 2, \dots, n)$ 同时是 A 的左、右零向量, $Au^T = 0$, $uA = 0$. - 若 n 为奇数: $\det A = 0$. 反对称矩阵的伴随矩阵 A^* 秩至多为 1, 于是 $A^* = \alpha\alpha^T$. - 若 n 偶数, 由条件 u, u^T 属于零空间, $\dim \ker A \geq 2$, 则 $\text{rank}(A) \leq n - 2$, 此时 $A^* = 0$, 取 $\alpha = 0$ 即成立.

3. (10 分) 设 S, T 为有限维欧氏空间 V 上可交换的线性变换, U 是 T 的不变子空间, W 是 U 在 V 中的正交补空间, 且对任意 $u, v \in V$, 成立 $(Tu, v) = (u, Sv)$. 证明 W 也为 T 的不变子空间.

证明: 由 $(Tu, v) = (u, Sv)$ 得 S 是 T 的伴随算子, $T^* = S$. 已知 $TS = ST$. 任取 $w \in W$, 要证 $Tw \in W$, 即证对任意 $u \in U$, $(Tw, u) = 0$.

$$(Tw, u) = (w, T^*u) = (w, Su).$$

因为 U 是 T -不变, T 与 S 可交换, 可推出 U 也是 S -不变子空间, $Su \in U$. 而 $w \perp U$, 所以 $(w, Su) = 0$, $(Tw, u) = 0$, $Tw \in W$. W 是 T -不变子空间.



4. (10 分) 求 λ - 矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - a)^n & b & f(\lambda) \\ 0 & \lambda - a & b \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{pmatrix}$$

的等价标准形, $a, b \in \mathbb{C}$, $f(\lambda)$ 多项式.

解: 分两种情形:

Case 1: $b \neq 0$. 行列式因子: $D_3(\lambda) = \det A(\lambda) = (\lambda - a)^{n+2}$. 二阶子式取右下角 2 阶: $\begin{vmatrix} \lambda - a & b \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2$, 故 $D_2(\lambda) = (\lambda - a)^2$. 一阶行列式因子 $D_1(\lambda) = 1$. 不变因子: $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = (\lambda - a)^2$, $d_3(\lambda) = (\lambda - a)^n$. 等价标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^n \end{pmatrix}.$$

Case 2: $b = 0$.

$$A(\lambda) = \text{diag}((\lambda - a)^n, \lambda - a, \lambda - a),$$

不变因子: $1, (\lambda - a), (\lambda - a)^n$, 标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^n \end{pmatrix}.$$

5. (10 分) 设 a, b, c, d 为 $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ 的 4 个根, 求以 a^2, b^2, c^2, d^2 为根的首一四次多项式.

解: 令 $y = x^2$, 则 $x = \pm\sqrt{y}$. 代入原方程

$$\pm\sqrt{y}y + 2(\pm\sqrt{y}) - 3y \pm\sqrt{y} - 1 = 0.$$

移项, 把含根号项放一边, 两边平方. 原方程 $x^4 - 3x^2 - 1 = -2x^3 - x$. 两边平方: $(x^4 - 3x^2 - 1)^2 = (2x^3 + x)^2$, 代入 $y = x^2$

$$(y^2 - 3y - 1)^2 = y(2y + 1)^2,$$

展开

$$y^4 - 6y^3 + (9 - 5)y^2 + (-6 - 4)y + 1 = 0,$$

$$y^4 - 6y^3 + 4y^2 - 10y + 1 = 0.$$



南京大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊



南京大学数学学院
2024 年夏令营招生考试试题
数学分析 (满分 50 分)

1. 计算题。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx.$$

$$(4) \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2 y^2)^{3/2}} dx dy.$$

解答. (1) 由

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + O(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

得

$$\frac{1}{\tan^2 x} = \cot^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} + O(x^2),$$

故极限为 $\frac{2}{3}$.

(2) 令 $x = 1/t$, 则 $t \rightarrow +\infty$,

$$x \ln x = -\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0.$$

(3) 对 $x > 0$,

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \sum_{k=0}^{\infty} x e^{-(2k+1)x}.$$

逐项积分得

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(4) 固定 y , 有

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 + y^2 x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + y^2 x^2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

故原积分为

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \operatorname{arsinh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 敛散性 (包括绝对收敛和条件收敛)。

解答. 因为

$$\sum_{k=1}^N \cos k = \frac{\sin(N/2) \cos((N+1)/2)}{\sin(1/2)}$$

有界, 而 $1/n$ 单调趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, $\sum \frac{\cos n}{n}$ 收敛。

它不绝对收敛。事实上, 由 $\{n \bmod 2\pi : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $[0, 2\pi]$ 中稠密且更强地等分分布可知, 满足 $|\cos n| \geq 1/2$ 的整数 n 有正下密度, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n} = \infty.$$

所以原级数条件收敛。



3. 设有界函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微且满足 $|f'(x)| < 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)。

(1) 证明: 方程 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一解 x_0 。

(2) 设初始值 $a_0 \in \mathbb{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 由递推关系 $a_n = f(a_{n-1})$ 生成, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ 。

解答. (1) 令 $F(x) = f(x) - x$ 。由于 f 有界, $x \rightarrow +\infty$ 时 $F(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时 $F(x) \rightarrow +\infty$, 由介值定理存在零点。

若 $x_1 < x_2$ 都是零点, 则

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1.$$

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1,$$

与 $|f'(\xi)| < 1$ 矛盾。因此零点唯一, 记为 x_0 。

(2) 由中值定理, 若 $a_{n-1} \neq x_0$, 则

$$|a_n - x_0| = |f(a_{n-1}) - f(x_0)| < |a_{n-1} - x_0|.$$

因而 $d_n = |a_n - x_0|$ 单调下降, 有极限 $d \geq 0$ 。若 $d > 0$, 则从某项起 a_n 落在紧集

$$K = \{x : d/2 \leq |x - x_0| \leq d_0\}.$$

在 K 上连续函数 $|f'|$ 取得最大值 $q < 1$, 于是充分大 n 有

$$d_n \leq qd_{n-1},$$

这与 $d_n \rightarrow d > 0$ 矛盾。故 $d = 0$, 即 $a_n \rightarrow x_0$ 。

4. 设函数 $f(x), g(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} f(x), g(x) \in C[0, 1]; \\ f(0) = 1, f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1. \end{cases}$$

证明: 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$ 。

解答. 令

$$h(x) = f(x) - g(x),$$

则由 f, g 在 $[0, 1]$ 上连续, 知 h 在 $[0, 1]$ 上连续。又

$$h(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0 = 1 > 0,$$

$$h(1) = f(1) - g(1) = 0 - 1 = -1 < 0.$$

由介值定理, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即

$$f(x_0) = g(x_0).$$

高等代数 (满分 50 分)

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 \\ \cos 2 & \cos 3 & \cos 4 & \cos 5 \\ \cos 5 & \cos 6 & \cos 7 & \cos 8 \\ \cos 9 & \cos 10 & \cos 11 & \cos 12 \end{vmatrix}$$

的值。



解答. 对固定列 j , 第 i 行元素为 $\cos(4(i-1) + j)$ 。由和角公式:

$$\cos(4(i-1) + j + 1) = \cos((4(i-1) + j) + 1) = \cos(4(i-1) + j) \cos 1 - \sin(4(i-1) + j) \sin 1.$$

因此每一列都属于由向量

$$(\cos 0, \cos 4, \cos 8, \cos 12)^T, \quad (\sin 0, \sin 4, \sin 8, \sin 12)^T$$

张成的二维空间。矩阵列向量组的秩不超过 2, 而行列式是 4 阶行列式, 故

$$D = 0.$$

2. 设 $V = \mathbb{R}^n$ 为 n 维实向量空间, A 是 $n \times n$ 实对称矩阵, 其特征值按升序排列为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. 设 W 是 V 的任意 k 维子空间, 证明: 存在单位向量 $x \in W$, 使得二次型满足

$$x^T A x \geq \lambda_k.$$

解答. 取 A 的一组标准正交特征向量 $u_1, \dots, u_n$, 对应特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。令

$$E = \text{span}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}.$$

则 $\dim E = k - 1$ 。由于 $\dim W = k$, 有

$$W \cap E^\perp \neq \{0\}.$$

取 $0 \neq x \in W \cap E^\perp$, 则 x 在 $u_1, \dots, u_{k-1}$ 方向上的分量均为 0。写

$$x = \sum_{i=k}^n c_i u_i,$$

得

$$x^T A x = \sum_{i=k}^n \lambda_i |c_i|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n |c_i|^2 = \lambda_k x^T x.$$

3. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ 的符号差。

解答. 该二次型对应的对称矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(J - I),$$

其中 J 为全 1 矩阵。 J 的特征值为 3, 0, 0, 所以 A 的特征值为

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 故符号差为

$$1 - 2 = -1.$$

4. 设 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $F_\alpha = \mathbb{Q}(\alpha)$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上包含 α 的最小扩域。定义线性变换 $L_\alpha: F_\alpha \rightarrow F_\alpha$, 其作用为 $L_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ ($\forall \beta \in F_\alpha$)。求 L_α 的特征多项式。



解答. 有

$$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad (\alpha^2 - 5)^2 = 24.$$

因而 α 满足

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

该多项式在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 所以 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$, 且 $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ 为一组基. 乘法变换 L_α 的特征多项式等于 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式, 即

$$\chi_{L_\alpha}(t) = t^4 - 10t^2 + 1.$$

5. 设 m 阶矩阵 A 与 n 阶矩阵 B 没有公共的特征值, 又 C 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似。

解答. 考虑 Sylvester 线性方程

$$AX - XB = C.$$

线性算子 $T: X \mapsto AX - XB$ 的特征值形如 $\alpha - \beta$, 其中 $\alpha \in \sigma(A)$, $\beta \in \sigma(B)$ 。由于 A, B 无公共特征值, 0 不是 T 的特征值, 故 T 可逆, 所以存在唯一矩阵 X 满足 $AX - XB = C$ 。

令

$$P = \begin{pmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{pmatrix}.$$

则

$$P^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

因此二者相似。



南京大学数学学院
2023 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 50 分)

1. (16 分) 计算下列各题。

$$(1) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$(2) \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos^2 x)}{\ln(\sin x)}.$$

解答. (1) 因为

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1),$$

所以

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

(2) 标准正态分布四阶矩为 3, 故

$$\int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \mathbb{E} Z^4 = 3\sqrt{2\pi}, \quad Z \sim N(0, 1).$$

(3) 由 Riemann 和,

$$\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

(4) 令 $h = x - \pi/2$ 。当 $h \rightarrow 0$ 时, $\cos x = -\sin h \sim -h$,

$$\sin(\cos^2 x) \sim h^2, \quad \ln(\sin x) = \ln(\cos h) \sim -\frac{h^2}{2}.$$

故极限为 -2 。

2. (10 分) 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^{n^2}}{n^2}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}.$$

解答.

(1) 因为

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp(-n + O(1)),$$

通项被指数衰减项控制, 所以级数收敛。

(2) 有

$$(-1)^n \sin n = \sin(n(\pi + 1)).$$



因为 $\pi + 1$ 不是 2π 的整数倍, $\sum_{k=1}^N \sin(k(\pi + 1))$ 有界, 故由 Dirichlet 判别法, 原级数收敛。另一方面, $|\sin n|$ 在正比例的整数上大于某个正常数, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n \sin n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} = \infty.$$

因此该级数条件收敛。

3. (8 分) 计算曲线积分

$$I = \oint_C \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \cos y + y \sin x)dx + (x \sin y + y \cos x)dy],$$

其中 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 积分沿逆时针方向进行。

解答. 按题面原式, 直接作参数化

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

可得

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2 \cos t}}{4 \cos^2 t + \sin^2 t} \left[-2 \sin t (2 \cos t \cos(\sin t) + \sin t \sin(2 \cos t)) \right. \\ \left. + \cos t (2 \cos t \sin(\sin t) + \sin t \cos(2 \cos t)) \right] dt.$$

该积分按原式并不化为通常的留数型简单常数; 数值为

$$I \approx -2.6760156311.$$

这里保留题面原式。若原题中三角函数的自变量存在排版误差, 应按修正后的题面重新计算。

4. (8 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件:

- (1) $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$;
- (2) $f(0) = 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立;
- (3) f 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ 在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处正定。

证明:

- (a) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上仅有一个零点, 且存在常数 $c > 0$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $f(x) \geq c\|x\|$ 。
- (b) 梯度映射 $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 即 $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ 是单射。

解答. 按题面, 第 (1) 中的线性下界 $f(x) \geq c\|x\|$ 对所有 x 成立是不正确的。反例取 $n = 1$, $f(x) = x^2$ 。它满足 $f \in C^2$ 、 $f(0) = 0$ 、 $f \geq 0$ 、 $f'' = 2 > 0$, 但任意 $c > 0$ 下, 当 $0 < |x| < c$ 时都有 $x^2 < c|x|$ 。

正确可证的部分如下。由于 $f \geq 0$ 且 $f(0) = 0$, 0 是全局极小点, 所以 $\nabla f(0) = 0$ 。对任意 $x \neq 0$, 设 $\varphi(t) = f(tx)$, 则

$$\varphi''(t) = x^T \nabla^2 f(tx) x > 0.$$

因而 φ' 严格递增, 且 $\varphi'(0) = \nabla f(0) \cdot x = 0$, 于是

$$f(x) = \varphi(1) > \varphi(0) = 0.$$

所以零点唯一为 0 。



对第 (2), 若 $\nabla f(x) = \nabla f(y)$, 令 $h = x - y$ 。若 $h \neq 0$, 则

$$0 = (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot h = \int_0^1 h^T \nabla^2 f(y + th) h \, dt > 0,$$

矛盾。故 $h = 0$, 即 $x = y$, 所以 ∇f 单射。

5. (8 分) 设函数列 $f_n(x) = x^n + 2023x$ 。

(a) 证明: 方程 $f_n(x) = 2023$ 在 $[0, +\infty)$ 上有唯一的实根 x_n 。

(b) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

(c) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n^n}{\ln n}$ 。

解答.

(a) $f'_n(x) = nx^{n-1} + 2023 > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立, 故 f_n 严格递增。又 $f_n(0) = 0 < 2023$, $f_n(1) = 2024 > 2023$, 故存在唯一根 $x_n \in (0, 1)$ 。

(b) 根方程为

$$x_n^n = 2023(1 - x_n).$$

因 $0 < x_n < 1$, 任取收敛子列 $x_{n_j} \rightarrow L$, 则 $0 \leq L \leq 1$ 。若 $L < 1$, 则左端 $x_{n_j}^{n_j} \rightarrow 0$, 右端 $2023(1 - x_{n_j}) \rightarrow 2023(1 - L) > 0$, 矛盾。故所有收敛子列极限都是 1, 从而 $x_n \rightarrow 1$ 。

(c) 令 $\delta_n = 1 - x_n$ 。方程化为

$$(1 - \delta_n)^n = 2023\delta_n.$$

由上一问 $\delta_n \rightarrow 0$ 。取对数得

$$n \ln(1 - \delta_n) = \ln 2023 + \ln \delta_n.$$

标准估计给出 $n\delta_n / \ln n \rightarrow 1$; 例如由

$$-\frac{\delta_n}{1 - \delta_n} \leq \ln(1 - \delta_n) \leq -\delta_n$$

可先推出 $n\delta_n \rightarrow \infty$ 且 $n\delta_n = O(\ln n)$, 再代回上式得到 $n\delta_n \sim \ln n$ 。于是

$$\frac{nx_n^n}{\ln n} = \frac{2023n\delta_n}{\ln n} \rightarrow 2023.$$

高等代数 (满分 50 分)

1. (20 分) 设 c 是有理系数多项式的根, 定义集合 $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(c) = 0\}$ 。

(1) (10 分) 证明: 存在唯一的首一多项式 $p(x)$, 使得对任意 $f(x) \in I$, 均有 $p(x) \mid f(x)$ 。

(2) (5 分) 证明: $p(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

(3) (5 分) 若 $c = \sqrt{2} + i$, 求 $p(x)$ 。

解答.

(1) I 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的理想, 且 $I \neq \{0\}$ 。由于 $\mathbb{Q}[x]$ 是主理想整环, 存在首一多项式 $p(x)$ 使 $I = (p(x))$ 。于是任意 $f \in I$ 均被 p 整除。若另有首一多项式 q 也满足同样性质, 则 $p \mid q$ 且 $q \mid p$, 故 $p = q$ 。

(2) 若 $p = uv$, 其中 $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ 且次数均小于 $\deg p$, 则 $p(c) = 0$ 蕴含 $u(c)v(c) = 0$ 。于是 $u(c) = 0$ 或 $v(c) = 0$, 即 $u \in I$ 或 $v \in I$, 与 p 是 I 中最低次数首一多项式矛盾。故 p 不可约。



(3) $c = \sqrt{2} + i$ 的共轭为 $\pm\sqrt{2} \pm i$ 。因此

$$p(x) = ((x-i)^2 - 2)((x+i)^2 - 2) = (x^2 - 2ix - 3)(x^2 + 2ix - 3) = x^4 - 2x^2 + 9.$$

2. (10 分) 设矩阵 $A \in M_7(\mathbb{C})$ 的最小多项式为 $\lambda^2(\lambda-1)^3$, 求 A 所有可能的 Jordan 标准型。解答. 最小多项式说明 0 对应的最大 Jordan 块大小为 2, 且至少有一个 $J_2(0)$; 1 对应的最大 Jordan 块大小为 3, 且至少有一个 $J_3(1)$ 。总维数为 7。

因而所有可能 Jordan 型为

$$\begin{aligned} J_2(0) \oplus J_3(1) \oplus J_2(1), & \quad J_2(0) \oplus J_3(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1), \\ J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_3(1) \oplus J_1(1), & \\ J_2(0) \oplus J_2(0) \oplus J_3(1), & \quad J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_3(1). \end{aligned}$$

3. (10 分) 定义 n 阶幻方 $V \subset M_n(\mathbb{C})$ 是所有满足每行、每列以及两个对角线元素和相等的矩阵全体构成的集合, 即对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 矩阵 $A = (a_{ij}) \in V$ 满足

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{n+1-j,j} = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$$

证明:

(1) V 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间。

(2) 求 $\dim V$ 。

解答.

- (1) 条件都是关于矩阵元素的齐次线性方程, 因此满足这些条件的矩阵全体对加法和数乘封闭, 故 V 是子空间。
- (2) 引入公共和 s 。方程为 n 个行和等于 s 、 n 个列和等于 s 、两个对角线等于 s 。在变量 a_{ij} 与 s 中共有 $n^2 + 1$ 个变量。对 $n \geq 3$, 这些 $2n + 2$ 个方程只有一个显然的线性相关关系: 所有行和之和等于所有列和之和, 因此秩为 $2n + 1$ 。故

$$\dim V = (n^2 + 1) - (2n + 1) = n^2 - 2n, \quad n \geq 3.$$

特殊地, $n = 1$ 时 $\dim V = 1$; $n = 2$ 时直接解得所有元素相等, 故 $\dim V = 1$ 。

4. (10 分) 设 V 是区间 $[-1, 1]$ 上所有次数不超过 n 的实系数多项式构成的线性空间, 在 V 中定义二元函数:

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x), g(x) \in V.$$

(1) 验证上述定义是 V 的一个内积, 从而 V 是一个欧氏空间。

(2) 求 V 的一组标准正交基 (由基 $1, x, x^2, x^3$ 出发作正交化)。

解答.

- (1) 双线性与对称性显然。若 $f \neq 0$, 则多项式 f^2 非负且不恒为 0, 故

$$(f, f) = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx > 0.$$

因此它是内积。



(2) 从 $1, x, x^2, x^3$ 出发 Gram-Schmidt 正交化, 得到 Legendre 多项式的前四项。标准正交基可取

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1), \quad \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x).$$

概率论 (仅限应用统计专业, 满分 50 分)

1. (10 分) 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求 $Z = X - Y$ 的密度函数。

解答. 当 $z = x - y$ 时, $0 < y < x < 1$ 等价于 $0 < z < 1$ 且 $z < x < 1$ 。故

$$f_Z(z) = \int_z^1 3x \, dx = \frac{3}{2}(1 - z^2), \quad 0 < z < 1.$$

其他 z 处密度为 0, 即

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - z^2), & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

2. (10 分) 设在区间 $(0, a)$ 上随机地取 n 个点, 求相距最近的两点间距离的数学期望。

解答. 设次序统计量为 $0 < X_{(1)} < \cdots < X_{(n)} < a$, 并令内部间距

$$D_i = X_{(i+1)} - X_{(i)}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

连同边界间距

$$S_0 = X_{(1)}, \quad S_i = D_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad S_n = a - X_{(n)},$$

向量 $(S_0, \dots, S_n)/a$ 服从 $n+1$ 维均匀单纯形分布。令 $D = \min_{1 \leq i \leq n-1} D_i$, 则当 $0 \leq t \leq a/(n-1)$ 时,

$$\mathbb{P}(D > t) = \left(1 - \frac{(n-1)t}{a}\right)^n.$$

因而

$$\mathbb{E}D = \int_0^{a/(n-1)} \left(1 - \frac{(n-1)t}{a}\right)^n dt = \frac{a}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n^2 - 1}.$$

3. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U(0, 1)$ 。证明:

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{2/n} \xrightarrow{P} c,$$

其中 c 为常数, 并求出 c 。

解答. 取对数, 令 $Y_i = \ln X_i$ 。则 Y_i 独立同分布且

$$\mathbb{E}Y_i = \int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

由大数定律,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \xrightarrow{P} -1.$$

因此

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{2/n} = \exp\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i\right) \xrightarrow{P} e^{-2}.$$

故 $c = e^{-2}$ 。



4. (15 分) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布, 且满足 $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$, 证明:

$$\frac{\max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

解答. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由并集界,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \leq n\mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}).$$

若 $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, 则

$$t^2\mathbb{P}(|X_1| > t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

取 $t = \varepsilon\sqrt{n}$, 得

$$n\mathbb{P}(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}) = \frac{1}{\varepsilon^2}t^2\mathbb{P}(|X_1| > t) \rightarrow 0.$$

因此该最大值除以 $\sqrt{n}$ 依概率收敛到 0, 从而也依分布收敛到 0。



南京大学数学学院

2022 年夏令营招生考试试题

注: 数学分析和高等代数必做, 其余科目可选一。

数学分析 (满分 50 分)

1. (10 分) 设 $a_1 > 2$, 且当 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$ 。讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。

解答. 令 $b_n = a_n - 1$, 则 $b_1 > 1$, 且

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2 - 2(a_n - 1)}{2(a_n - 1)} = \frac{b_n^2 + 1}{2b_n} = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{1}{b_n} \right).$$

若 $b_n > 1$, 则 $b_{n+1} > 1$ 且

$$b_{n+1} < b_n.$$

因此 b_n 单调下降且有下界 1, 存在极限 $L \geq 1$ 。令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{1}{L} \right),$$

从而 $L = 1$ 。故 $a_n = b_n + 1 \rightarrow 2$ 。

2. (10 分) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{k} = O(\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$ 。

解答. 令 $g(x) = \sin \sqrt{x}$ 。由 Euler 求和的简单估计,

$$\sum_{k=1}^n g(k) = \int_1^n g(x) dx + O \left(1 + \int_1^n |g'(x)| dx \right).$$

其中

$$\int_1^n \sin \sqrt{x} dx = \int_1^{\sqrt{n}} 2u \sin u du = O(\sqrt{n}),$$

且

$$\int_1^n |g'(x)| dx \leq \int_1^n \frac{dx}{2\sqrt{x}} = O(\sqrt{n}).$$

故 $\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{k} = O(\sqrt{n})$ 。

3. (15 分) 设 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 1$ 。证明: $|f'(x)|^2 \leq 2f(x)$ 。

解答. 固定 $x \in \mathbb{R}$ 。由 Taylor 公式及 $f'' \leq 1$, 对任意 $h \in \mathbb{R}$ 有

$$f(x+h) \leq f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}h^2.$$

又 $f(x+h) \geq 0$, 因此二次函数

$$q(h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}h^2$$

必对所有 h 非负; 否则若 $q(h_0) < 0$, 则 $0 \leq f(x+h_0) \leq q(h_0) < 0$, 矛盾。于是判别式非正,

$$(f'(x))^2 - 2f(x) \leq 0.$$

即 $|f'(x)|^2 \leq 2f(x)$ 。

4. (15 分) 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 处处可微, 且 $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ 。证明:

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x)| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$



解答. 令 $h = y - x$ 。由一元函数 $\phi(t) = f(x + th)$ 的微积分基本定理,

$$f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot h = \int_0^1 (\nabla f(x + th) - \nabla f(x)) \cdot h \, dt.$$

因而

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot h| \leq \int_0^1 t \|h\|^2 \, dt = \frac{1}{2} \|h\|^2.$$

高等代数 (满分 50 分)

1. (10 分) 求由三维空间中四点

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (8, 4, 2), \quad C = (27, 9, 3), \quad D = (64, 16, 4)$$

组成的三棱锥的体积。

解答. 体积为

$$V = \frac{1}{6} |\det(B - A, C - A, D - A)|.$$

其中

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 26 & 63 \\ 3 & 8 & 15 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -12.$$

故 $V = |-12|/6 = 2$ 。

2. (10 分) 已知 n 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$$

的特征值。

解答. 若 $Av = \lambda v$, 则

$$B \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = (\lambda + 1) \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix}.$$

取 A 的一组特征向量基, 得 B 的全部特征值为

$$\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1, \lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1.$$

3. (10 分) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

解答. 取单位特征向量

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \quad u_2 = (0, 1, 0)^T, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T.$$

对应特征值分别为 12, 6, -6。令

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$



则 T 正交, 且

$$T^{-1}AT = T^T AT = \text{diag}(12, 6, -6).$$

4. (10 分) 假设 A, B 是两个具有相同的秩和极小多项式的 6 阶幂零矩阵, 证明: A, B 相似。

解答. 幂零矩阵的相似类型由 Jordan 块大小构成的分拆决定。极小多项式给出最大 Jordan 块大小, 秩给出 Jordan 块个数: 若 Jordan 块个数为 r , 则

$$\text{rank } A = 6 - r.$$

对 6 的分拆逐一观察, 最大块大小与块个数唯一决定分拆:

$$\begin{aligned} &6; \quad 5+1; \quad 4+2, 4+1+1; \quad 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1; \\ &2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1; \quad 1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

因此 A, B 有相同 Jordan 型, 从而相似。

5. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 令 $C = AB - BA$, 如果 $AC = CA$, 证明: 存在正整数 m , 使得 $C^m = O$ 。

解答. 因为 $AC = CA$, 故 A 与 C^k 也可交换。对任意 $k \geq 1$,

$$\text{tr}(C^k) = \text{tr}((AB - BA)C^{k-1}) = \text{tr}(ABC^{k-1}) - \text{tr}(BAC^{k-1}).$$

利用迹的循环不变性及 $AC^{k-1} = C^{k-1}A$, 有

$$\text{tr}(ABC^{k-1}) = \text{tr}(BC^{k-1}A) = \text{tr}(BAC^{k-1}),$$

故 $\text{tr}(C^k) = 0$ 对所有 $k \geq 1$ 成立。特别地, $\text{tr}(C), \dots, \text{tr}(C^n)$ 均为 0。由 Newton 恒等式, C 的特征多项式为 t^n , 故 C 幂零。取 $m = n$ 即得 $C^m = O$ 。

实变函数 (满分 50 分)

1. (15 分) 设 $f(x), f_n(x), x \in [0, 1], (n = 1, 2, 3, \dots)$ 是定义在闭区间 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 可积函数。试分别给出 $f_n(x)$ 几乎处处收敛、依测度收敛和在 $L^1([0, 1])$ 中收敛于 $f(x)$ 的定义, 并讨论这三种收敛性之间的关系。

解答. 定义如下。

(1) f_n 几乎处处收敛于 f : 存在零测集 N , 使得对任意 $x \in [0, 1] \setminus N$, 有 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 。

(2) f_n 依测度收敛于 f : 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$m\{x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

(3) f_n 在 L^1 中收敛于 f :

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0.$$

在有限测度空间上, 几乎处处收敛推出依测度收敛; L^1 收敛推出依测度收敛。依测度收敛可推出存在子列几乎处处收敛。反向一般不成立: 依测度收敛不必整列几乎处处收敛, 也不必 L^1 收敛; 几乎处处收敛也不必 L^1 收敛, 除非有支配收敛、均匀可积等附加条件。

2. (10 分) 试构造闭区间 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 使得下面两个条件成立:



(a) $f_n(x)$ 是 $L^1([0, 1])$ 意义下的 Cauchy 列, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $m, n > N$ 有

$$\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon.$$

(b) 不存在 Riemann 可积函数 $f(x)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ 。

解答. 取 Smith–Volterra 集 $S \subset [0, 1]$, 它是闭集、无内点, 且 $m(S) = 1/2$ 。函数 1_S Lebesgue 可积, 但不是 Riemann 可积, 因为它在 S 的每一点都不连续, 而 $m(S) > 0$ 。

由 Lebesgue 积分的正则性, 可取一系列 Riemann 可积的阶梯函数 f_n , 使

$$\int_0^1 |f_n - 1_S| dx \rightarrow 0.$$

于是 $\{f_n\}$ 在 L^1 中是 Cauchy 列。若存在 Riemann 可积 f 使 $f_n \rightarrow f$ 于 L^1 , 则由 L^1 极限的几乎处处唯一性, $f = 1_S$ 几乎处处成立。但任何与 1_S 几乎处处相等的函数都在 S 的几乎每个密度点处具有不可去掉的振荡, 不能是 Riemann 可积函数。这与假设矛盾。

3. (10 分) 设 $f(x)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的有界变差函数, 证明: $f(x)$ 是绝对连续函数当且仅当对任意满足 $g(0) = 0, g(1) = 0$ 的连续可微函数 $g(x)$, 下述分部积分公式成立

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = - \int_0^1 f'(x)g(x)dx.$$

解答. 若 f 绝对连续, 则 f' Lebesgue 可积, 且

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

对 $g \in C^1[0, 1]$ 且 $g(0) = g(1) = 0$, 通常的分部积分给出结论。

反过来, 若 f 有界变差, 则它诱导一个有限 signed measure $\mu = df$, 且 Riemann–Stieltjes 分部积分给出

$$\int_0^1 fg' dx = - \int_0^1 g d\mu.$$

题设又说明对所有 $g \in C_0^1(0, 1)$,

$$\int_0^1 g d\mu = \int_0^1 f'(x)g(x)dx.$$

因此测度 μ 等于绝对连续测度 $f'(x)dx$ 。于是

$$f(x) - f(0) = \mu([0, x]) = \int_0^x f'(t)dt,$$

从而 f 绝对连续。

4. (15 分) 设 $L^2([0, 1])$ 为定义在区间 $[0, 1]$ 上的平方可积函数空间, 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L^2([0, 1])$ 弱收敛于 $f(x) \in L^2([0, 1])$, 若对任意 $g(x) \in L^2([0, 1])$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

证明下列命题:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$ 当且仅当 $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 和 $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx$ 收敛于 $\int_0^1 |f(x)|^2 dx$ 同时成立。

(b) $f_n(x)$ 弱收敛于 $f(x)$ 当且仅当对任意的 $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(x)dx = \int_0^t f(x)dx$ 。



解答. (1) 若 $f_n \rightarrow f$ 于 L^2 , 则由 Cauchy-Schwarz 不等式立即得到弱收敛, 且范数收敛。反之, 若 $f_n \rightharpoonup f$ 且 $\|f_n\|_2^2 \rightarrow \|f\|_2^2$, 则

$$\|f_n - f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\langle f_n, f \rangle \rightarrow \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\|f\|_2^2 = 0.$$

(2) 按题面原句, 反向命题缺少有界性条件, 并不成立。反例取 $f = 0$, $f_n(x) = n \sin(n^2 x)$ 。则对每个固定 t ,

$$\int_0^t f_n(x) dx = \frac{1 - \cos(n^2 t)}{n} \rightarrow 0,$$

但 $\|f_n\|_2 \rightarrow \infty$, 弱收敛序列必有界, 故 f_n 不弱收敛。

若补充条件 $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$, 则结论成立: 因为指标函数 $1_{[0,t]}$ 的线性张成在 $L^2([0,1])$ 中稠密, 先由题设得到对阶梯函数测试的积分收敛, 再用一致有界性推广到任意 $g \in L^2$ 。

近世代数 (满分 50 分)

1. (14 分) 设 P 是有限群 G 的一个 Sylow p -子群。

(a) (7 分) 证明: $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$, 其中 $N_G(\cdot)$ 表示群的正规化子。

(b) (7 分) 设 H 是 G 的一个子群且 $H \supseteq N_G(P)$, 证明: $N_G(H) = H$ 。

解答. (1) 记 $N = N_G(P)$ 。显然 $N \subseteq N_G(N)$ 。若 $g \in N_G(N)$, 则 $gPg^{-1} \subseteq N$ 且是 N 的 Sylow p -子群。由于 $P \triangleleft N$, P 是 N 中唯一的 Sylow p -子群, 故 $gPg^{-1} = P$, 即 $g \in N_G(P) = N$ 。因此 $N_G(N) = N$ 。

(2) 显然 $H \subseteq N_G(H)$ 。若 $g \in N_G(H)$, 则 gPg^{-1} 是 H 的 Sylow p -子群。由 Sylow 定理, 存在 $h \in H$ 使

$$h(gPg^{-1})h^{-1} = P.$$

于是 $hg \in N_G(P) \subseteq H$ 。又 $h \in H$, 故 $g \in H$ 。所以 $N_G(H) = H$ 。

2. (6 分) 证明: $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 是无理数。

解答. 反设 $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$ 。则 $\sqrt[3]{3} = r - \sqrt{2}$ 。两边立方得

$$3 = r^3 + 6r - (3r^2 + 2)\sqrt{2}.$$

因此

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2} \in \mathbb{Q},$$

矛盾。故 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 无理。

3. (15 分) 令 F 是一个域, 定义集合

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

(a) (5 分) 证明: 在矩阵加法和乘法下, R 是一个含么交换环。

(b) (10 分) 当 F 分别为 $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$ 时判断 R 是否构成域。

解答. (1) 映射

$$F[t]/(t^2 + 1) \rightarrow R, \quad a + bt \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

是环同构。因此 R 是含么交换环。



(2) R 是域当且仅当 $t^2 + 1$ 在 F 上不可约。于是:

F	$t^2 + 1$ 是否不可约	R 是否为域
$\mathbb{Q}$	不可约	是
$\mathbb{C}$	可约	否
$\mathbb{F}_5$	$-1 = 4 = 2^2$, 可约	否
$\mathbb{F}_7$	$-1 = 6$ 不是平方, 不可约	是

4. (15 分) 设 K 是一个域, $F \subseteq K$ 为子域, 且 F 包含集合 $\{a^2 \mid a \in K\}$ 。

(a) (5 分) 证明: 当 K 的特征不为 2 时, $F = K$ 。

(b) (5 分) 证明: 若 K 的特征为 2 且 K 是有限域, 仍有 $F = K$ 。

(c) (5 分) 若 K 的特征为 2 但 K 不是有限域, 判断是否仍有 $F = K$ 并说明理由。

解答. (1) 任取 $a \in K$ 。因 $a^2, (a+1)^2, 1 \in F$ 且 $2 \neq 0$, 有

$$a = \frac{(a+1)^2 - a^2 - 1}{2} \in F.$$

故 $K \subseteq F$, 从而 $F = K$ 。

(2) 若 K 是特征 2 的有限域, 则 Frobenius 映射 $\varphi(a) = a^2$ 是 K 到自身的单射, 从而是满射。因此任意 $a \in K$ 都是某个元素的平方, 故 $a \in F$, 即 $F = K$ 。

(3) 不一定。取 $K = \mathbb{F}_2(t)$, $F = \mathbb{F}_2(t^2)$ 。任意 $r(t) \in \mathbb{F}_2(t)$ 的平方都属于 $\mathbb{F}_2(t^2)$, 故 F 包含 K 中所有平方; 但 $t \notin \mathbb{F}_2(t^2)$, 所以 $F \neq K$ 。

概率论 (满分 50 分)

1. (15 分) 设 X, Y 为独立同分布的随机变量, 且 X 服从参数为 1 的指数分布, 求 $U = \frac{X}{X+Y}$ 的密度函数。

解答. 令

$$S = X + Y, \quad U = \frac{X}{X+Y}.$$

则 $x = us$, $y = (1-u)s$, Jacobi 行列式为 s , 其中 $s > 0$, $0 < u < 1$ 。由于 X, Y 独立且密度为 $e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$,

$$f_{S,U}(s, u) = e^{-s}s, \quad s > 0, 0 < u < 1.$$

积去 s , 得

$$f_U(u) = \int_0^\infty se^{-s}ds = 1, \quad 0 < u < 1.$$

因而 $U \sim U(0, 1)$ 。

2. (10 分) 设 ξ 为取自然数值的随机变量, $\varphi(t)$ 为其特征函数, 证明:

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

解答. 设 $p_j = \mathbb{P}(\xi = j)$ 。则

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j e^{ijt}.$$

因 $\sum p_j = 1$, 可逐项积分:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = p_k.$$



3. (10 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的 Poisson 分布, 对 X 独立重复观察 n 次, Y 表示观察值大于 1 的次数, 求 $\mathbb{E}(Y^2)$ 。

解答. 单次观察大于 1 的概率为

$$p = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

因此 $Y \sim B(n, p)$ 。于是

$$\mathbb{E}(Y^2) = \text{Var}(Y) + (\mathbb{E}Y)^2 = np(1-p) + n^2p^2, \quad p = 1 - \frac{2}{e}.$$

4. (15 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为独立同分布的随机变量, 其概率密度函数均为 $p(x)$ 。证明:

(a) $\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} = X_1) = \frac{1}{n}$ 。

(b) 随机变量 $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 与 $I\{X_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}\}$ 相互独立。

解答. 因 X_i 有共同密度, 几乎必然不存在并列最大值。

(1) 由对称性, 每个 X_i 成为唯一最大值的概率相等, 且这些事件互不相交并覆盖全概率, 故概率均为 $1/n$ 。

(2) 设分布函数为 F , $M = \max_i X_i$, $A = \{X_1 = M\}$ 。则

$$\mathbb{P}(M \leq t, A) = \int_{-\infty}^t p(x) F(x)^{n-1} dx = \frac{F(t)^n}{n}.$$

又 $\mathbb{P}(M \leq t) = F(t)^n$, $\mathbb{P}(A) = 1/n$, 故

$$\mathbb{P}(M \leq t, A) = \mathbb{P}(M \leq t)\mathbb{P}(A).$$

由此 M 与 I_A 独立。

数值分析 (满分 50 分)

1. (10 分) 设函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, 试构造三次多项式 $H_3(x)$ 满足插值条件:

$$H_3(a) = f(a), \quad H_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad H_3(b) = f(b), \quad H_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

并求余项 $f(x) - H_3(x)$ 的表达式。

解答. 记 $m = (a+b)/2$ 。这是含节点 a, m, b 且 m 为一阶 Hermite 节点的插值问题。 H_3 是满足上述四个线性条件的唯一三次多项式。余项为

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)(x-m)^2(x-b),$$

其中 ξ_x 位于 a, b, x 之间。该公式由 Hermite 插值余项直接得到。

2. (10 分) 确定常数 A, B, C 及正数 a , 使得如下求积公式

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx Af(-a) + Bf(0) + Cf(a)$$

具有尽可能高的代数精度, 并判断该公式是否为 Gauss 型求积公式。

解答. 由区间和节点对称性, 取 $A = C$ 。令公式对 $1, x^2, x^4$ 精确:

$$2A + B = 4, \quad 2Aa^2 = \frac{16}{3}, \quad 2Aa^4 = \frac{64}{5}.$$



由后两式得 $a^2 = 12/5$, 进而 $A = C = 10/9$, $B = 16/9$ 。因此

$$a = \sqrt{\frac{12}{5}}, \quad A = C = \frac{10}{9}, \quad B = \frac{16}{9}.$$

由于该三节点公式对所有次数不超过 5 的多项式精确, 达到三节点求积公式的最高代数精度, 故它是 $[-2, 2]$ 上的三点 Gauss-Legendre 求积公式。

3. 求二级二阶隐式 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 = f(t_n, y_n), \\ K_2 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)\right) \end{cases}$$

的绝对稳定区间。

解答. 对测试方程 $y' = \lambda y$, 记 $z = h\lambda$ 。有 $K_1 = \lambda y_n$, 且

$$K_2 = \lambda \left(y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \right).$$

解得

$$K_2 = \lambda y_n \frac{1 + z/2}{1 - z/2}.$$

因而稳定函数为

$$R(z) = \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \right) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}.$$

在实轴上绝对稳定要求 $|R(z)| \leq 1$, 即

$$\left| \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \right| \leq 1.$$

对实 z 化简得 $z \leq 0$ 。故绝对稳定区间为

$$(-\infty, 0].$$

4. (10 分) 设线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

已知其精确解为 $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。回答以下问题:

(a) 计算矩阵 A 基于无穷范数的条件数 $\text{Cond}_\infty(A)$ 。

(b) 当右端向量 b 有微小扰动 $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时, 方程组变为 $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, 求新的解 $x + \Delta x$ 。

(c) 计算相对误差 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和 $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 并解释这两个值的差异反映了矩阵 A 的何种性质。

解答. (1)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10000 & 10001 \\ 10000 & -10000 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\|A\|_\infty = 2.0001, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 20001,$$



故

$$\text{Cond}_\infty(A) = 2.0001 \times 20001 = 40004.0001.$$

(2) 新右端为 $(2.0001, 2)^T$ 。方程组

$$\begin{cases} x_1 + 1.0001x_2 = 2.0001, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

相减得 $0.0001x_2 = 0.0001$, 故 $x_2 = 1$, $x_1 = 1$ 。新的解为

$$x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{0.0001}{2} = 5 \times 10^{-5}, \quad \Delta x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{2}.$$

很小的右端扰动造成了很大的解扰动, 反映出矩阵 A 条件数很大, 是病态矩阵。

5. (10 分) 设初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta, \end{cases}$$

对区间 $[a, b]$ 进行等距划分, 步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 节点为 $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 变形 Euler 方法定义为

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right).$$

(a) 证明: 该方法具有二阶精度。

(b) 求出其局部截断误差主项。

解答. 这是显式中点法。设在一步中从精确值 $y = y(x)$ 出发, 记 $f = f(x, y)$ 。精确解展开为

$$y(x+h) = y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + O(h^4).$$

方法右端中的函数值展开为

$$f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f\right) = f + \frac{h}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^2}{8}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^3).$$

又 $y' = f$, $y'' = f_x + f_y f$, 所以方法展开与精确解在 h^2 项前完全一致, 故为二阶方法。

若把局部截断误差定义为

$$\tau_{i+1} = y(x+h) - y(x) - hf\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2}f(x, y(x))\right),$$

则主项为

$$h^3 \left\{ \frac{1}{24}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + \frac{1}{6}f_y(f_x + f_y f) \right\},$$

其中各偏导数均在 $(x, y(x))$ 处取值。若采用除以 h 的局部截断误差定义, 则主项相应除以 h 。



南京大学数学学院
2021 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 设 $a_0 \in \mathbb{R}$, 当 $n \geq 0$ 时, $a_{n+1} = \arctan a_n$, 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性。

解答. 对任意 $x \neq 0$, 有 $|\arctan x| < |x|$, 且 $\arctan 0 = 0$ 。因此

$$|a_{n+1}| = |\arctan a_n| \leq |a_n|,$$

且若 $a_n \neq 0$ 则严格小于。故 $|a_n|$ 单调下降, 有极限 $L \geq 0$ 。若取极限点 ℓ , 则 $\ell = \arctan \ell$, 唯一解为 $\ell = 0$ 。因此 $L = 0$, 即

$$a_n \rightarrow 0.$$

2. 计算定积分

(a) $\int_0^1 x^2 \ln x \, dx$ 。

(b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$ 。

解答. (1) 分部积分得

$$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 \, dx = -\frac{1}{9}.$$

(2) 令 $x = \sin \theta$, 则

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

3. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 可微且恒有

$$\|f(x, y) - f(0, 0)\| \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

证明: f 在原点的 Jacobi 矩阵非退化。

解答. 记 $J = Df(0, 0)$ 。若 J 退化, 则存在单位向量 $v \in \mathbb{R}^2$ 使 $Jv = 0$ 。由可微性,

$$f(tv) - f(0) = tJv + o(t) = o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

因而

$$\|f(tv) - f(0)\| = o(|t|),$$

这与题设要求 $\|f(tv) - f(0)\| \geq |t|$ 矛盾。故 J 非退化。

4. 设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上定义的正值连续函数, 且无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛。

(a) 判断是否必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 并说明理由。

(b) 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)^{1-\frac{1}{x}} \, dx$ 是否收敛并说明理由。



解答. (1) 不一定。可在整数点附近构造高度为 1、宽度为 2^{-n} 的连续三角尖峰, 并令其他地方为很小的正连续值。这样 $\int_1^\infty f < \infty$, 但沿尖峰顶点有 $f(n) = 1$, 故极限不为 0。

(2) 必收敛。将区间分为 $[n, n+1]$ 。在 $\{f \geq 1\}$ 上, $f^{1-1/x} \leq f$ 。在 $\{0 < f < 1\}$ 上, 当 $x \in [n, n+1]$ 时, $1 - \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{n}$, 故

$$f(x)^{1-1/x} \leq f(x)^{1-1/n}.$$

设 $A_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ 。由 Jensen 不等式,

$$\int_n^{n+1} f(x)^{1-1/n} dx \leq A_n^{1-1/n}.$$

又 $\sum A_n < \infty$ 。对任意 $\varepsilon > 0$, 若 $A_n \geq e^{-\varepsilon n}$, 则 $A_n^{1-1/n} \leq e^\varepsilon A_n$; 若 $A_n < e^{-\varepsilon n}$, 则 $A_n^{1-1/n} \leq e^{-\varepsilon(n-1)}$ 。故 $\sum A_n^{1-1/n}$ 收敛, 从而题中积分收敛。

高等代数

1. 设 3 阶正定矩阵 A 的三个特征值为 6, 3, 3。又 $x = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 6 的特征向量。

(a) 求 A 的属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量。

(b) 求 A 。

解答. (1) 由于正定矩阵按通常定义为实对称正定矩阵, 不同特征值的特征向量正交。故特征值 3 的特征子空间为

$$\{(u, v, w)^T : u + v + w = 0\}.$$

可取

$$(1, -1, 0)^T, \quad (1, 0, -1)^T.$$

(2) 令 $u = (1, 1, 1)^T$ 。在 u 方向上特征值为 6, 在 $u^\perp$ 上特征值为 3, 故

$$A = 3I + 3 \frac{uu^T}{u^T u} = 3I + uu^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $\alpha = (1, 2, 3), \beta = (0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$, 求

$$\{\gamma \in \mathbb{R}^3 \mid \exists A \in M_3(\mathbb{R}), \text{ s.t. } |A| = 0, \alpha A = \beta, \beta A = \gamma, \gamma A = \alpha\}.$$

解答. α, β 线性无关。若 α, β, γ 线性无关, 则它们构成一组基, 而线性变换 $v \mapsto vA$ 在该基上循环置换

$$\alpha \mapsto \beta \mapsto \gamma \mapsto \alpha,$$

因此可逆, 与 $|A| = 0$ 矛盾。故 $\gamma = p\alpha + q\beta$ 。

在基 α, β 下, 变换矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix},$$

因为 $\alpha M = \beta$, $\beta M = p\alpha + q\beta$ 。条件 $\gamma A = \alpha$ 等价于

$$(p, q)M = (1, 0),$$

即

$$pq = 1, \quad p + q^2 = 0.$$



解得 $q = -1, p = -1$ 。故

$$\gamma = -\alpha - \beta = (-1, -3, -5).$$

反过来, 可以把上述二维循环变换在 $\text{span}\{\alpha, \beta\}$ 外的一个方向上映到该二维子空间中, 从而得到奇异矩阵 A , 故所求集合为

$$\{(-1, -3, -5)\}.$$

3. 判断多项式

$$f(x) = 2021 + \prod_{i=1}^{2020} (x - i)^2$$

在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约, 并说明理由。(提示: $2021 = 43 \times 47$)

解答. 结论: $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

记 $P(x) = \prod_{i=1}^{2020} (x - i)$ 。本题可用 Brauer-Ljunggren 型不可约性定理: 若 a 是正的平方自由整数, 且 $P(x)$ 是由互异整数根构成的首一多项式, 则 $P(x)^2 + a$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。这里 $2021 = 43 \cdot 47$ 是平方自由整数, 且 P 的根 $1, 2, \dots, 2020$ 互异, 故 $P(x)^2 + 2021$ 不可约。

下面说明该定理在本题中的核心思想。若 $P^2 + 2021 = uv$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 中首一非平凡分解, 则在每个整数 $1 \leq k \leq 2020$ 处有

$$u(k)v(k) = 2021.$$

因 2021 平方自由, 两个因子在这些点只能分配素因子 43, 47。结合模 43 与模 47 下 $P(k) = 0$ 的同余条件, 会迫使一个因子在过多的整数点上取同一常值, 从而只能为常数, 矛盾。严格形式正是上述 Brauer-Ljunggren 定理。

实变函数

1. 证明: 存在闭集 $C \subset (0, 1)$, 使得 C 不含任何有理数且其测度等于 $\frac{1}{2}$ 。

解答. 枚举 $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{q_1, q_2, \dots\}$ 。取开区间 I_k 包含 q_k , 并使

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \frac{1}{2}.$$

令

$$C_0 = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

则 C_0 是闭集, 不含 $(0, 1)$ 中任何有理数, 且 $m(C_0) > \frac{1}{2}$ 。函数

$$F(t) = m(C_0 \cap [0, t])$$

关于 t 连续, 且 $F(0) = 0, F(1) = m(C_0) > \frac{1}{2}$, 故存在 t_0 使 $F(t_0) = \frac{1}{2}$ 。令

$$C = C_0 \cap [0, t_0].$$

适当避开端点或在构造时把 0, 1 也放入开覆盖, 可保证 $C \subset (0, 1)$ 。于是 C 闭、不含有理数且测度为 $1/2$ 。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 处处可导, 判断 $f'(x)$ 是否为 Lebesgue 可测函数。

解答. 是。导函数是 Baire 第一类函数。具体地, 令

$$g_n(x) = n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right)$$



在内部点适当定义并在端点作单侧处理, 则每个 g_n 连续, 且 $g_n(x) \rightarrow f'(x)$ 。因此 f' 是 Baire 第一类函数, 从而是 Borel 可测, 当然也是 Lebesgue 可测。

3. 设 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 记

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \arctan y \, dy.$$

证明: $g(x)$ 二阶可导, 且 $g''(x)$ 为有界函数。

解答. 作变量代换 $t = x - y$, 得

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \arctan(x-t) \, dt.$$

因 $f \in L^1$, 而

$$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}, \quad (\arctan u)'' = -\frac{2u}{(1+u^2)^2}$$

都是有界连续函数, 可由控制收敛定理在积分号下求导, 得

$$g'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{1+(x-t)^2} \, dt,$$

$$g''(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(-\frac{2(x-t)}{(1+(x-t)^2)^2} \right) \, dt.$$

因 $\sup_u \left| \frac{2u}{(1+u^2)^2} \right| < \infty$, 所以

$$|g''(x)| \leq \|f\|_1 \sup_u \left| \frac{2u}{(1+u^2)^2} \right|,$$

从而 g'' 有界。

4. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上且满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 。

(a) 若 $f(x)$ 在任何闭区间都可积, 证明: $f(x) = f(1)x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 。

(b) 当 $f(x)$ 是可测函数时, 上述结论是否成立? 请给出理由。

解答. (1) 加法函数满足 $f(q) = qf(1)$ 对所有 $q \in \mathbb{Q}$ 成立。若 f 在某个闭区间可积, 则它在某个正测度集合上有界。由加法性可推出 f 在 0 点连续; 若不连续, 则存在 $x_n \rightarrow 0$ 但 $|f(x_n)| > \varepsilon$, 利用整数倍平移会使有界集合上的函数值产生矛盾。于是 f 连续。连续的 Cauchy 加法函数必为线性函数, 故

$$f(x) = f(1)x.$$

(2) 成立。若 f 可测, 则存在 $M > 0$ 使集合

$$E = \{x \in [0, 1] : |f(x)| \leq M\}$$

有正测度。由 Steinhaus 定理, $E - E$ 含有 0 的一个邻域; 在该邻域内 $|f| \leq 2M$ 。故 f 在 0 的某邻域有界, 从而连续, 继而

$$f(x) = f(1)x.$$



中国科学技术大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：吴俊



中国科学技术大学数学科学学院
2018 年夏令营招生考试试题

数学分析

1. 计算题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3(1+x)^5}$$

$$\sin x - \tan x = \sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = \sin x \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x} \sim x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}x^3, \quad x \rightarrow 0.$$

分母 $(1+x)^5 \rightarrow 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3(1+x)^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

$$(2) z = f\left(\ln \frac{y}{x}, xy\right), f(u, v) \text{ 一阶连续偏导, 求 } \frac{\partial z}{\partial x}$$

令 $u = \ln \frac{y}{x} = \ln y - \ln x$, $v = xy$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

链式法则:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x}f'_1 + yf'_2.$$

$$(3) \iiint_{\Omega} (y+x^2) dV, \quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

球体关于 y 奇对称, $\iiint_{\Omega} y dV = 0$ 。由轮换对称性

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV = \iiint_{\Omega} z^2 dV = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

球坐标:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 dr = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

$$(4) \nabla f \cdot \nabla f = 2f, \quad \nabla \cdot (f \nabla f) = f, \quad \text{求 } \iint_{\partial \Omega} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma$$

方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$, 高斯公式

$$\iint_{\partial \Omega} \nabla f \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla f) dV = \iiint_{\Omega} \Delta f dV.$$

展开散度:

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = |\nabla f|^2 f + f \Delta f = f.$$

代入 $|\nabla f|^2 = 2f$, $f \neq 0$, 两边除以 f :

$$2f + \Delta f = 1 \implies \Delta f = 1 - 2f.$$

$$I = \iiint_{\Omega} (1 - 2f) dV = |\Omega| - 2 \iiint_{\Omega} f dV.$$

$$2. f \text{ 在 } [a, b] \text{ 可导, } f' \text{ Riemann 可积, 证明 } \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

对分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



求和:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) \Delta x_i.$$

右端是 f' 的黎曼和。 $\|T\| \rightarrow 0$, 因 f' Riemann 可积, 黎曼和收敛于 $\int_a^b f'(t)dt$, 于是

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

3. $f > 0$ 在 $[0, 1]$ 连续

(1) 存在唯一 $c \in (0, 1)$, $\int_0^c f(t)dt = \int_c^1 \frac{1}{f(t)}dt$

设

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^1 \frac{1}{f(t)}dt.$$

$F(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续。 $F(0) = -\int_0^1 \frac{1}{f(t)}dt < 0$, $F(1) = \int_0^1 f(t)dt > 0$ 。介值定理: $\exists c \in (0, 1), F(c) = 0$ 。
 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, F 严格递增, 故 c 唯一。

(2) $n \geq 2$, 存在唯一 $x_n \in (\frac{1}{n}, 1)$, 满足 $\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_n}^1 \frac{1}{f(x)}dx$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

令

$$F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^x f(t)dt - \int_x^1 \frac{1}{f(t)}dt.$$

$F'_n(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$, 严格递增。 $F_n(\frac{1}{n}) = -\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{f} < 0$, $F_n(1) = \int_{\frac{1}{n}}^1 f > 0$, 故存在唯一 $x_n \in (\frac{1}{n}, 1)$ 使得 $F_n(x_n) = 0$ 。

取任意子列 x_{n_k} , 有界故收敛子列 $x_{n_{k_j}} \rightarrow x_0 \in [0, 1]$ 。等式

$$\int_{\frac{1}{n_{k_j}}}^{x_{n_{k_j}}} f(t)dt = \int_{x_{n_{k_j}}}^1 \frac{1}{f(t)}dt$$

两边取极限, $\frac{1}{n_{k_j}} \rightarrow 0$, 得

$$\int_0^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^1 \frac{1}{f(t)}dt.$$

由 c 的唯一性, $x_0 = c$ 。所有收敛子列极限都是 c , 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ 。

4. 有限区间 I , f 在 I 一致连续 $\iff$ 对任意 I 中 Cauchy 列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列

必要性 ($\Rightarrow$): f 一致连续: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $|x - y| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 。若 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 则 $\exists N$, 当 $m, n > N$, $|x_m - x_n| < \delta$, 于是 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列。

充分性 ($\Leftarrow$), 反证: 若 f 不一致连续, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 存在 $x_n, y_n \in I$, 满足 $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, 但 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ 。 I 有限区间, $\{x_n\}$ 有界, 取子列 $x_{n_k} \rightarrow t_0$ 。令

$$z_k = \begin{cases} x_{n_k}, & k \text{ 奇数}, \\ y_{n_k}, & k \text{ 偶数}. \end{cases}$$

$z_k \rightarrow t_0$, 故 $\{z_k\}$ 是 Cauchy 列。但是 $|f(z_{2k+1}) - f(z_{2k})| \geq \varepsilon_0$, $\{f(z_k)\}$ 不是 Cauchy 列, 矛盾。故 f 一致连续。

5. $f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$

(1) $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续

$|g(t, x)| = \left| \frac{\cos tx}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ 收敛。由 Weierstrass 判别法, 含参反常积分对 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛; 被积函数对 t 连续, 故 $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续。



$$(2) \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$f(t) = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cos tx \, dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$$(3) \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt \leq 0$$

交换积分次序:

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \left(\int_0^{\pi} \cos tx \sin t \, dt \right) dx.$$

积化和差:

$$\cos tx \sin t = \frac{1}{2} (\sin((x+1)t) - \sin((x-1)t)).$$

$$\int_0^{\pi} \cos tx \sin t \, dt = \frac{(-1)^x - 1}{x^2 - 1}.$$

当 $x > 1$, $x^2 - 1 > 0$, $(-1)^x - 1 \leq 0$, 内层积分 ≤ 0 。于是

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{(-1)^x - 1}{x^2 - 1} dx \leq 0.$$

(4) $f(t)$ 在 $(0, \pi)$ 至少一个零点

反证: 若 $f(t)$ 在 $(0, \pi)$ 无零点, 连续性推出 $f(t)$ 在 $(0, \pi)$ 恒正或恒负。若 $f(t) > 0$, 则 $f(t) \sin t > 0$, $\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt > 0$, 与 (3) 矛盾; 若 $f(t) < 0$, 同样得到积分 < 0 矛盾。故 $\exists \xi \in (0, \pi), f(\xi) = 0$ 。

线性代数

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \{B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AB = BA\}$, 求 $\dim V$ A 的特征多项式 $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 2$, 无重根, 故可对角化。与 A 可交换的矩阵都是 A 的多项式。

$$\dim V = 3.$$

2. $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 记 $D_n = \det A_n$, 递推关系 $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, 初值 $D_1 = 2, D_2 = 3$ 。

特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 二重根 $r = 1$ 。通解 $D_n = \alpha + \beta n$ 。代入初值得 $\alpha = 1, \beta = 1$ 。

$$\det A_n = n + 1.$$

逆矩阵 $A_n^{-1} = (b_{ij})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{i(n+1-j)}{n+1}, & i \leq j, \\ \frac{j(n+1-i)}{n+1}, & i > j. \end{cases}$$

3. 证明 $\text{rank}(AB - I_n) \leq \text{rank}(A - I_n) + \text{rank}(B - I_n)$ 分解

$$AB - I = A(B - I) + (A - I).$$

秩不等式 $\text{rank}(X + Y) \leq \text{rank} X + \text{rank} Y$, 又 $\text{rank}(A(B - I)) \leq \text{rank}(B - I)$,

$$\text{rank}(AB - I) \leq \text{rank}(A(B - I)) + \text{rank}(A - I) \leq \text{rank}(B - I) + \text{rank}(A - I).$$



4. A 线性变换, k 是满足 $\text{Im}A^k = \text{Im}A^{k+1}$ 的最小正整数。设线性变换 $\mathcal{A}$, k 是满足 $\text{Im}\mathcal{A}^k = \text{Im}\mathcal{A}^{k+1}$ 的最小正整数。极小多项式 $m(\lambda) = \lambda^k g(\lambda)$, $g(0) \neq 0$, 即极小多项式中因子 λ 的重数等于 k 。
5. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, A 是 $\mathbb{R}^3 \rightarrow V$ 的正交投影法向量 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 。线性变换 $\mathcal{A}$ 对应的矩阵

$$A = I - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

特征值: $\mathbf{1}$ (二重), $\mathbf{0}$ (一重)。

6. A, B 实对称正定, 证明 $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\det A \cdot \det B}$ 存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = I$ 。令 $\tilde{B} = C^T B C$, $\tilde{B}$ 正定。不等式等价于

$$\det\left(\frac{I + \tilde{B}}{2}\right) \geq \sqrt{\det \tilde{B}}.$$

设 $\tilde{B}$ 的特征值 $\lambda_i > 0$, 等价于

$$\prod_{i=1}^n \frac{1 + \lambda_i}{2} \geq \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}.$$

对每个 $\lambda > 0$, 均值不等式 $\frac{1 + \lambda}{2} \geq \sqrt{\lambda}$, 相乘即得。

实变函数

1. $A \subset \mathbb{R}^p, B \subset \mathbb{R}^q$ 可测, 则 $A \times B$ 可测, $m(A \times B) = m(A)m(B)$ 矩形的乘积是矩形, 测度乘积成立。
对一般可测集, 存在闭集 $F_k \subset A$, 开集 $G_k \supset A$, 满足 $m(G_k - F_k) \rightarrow 0$ 。 $F_k \times B \subset A \times B \subset G_k \times B$, $m((G_k - F_k) \times B) = m(G_k - F_k)m(B) \rightarrow 0$ 。 $F_k \times B$ 可测, 故 $A \times B$ 可测, $m(A \times B) = m(A)m(B)$ 。
2. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 可测, 则 $f(x - y)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上可测对任意实数 a ,

$$\{(x, y) : f(x - y) > a\} = T^{-1}(\{t : f(t) > a\}), \quad T(x, y) = x - y.$$

T 是连续线性映射, 可测集的原像可测, 故 $f(x - y)$ 可测。

3. $f \geq 0, f \in L(E)$, 证明 f 在 E 几乎处处有限记 $E_k = \{x \in E : f(x) \geq k\}$ 。

$$\int_E f \, dm \geq \int_{E_k} f \geq k \cdot m(E_k) \implies m(E_k) \leq \frac{1}{k} \|f\|_1.$$

$m(\{f = +\infty\}) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$ 。故 f 几乎处处有限。

4. Lusin 定理; 绝对连续 $f' = 0$ a.e. 推出 f 常数 Lusin 定理: 若 $f \in L(E)$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧支集连续函数 g_ε , 满足

$$\int_E |f - g_\varepsilon| \, dx < \varepsilon.$$

若 f 在 $[a, b]$ 绝对连续, 则牛顿-莱布尼茨公式成立:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt.$$

$f' = 0$ a.e., 故 $\int_a^x f'(t) \, dt = 0$, 于是 $f(x) \equiv f(a)$, 为常数。

复变函数



1. (1) $\int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$ 全部有限极点都在 $|z| < 4$ 内部。计算无穷远点留数:

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -1.$$

有限极点留数之和 $= -\text{Res}(f, \infty) = 1$ 。留数定理:

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

经典围道积分, Jordan 引理, 主值积分取虚部得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Schwarz 引理: $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 全纯, $f(0) = 0, |f(z)| \leq 1$, 则 $|f(z)| \leq |z|$; 等号当且仅当 $f(z) = e^{i\theta}z$ 。

条件: $f(0) = 0, \text{Re } f(z) \leq 1$ 。构造

$$g(z) = \frac{f(z)}{2 - f(z)}.$$

$\text{Re } w \leq 1$ 蕴含 $|g(z)| \leq 1$, 且 $g(0) = 0$ 。由 Schwarz 引理 $|g(z)| \leq |z|$,

$$\left| \frac{f(z)}{2 - f(z)} \right| \leq |z| \implies |f(z)| \leq |z|(2 + |f(z)|).$$

整理得到

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|}.$$

3. Rouché 定理: f, g 在简单闭曲线 C 内部全纯, 在 C 上 $|f(z)| > |g(z)|$, 则 f 与 $f + g$ 在 C 内部零点个数相同 (计重数)。

方程 $(z+1)e^{-z} = z+2$, 改写为 $(z+2) + (z+1)e^{-z} = 0$ 。取右半圆盘围道。在围道上, $\text{Re } z \geq 0$, $|z+2| > |(z+1)e^{-z}|$ 。 $H(z) = z+2$ 的零点 $z = -2$, 不在右半平面。Rouché 定理, 右半平面零点数为 0。

4. 亚纯函数定义: 在复平面除孤立极点外处处全纯。条件 $|f(z)| = 1, |z| = 1$ 。令 $g(z) = f(z)\overline{f(1/\bar{z})}$, 在单位圆周 $g(z) \equiv 1$, 由恒等定理 $g(z) \equiv 1$ 。若 z_0 是 f 的零点, 则 $1/\bar{z}_0$ 是极点; 零点极点都是有限个, 故 $f(z)$ 是有理函数。

近世代数

1. $\mathbb{F}_3[x]$ 分解 $x^3 + x + 2$ $x = 2$ 是根, $x^3 + x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$ 。 $-2 \equiv 1 \pmod{3}$, 二次不可约。

$$x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2 + 2x + 2).$$

2. 群

(1) $A, B, C \leq G, A \subset B \cup C$, 证明 $A \subset B$ 或 $A \subset C$

反证。若 $\exists a_1 \in A, a_1 \notin B \Rightarrow a_1 \in C$; $\exists a_2 \in A, a_2 \notin C \Rightarrow a_2 \in B$ 。 $a_1 a_2 \in A \subset B \cup C$ 。若 $a_1 a_2 \in B$, 则 $a_1 = (a_1 a_2) a_2^{-1} \in B$ 矛盾; 若 $a_1 a_2 \in C$, 则 $a_2 = a_1^{-1} (a_1 a_2) \in C$ 矛盾。故命题成立。

(2) $A, B \leq G, A \cup B$ 是子群 $\iff A \subset B$ 或 $B \subset A$

$\Leftarrow$: 显然。 $\Rightarrow$: 若 $A \not\subset B$, 由 (1) 得 $B \subset A$ 。

(3) 群不能写成两个真子群的并; 例子: Klein 四元群 $G = \{e, a, b, ab\}$ 。 $H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, ab\}, G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ 。



3. 正规子群定义: $N \leq G$, $\forall g \in G, gNg^{-1} = N$ 。指数 $[G : N] = 2$, 则左右陪集相等 $gN = Ng$, N 正规。例子: $G = S_3$, $H = \langle (12) \rangle$, 指数 3, 不是正规子群。

4. $GL_n(\mathbb{F}_p)$

(1) 阶:

$$|GL_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k) = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$

(2) Sylow p -子群: 幺幂上三角矩阵全体

$$U_n(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$



中国科学技术大学数学科学学院
2019 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 找定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数 $f(x, y)$, 使得下式两边均有意义, 但不相等:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, y) dy \neq \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) dy.$$

能否找到二元连续函数满足上述要求? 说明理由。

解: 构造

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & x = 0, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

计算积分:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \arctan \frac{1}{x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, y) dy &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

对任意 $y \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) = 0$, 于是

$$\int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) dy = \int_0^1 0 dy = 0.$$

$\frac{\pi}{2} \neq 0$, 满足条件。

不能取二元连续函数。若 $f(x, y)$ 在闭矩形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 二元连续, 则含参积分 $I(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) dy.$$

2. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) 有一阶连续偏导数, 存在常数 $C > 0$, 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \geq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

证明: 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, Jacobi 矩阵 $Df(\mathbf{x})$ 可逆。

证明: 反证。假设存在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\det Df(\mathbf{x}_0) = 0$, 则存在非零向量 $\mathbf{v}$, 使得 $Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} = 0$ 。由导数定义:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{v}) + o(t) = o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

于是 $|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)| = o(|t|)$ 。结合题设条件:

$$C\|\mathbf{v}\| \cdot |t| \leq |f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)| = o(|t|).$$

两边除以 $|t|$, 令 $t \rightarrow 0$, 得到 $C\|\mathbf{v}\| \leq 0$, 与 $C > 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 矛盾。故 $\det Df(\mathbf{x}) \neq 0$, $Df(\mathbf{x})$ 可逆。

3. 设二阶连续可导函数 $f(x, y)$ 满足

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

且 $f(1, 1) = f(1, -1) = f(-2, 0)$ 。证明: 当 $x^2 + y^2 \leq 1$ 时,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2019.$$



证明: 任取 $Q = (x, y)$ 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$ 。对三点 $P_1 = (1, 1), P_2 = (1, -1), P_3 = (-2, 0)$, 做二阶泰勒展开:

$$f(P_i) - f(Q) = \nabla f(Q) \cdot (P_i - Q) + \frac{1}{2}(P_i - Q)^T H(\xi_i)(P_i - Q).$$

记 $b_i = \frac{1}{2}(P_i - Q)^T H(\xi_i)(P_i - Q)$ 。对任意二维向量 $\mathbf{u}$,

$$|\mathbf{u}^T H \mathbf{u}| \leq |f_{xx}|u_1^2 + 2|f_{xy}|u_1 u_2 + |f_{yy}|u_2^2 \leq 2\|\mathbf{u}\|^2,$$

于是 $|b_i| \leq \|P_i - Q\|^2$ 。由 $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)$,

$$\begin{cases} \nabla f(Q) \cdot (P_1 - P_2) = b_2 - b_1, \\ \nabla f(Q) \cdot (P_1 - P_3) = b_3 - b_1, \end{cases} \implies \begin{cases} 2f_y(Q) = b_2 - b_1, \\ 3f_x(Q) + f_y(Q) = b_3 - b_1. \end{cases}$$

$|b_i|$ 有界, 故 $|f_y(Q)|$ 、 $|f_x(Q)|$ 均有界, 远小于 2019。证毕。

4. 设函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛; 且对任意 $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 收敛。判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上是否一致收敛, 并给出理由。

解: 不一定, 举反例。

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

每个点 $x > 0$ 只落在有限个区间, 故 $\sum |f_n(x)|$ 逐点收敛; $\sum f_n(x)$ 一致收敛。但是余项

$$\sup_{x \in [0, 1]} \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(x)| \geq f_N\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \not\rightarrow 0,$$

因此 $\sum |f_n(x)|$ 不一致收敛。

线性代数 (满分 80 分)

1. 二次曲面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 2z - 1 = 0.$$

利用正交变换和平移化为标准方程, 判断曲面类型。

二次部分矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

特征多项式 $\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - \frac{3}{2})^2$, 特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$ 。正交变换 $X = QY$, 二次型化为 $\frac{3}{2}y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2$ 。 $\lambda = 0$ 的单位特征向量 $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$, 变换后一次项为 $-\frac{2}{\sqrt{3}}y_1$ 。

$$\frac{3}{2}y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}y_1 - 1 = 0.$$

对 y_1 配方:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_2' = y_2, \quad y_3' = y_3, \\ y_1' &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(y_2'^2 + y_3'^2). \end{aligned}$$

该曲面为椭圆抛物面。



2. 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, 复线性映射 $\varphi: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $\varphi(X) = AX - XA$ 。计算 φ 的特征多项式、特征向量, 判断 φ 是否可对角化。

解: 记 $A = 7I + N$, 其中 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\varphi(X) = (7I + N)X - X(7I + N) = NX - XN.$$

N 的特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$ 。若 $Nu = \lambda u$, $Nv = \mu v$, 则 $\varphi(uv^T) = (\lambda - \mu)uv^T$ 。 φ 的特征值: $0, 0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$ 。特征多项式:

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2\sqrt{2})(\lambda + 2\sqrt{2}).$$

记 u_1 为 N 属于 $\sqrt{2}$ 的特征向量, u_2 属于 $-\sqrt{2}$ 。

- $\lambda = 2\sqrt{2}$: $u_1 u_2^T$;
- $\lambda = -2\sqrt{2}$: $u_2 u_1^T$;
- $\lambda = 0$: $u_1 u_1^T, u_2 u_2^T$.

一共有 4 个线性无关的特征向量, φ 可以对角化。

3. $\mathbb{R}^4$ 向量组

$$S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 1, 1), \alpha_3 = (2, 1, 1, 0), \alpha_4 = (3, 3, 2, 1), \alpha_5 = (1, -1, 1, 1)\}.$$

求 S 中包含向量 α_2 的所有极大线性无关组。

解: 将向量作为列做初等行变换:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

秩 $r = 3$, 线性关系:

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3, \quad \alpha_5 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2.$$

包含 α_2 的全部极大无关组:

$$\{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}, \quad \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5\}.$$

4. 设 n 阶复方阵 A, B 乘法可交换, $AB = BA$ 。证明: 存在可逆复方阵 P , 使得 PAP^{-1} 和 PBP^{-1} 同时为上三角矩阵。

证明 (数学归纳法): $n = 1$, 显然成立。假设 $n - 1$ 阶命题成立。由 $AB = BA$, 取 A 的特征子空间 $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, 则 V_λ 是 B 的不变子空间。在 V_λ 中取 B 的特征向量 v , 则 v 是 A, B 的公共特征向量。将 v 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 记可逆矩阵 P_1 以该组基作为列, 则

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

A_1, B_1 是 $n-1$ 阶方阵, 且 $A_1B_1 = B_1A_1$ 。由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 Q , 使得 QA_1Q^{-1}, QB_1Q^{-1} 同时上三角。令

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad P = P_1P_2,$$

则 PAP^{-1} 与 PBP^{-1} 同时上三角。归纳完成。



实变函数 (满分 40 分)

1. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上可测函数列, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. $1 \leq q < p < +\infty$, 且 $\|f_n\|_{L^p[0,1]}$ 有界。证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^q dx = 0.$$

证明: 由 Fatou 引理, $f \in L^q[0, 1]$ 。记 $g_n = |f_n - f|^q$, $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$ 。由 Hölder 不等式:

$$\int_0^1 |f_n - f|^q dx \leq \|f_n - f\|_{L^p}^q \cdot m([0, 1])^{\frac{p-q}{p}}.$$

$\|f_n\|_{L^p}$ 一致有界, 故积分一致有界。 $\forall \varepsilon > 0$, 由 Egorov 定理, 存在可测集 $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$, 在 $[0, 1] \setminus E_\varepsilon$ 上 g_n 一致收敛于 0。

$$\int_0^1 g_n = \int_{[0,1] \setminus E_\varepsilon} g_n + \int_{E_\varepsilon} g_n.$$

第一项当 n 充分大可以小于 ε ; 第二项用 Hölder 估计可以通过取 ε 充分小任意小。故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^q dx = 0$ 。

2. 设 $E \subset \mathbb{R}$, 外测度 $m^*(E) > 0$ 。求证: 对任意 $\alpha \in (0, 1)$, 存在开区间 I , 满足

$$m^*(I \cap E) \geq \alpha m(I).$$

证明: 反证。假设对一切开区间 I , 都有 $m^*(I \cap E) < \alpha m(I)$ 。由外测度定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, $m(G) < m^*(E) + \varepsilon$ 。将 G 写为可数不交开区间之并 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 。

$$m^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E \cap I_k) < \alpha \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \alpha m(G).$$

于是 $m^*(E) < \alpha(m^*(E) + \varepsilon)$ 。令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到 $m^*(E) \leq \alpha m^*(E)$ 。因为 $m^*(E) > 0$, $\alpha < 1$, 矛盾。故必存在满足条件的开区间 I 。

复变函数 (满分 40 分)

1. 判断方程 $z^4 - 8z - 10 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 3$ 内根的个数。

解: Rouché 定理。 圆周 $|z| = 3$: 令 $f(z) = z^4$, $g(z) = -8z - 10$ 。 $|f(z)| = 81$, $|g(z)| \leq 8 \cdot 3 + 10 = 34 < 81$ 。 $f(z)$ 在 $|z| < 3$ 有 4 个零点, 故 $z^4 - 8z - 10$ 在 $|z| < 3$ 有 4 个零点。

圆周 $|z| = 1$: 令 $F(z) = -8z - 10$, $G(z) = z^4$ 。 $|F(z)| \geq 10 - 8 = 2 > |G(z)| = 1$ 。 $F(z) = 0$ 的根 $z = -\frac{10}{8}$, 模大于 1, 故 $|z| < 1$ 内零点个数为 0。

圆环 $1 < |z| < 3$ 内零点个数: $4 - 0 = 4$ 。

2. 设 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, $|f(z)| = 1, \forall |z| = 1$ 。证明: $f(z)$ 可解析延拓为有理函数。

证明: 定义对称延拓: $f^*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, $|z| > 1$ 。当 $|z| = 1$, $\frac{1}{\bar{z}} = z$, $|f(z)| = 1$, $\overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}$, 故圆周上 $f(z) = \frac{1}{f^*(z)}$ 。构造

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| < 1, \\ \frac{1}{f^*(z)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

由解析延拓原理, $F(z)$ 在扩充复平面亚纯。扩充复平面上亚纯函数等价于有理函数。证毕。

微分几何 (满分 40 分)



1. 区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(D)$, 曲面

$$S : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, f(x_1, x_2)).$$

(1) 求曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式。

(2) 极小曲面条件:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

证明: 该条件下曲面为极小曲面 (平均曲率 $H = 0$) 。

(1)

$$\mathbf{r}_{x_1} = (1, 0, f_1), \quad \mathbf{r}_{x_2} = (0, 1, f_2).$$

第一基本形式系数:

$$E = 1 + f_1^2, \quad F = f_1 f_2, \quad G = 1 + f_2^2.$$

$$I = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2.$$

单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{(-f_1, -f_2, 1)}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}.$$

$$L = \frac{f_{11}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad M = \frac{f_{12}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad N = \frac{f_{22}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

$$II = L dx_1^2 + 2M dx_1 dx_2 + N dx_2^2.$$

(2) 平均曲率公式

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

$EG - F^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2$ 。将题给条件求导展开, 分子恰好为 $EN - 2FM + GL$ 。条件等价于 $EN - 2FM + GL = 0$, 于是 $H = 0$, 曲面为极小曲面。

2. (1) 二维平面 $\mathbb{R}^2$ 与三维单位球面 S^2 是否等距同构? 说明理由。

(2) 测地线是否必为最短曲线? 说明理由。

解: (1) 不等距。高斯绝妙定理: 高斯曲率是内蕴不变量。平面高斯曲率 $K \equiv 0$; 单位球面 $K \equiv 1$ 。曲率不同, 不可能等距。

(2) 不一定。局部上, 充分靠近两点之间, 测地线是最短; 全局不成立。例如球面上, 同一条大圆弧上两点, 长的那一段大圆弧是测地线, 但不是最短曲线。

近世代数 (满分 40 分)

1. 设 S_4 中置换 $(12)(34)$ 所在的共轭类为 C , 求 C 中元素在共轭作用下的稳定子群。

解: $C = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $|C| = 3$ 。稳定子群 $G = \{g \in S_4 \mid g(12)(34)g^{-1} = (12)(34)\}$ 。
 $|G| = \frac{|S_4|}{|C|} = 8$ 。 G 由保持二元子集 $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ 或者交换这两个二元子集的置换构成, $G = \langle (12), (34), (13)(24) \rangle$, 同构于 8 阶二面体群 D_4 。

2. $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 。判断环 $\mathbb{F}_2[t]/(t^2)$, $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + \bar{1})$, $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + \bar{1})$ 之间的环同构关系。

解:

(1) $\mathbb{F}_2[t]/(t^2)$: 含有非零幂零元 t 。

(2) $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + 1) = \mathbb{F}_2[t]/((t+1)^2)$, 含有非零幂零元 $t+1$ 。做替换 $u = t+1$, 得到 $\mathbb{F}_2[u]/(u^2)$, 故

$$\mathbb{F}_2[t]/(t^2) \cong \mathbb{F}_2[t]/(t^2 + \bar{1}).$$



(3) $t^2 + t + 1$ 在 $\mathbb{F}_2$ 不可约, $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + \bar{1}) \cong \mathbb{F}_4$, 有限域, 无不为零的幂零元, 故与上面两个环不同构。

综上: $\mathbb{F}_2[t]/(t^2) \cong \mathbb{F}_2[t]/(t^2 + \bar{1})$; $\mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + \bar{1})$ 和另外两个环不同构。



中国科学技术大学数学科学学院
2021 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 判断开区间 $(0, 1)$ 上的有界凸函数是否在 $(0, 1)$ 上一致连续。正确则证明, 错误举反例。

结论: 是, $(0, 1)$ 上有界凸函数必一致连续。

证明. 凸函数在开区间 $(0, 1)$ 内处处存在左右导数, 且单侧导数单调递增。记 $M = \sup_{x \in (0, 1)} |f(x)| < +\infty$ 。凸函数满足对任意 $0 < x < y < z < 1$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

由有界性, 可推导出全体单侧导数有界, 存在常数 $L > 0$, 使得

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in (0, 1).$$

Lipschitz 条件蕴含一致连续。

注: 无界凸函数可以不一致连续, 例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$, 凸、无界, 不一致连续。本题附加有界条件保证一致连续。 $\square$

2. 设

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n! \pi x) \text{ 收敛} \right\}.$$

证明: Ω 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 而且 $\Omega \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

证明. 1. 稠密性: $\mathbb{Q} \subset \Omega$ 。若 $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, 当 $n \geq q$, $n!x$ 为整数, $\sin(n! \pi x) = 0$ 。级数从某一项开始恒为 0, 故级数收敛。 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 稠密, 因此 Ω 稠密。

2. 构造无理数 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}$, x 为无理数。

$$n! \pi x = n! \pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k!)^2} + n! \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} = A_n + \delta_n,$$

A_n 是 π 的整数倍, $0 < \delta_n \leq \frac{2\pi}{(n+1)!}$ 。 $\sin(n! \pi x) = \sin \delta_n \sim \delta_n$, $\sum \delta_n$ 收敛, 故 $\sum \sin(n! \pi x)$ 收敛。于是 $x \in \Omega$ 且 x 无理, $\Omega \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ 。 $\square$

3. 设函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 并且 f' 在 $[0, 1]$ 上恒不为 1, 若 $f(0) = f(1) > 1$ 且

$$f(1) + \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} - n f(1).$$

证明. 由达布定理, f' 不能变号, 只能处处 $f'(x) > 1$ 或处处 $f'(x) < 1$ 。若 $f'(x) > 1$, 则 $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt > 1$, 与 $f(0) = f(1)$ 矛盾。故 $f'(x) < 1, \forall x \in [0, 1]$ 。

令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$, g 严格递减。

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = -f(1) - \frac{1}{2}.$$



$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{n-1}{2}.$$

g 严格递减, 黎曼和下界:

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > n \int_0^1 g(x) dx = n \left(-f(1) - \frac{1}{2} \right).$$

代入:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > n \left(-f(1) - \frac{1}{2} \right) + \frac{n-1}{2} = -nf(1) - \frac{1}{2}.$$

证毕。 □

4. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$F(t) = \int_0^t \left[\int_0^t f(xy) dx \right] dy.$$

证明: $tF''(t) + F'(t) - 4tf(t^2)$ 恒为常数。

证明. 对内层积分做变量替换 $u = xy$, $x = \frac{u}{y}$, $dx = \frac{du}{y}$:

$$\int_0^t f(xy) dx = \frac{1}{y} \int_0^{ty} f(u) du, \quad F(t) = \int_0^t \frac{1}{y} \left(\int_0^{ty} f(u) du \right) dy.$$

莱布尼茨求导:

$$F'(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t^2} f(u) du + \int_0^t f(ty) dy = \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(u) du.$$

$$F''(t) = -\frac{2}{t^2} \int_0^{t^2} f(u) du + 4f(t^2).$$

代入表达式:

$$\begin{aligned} tF''(t) + F'(t) - 4tf(t^2) &= t \left(-\frac{2}{t^2} \int_0^{t^2} f(u) du + 4f(t^2) \right) + \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(u) du - 4tf(t^2) \\ &= -\frac{2}{t} \int_0^{t^2} f + 4tf(t^2) + \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f - 4tf(t^2) \equiv 0. \end{aligned}$$

恒等于 0, 是常数。 □

线性代数 (满分 80 分)

1. 设给定二次曲面在直角坐标系下的方程为 $xy + xz - yz + 2x - z + 1 = 0$ 。请利用正交变换以及平移将其化为标准方程, 并判断这是什么类型的曲面。

二次型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

特征多项式 $\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$, 特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ 。正交变换 $X = QY$, 二次部分化为 $y_1^2 - y_2^2$ 。原方程化为 $y_1^2 - y_2^2 + \mathbf{b}^T Y + 1 = 0$, 平移配方消去一次项, 得到标准形式

$$y_1'^2 - y_2'^2 + cy_3' = 0.$$

曲面类型: 双曲抛物面 (马鞍面)。

2. 设 $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。试证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})}$ 存在, 并且计算该极限值。这里 tr 表示矩阵的迹。



证明. 特征多项式 $\det(\lambda I - X) = \lambda^2 - \lambda - 3 = 0$, 特征根

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}.$$

$$|\lambda_2| < |\lambda_1|. \quad \text{tr}(X^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n.$$

$$\frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})} = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1}} = \frac{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}{\lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}.$$

$n \rightarrow \infty$, $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, 该项趋于 0。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(X^n)}{\text{tr}(X^{n+1})} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13} - 1}{6}.$$

极限存在, 值为 $\frac{\sqrt{13} - 1}{6}$ 。 □

3. 设 $M_2(\mathbb{R})$ 为全体 2×2 实方阵的实线性空间。对于任意 $A \in M_2(\mathbb{R})$, 定义线性函数 $\varphi_A : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \text{tr}(AX)$. 设 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, 若 $\varphi_A = \varphi_B$, 证明: $A = B$.

证明. 条件等价于: $\forall X \in M_2(\mathbb{R}), \text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$, 即 $\text{tr}((A - B)X) = 0$ 对一切二阶实方阵 X 。

记 $C = A - B$, 则 $\forall X, \text{tr}(CX) = 0$ 。依次取矩阵单位 $X = E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 可得 C 的全部元素为 0, $C = 0$, 故 $A = B$ 。 □

4. 设 X, Y 为两个 n 阶正定对称实方阵, 证明: $\det(X + Y) > \det(X)$.

证明. X 正定, 故可逆。

$$\det(X + Y) = \det X \cdot \det(I + X^{-1/2}YX^{-1/2}).$$

记 $Z = X^{-1/2}YX^{-1/2}$, Z 正定, 特征值 $\lambda_i > 0$ 。

$$\det(I + Z) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) > \prod_{i=1}^n 1 = 1.$$

因此

$$\det(X + Y) = \det X \cdot \det(I + Z) > \det(X).$$

□

实变函数 (满分 40 分)

1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + |x|} f(x - n) dx.$$

证明. 变量替换 $t = x - n$, $x = t + n$, $dx = dt$:

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{t + n}{1 + |t + n|} f(t) dt.$$

对固定 t , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t + n}{1 + |t + n|} = 1$, 且

$$\left| \frac{t + n}{1 + |t + n|} f(t) \right| \leq |f(t)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

由控制收敛定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt.$$

□



2. 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ 。证明:

(a) 积分 $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$ 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$ 存在, 且 $h \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

证明. 考虑二重积分 $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)|dtdx$, 由 Fubini 定理交换积分次序:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)|dtdx = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|dx \right) dt = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(t)|dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

被积函数绝对可积, 故对几乎所有 x , $\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)|dt < +\infty$, $h(x)$ a.e. 有限.

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|dx \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)g(t)|dtdx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

于是 $h \in L^1(\mathbb{R})$, 且 $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ 。

□

复变函数 (满分 40 分)

1. 用留数法计算积分

$$\int_0^\pi \frac{1}{5+3\cos\theta} d\theta.$$

证明.

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}.$$

令 $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ 。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+3\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{(3z^2+10z+3)} \frac{dz}{i}.$$

分母零点 $z = -3$, $z = -\frac{1}{3}$, 单位圆内极点 $z = -\frac{1}{3}$ 。

$$\text{Res} \left(\frac{1}{3z^2+10z+3}, -\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{8}.$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2+10z+3} = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi i}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

□

2. 设 $f(z)$ 是整函数, 满足: 只要 $|z_n| \rightarrow \infty$ 就有 $|f(z_n)| \rightarrow \infty$ 。证明: $f(z)$ 是多项式。

证明. 反证. 若 $f(z)$ 不是多项式, 则 $f(z)$ 是超越整函数. $g(z) = f(1/z)$ 在 $z = 0$ 为本性奇点. 由 Casorati-Weierstrass 定理, 存在序列 $w_n \rightarrow 0$, 使得 $g(w_n)$ 有界. 令 $z_n = 1/w_n$, 则 $|z_n| \rightarrow \infty$, 但 $f(z_n) = g(w_n)$ 有界, 与题设条件矛盾. 故 $f(z)$ 必为多项式。

□

微分几何 (满分 40 分)

1. 将欧氏空间 $\mathbb{E}^3$ 中 xz -平面上的圆

$$S_r(a) = \{(x, y, z) \mid (x-a)^2 + z^2 = r^2, y=0\}$$

绕 z -轴旋转一周生成环面, 记为 $\mathbb{T}_{a,r}$, 其中 $a > r > 0$ 。



- (a) 请写出 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的参数表示, 并计算 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的第一、第二基本形式。
 (b) 计算 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的面积和高斯曲率, 并找出 $\mathbb{T}_{a,r}$ 的椭圆点和双曲点的区域。
 (c) 计算点 $(a, 0, r)$ 绕 z 轴生成的圆在 $\mathbb{T}_{a,r}$ 上的测地曲率, 并判断其是否为测地线。

(1) 参数表示, $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = ((a + r \cos \theta) \cos \varphi, (a + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta).$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad \mathbf{r}_\varphi = (-(a + r \cos \theta) \sin \varphi, (a + r \cos \theta) \cos \varphi, 0).$$

第一基本形式系数:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r \cos \theta)^2.$$

$$I = r^2 d\theta^2 + (a + r \cos \theta)^2 d\varphi^2.$$

法向量 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi|}$, $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = r(a + r \cos \theta)$ 。第二基本形式系数:

$$L = -r, \quad M = 0, \quad N = -(a + r \cos \theta) \cos \theta.$$

$$II = -r d\theta^2 - (a + r \cos \theta) \cos \theta d\varphi^2.$$

(2) 面积

$$A = \iint \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r \cos \theta) d\theta d\varphi = 4\pi^2 ar.$$

高斯曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\cos \theta}{a + r \cos \theta}.$$

- $|\theta| < \frac{\pi}{2}, \cos \theta > 0$: $K > 0$, 椭圆点; - $|\theta| > \frac{\pi}{2}, \cos \theta < 0$: $K < 0$, 双曲点; - $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, K = 0$, 抛物点。

(3) 点 $(a, 0, r)$ 对应参数 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 该圆周曲线测地曲率 $\kappa_g = \frac{1}{r} \neq 0$, 不是测地线。

2. 请判断如下结论是否正确, 并说明理由。

(a) 设 $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ 是 $\mathbb{E}^3$ 中曲面 Σ_1, Σ_2 间的光滑映射, 且在对应点处具有相同的高斯曲率, 即

$$K_{\sigma_1}(p) = K_{\sigma_2}(f(p)), \quad \forall p \in \Sigma_1,$$

则 Σ_1 与 Σ_2 局部等距。

(b) 设 Σ 是 $\mathbb{E}^3$ 中具有正高斯曲率的紧致连通曲面, γ_1, γ_2 为 Σ 上两条简单闭测地线, 则 γ_1, γ_2 会相交。

(1) **错误**。高斯曲率相等只是点态不变量, 映射必须保持第一基本形式才是局部等距。反例: 平面与圆柱面高斯曲率恒为 0, 存在光滑映射保持高斯曲率, 但不是局部等距。

(2) **正确**。紧致连通、正高斯曲率的曲面微分同胚于球面。反证: 假设两条简单闭测地线互不相交, 则球面被两条互不相交简单闭曲线分割, 应用高斯-博内公式, $\iint_D K > 0$, 与区域欧拉示性数矛盾, 故必相交。

近世代数 (满分 40 分)

1. 考虑交错群 A_4 , 以及元素 (123) 所在的共轭类 C 。考虑 A_4 在 C 上的共轭作用

$$A_4 \times C \rightarrow C, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}.$$

$x \in C$ 的稳定化子定义为

$$\text{Stab}(x) = \{g \in A_4 \mid g \cdot x = x\}.$$



试具体计算 (123) 的稳定化子, 并列出具 C 中的所有元素。

A_4 中 3- 轮换共轭类 $C = \{(123), (142), (134), (243)\}$, $|C| = 4$ 。轨道 - 稳定子公式: $|\text{Stab}((123))| = \frac{|A_4|}{|C|} = \frac{12}{4} = 3$ 。

$$\text{Stab}((123)) = \{e, (123), (132)\}.$$

2. 考虑三元域 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, 以及一元多项式环 $\mathbb{F}_3[t]$, 其中 t 为变元, 考虑商环 $K = \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1)$ 。问: K 是否为整环? 请具体列出 K 的所有含单位元的子环。

$\mathbb{F}_3[t]$ 中 $t^2 + 1$ 无零点, 是不可约多项式。 $K = \mathbb{F}_3[t]/(t^2 + 1) \cong \mathbb{F}_9$, 是有限域。域一定是整环, 故 K 是整环。

域的含单位元子环必为子域, $\mathbb{F}_9$ 的子域只有 $\mathbb{F}_3$ 和自身。全部含单位元子环:

$$\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}, \quad K = \mathbb{F}_9.$$



中国科学技术大学数学科学学院
2022 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. (20 分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的可微函数, 满足对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $0 < f(x) < 1$ 且 $f'(x) \neq 1$ 。证明: 存在唯一的 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

证明: 令 $g(x) = f(x) - x$ 。

$$g(0) = f(0) > 0, \quad g(1) = f(1) - 1 < 0.$$

由连续函数介值定理, $\exists \xi \in (0, 1)$, $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$, 存在性得证。

反证唯一性: 若存在两点 $\xi_1 < \xi_2$ 满足 $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$ 。由罗尔定理, $\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得

$$g'(\eta) = f'(\eta) - 1 = 0 \implies f'(\eta) = 1,$$

与条件 $f'(x) \neq 1$ 矛盾。故 ξ 唯一。

2. (20 分) 计算定积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$$

解:

$$\sqrt{\cos x - \cos^3 x} = \sqrt{\cos x(1 - \cos^2 x)} = \sqrt{\cos x} |\sin x|.$$

被积函数是偶函数,

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx.$$

令 $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$,

$$I = 2 \int_1^0 \sqrt{u}(-du) = 2 \int_0^1 u^{1/2} du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

3. (20 分) 记圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 被平面 $z = a$ 和 $z = b$ ($0 < a < b$) 所夹的部分为 Σ , 假设 Σ 具有均匀密度 1。求 Σ 对原点处单位质点的引力沿 z 轴方向的分量。

解: 引力 z 分量

$$F_z = G \iint_{\Sigma} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dS.$$

锥面取 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z_x = \frac{x}{z}$, $z_y = \frac{y}{z}$,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $a \leq r \leq b$, $z = r$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2r^2$ 。

$$\begin{aligned} F_z &= G \iint_{a \leq r \leq b} \frac{r}{(2r^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{2} r dr d\theta = G \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \frac{r^2}{2^{3/2} r^3} dr. \\ &= 2\pi G \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int_a^b \frac{1}{r} dr = 2\pi G \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

4. (20 分) 若 $\mathbb{R}^2$ 上定义的二元函数 $f(x, y)$ 分别是单变量 x 及 y 的连续函数。

(a) 判断 $f(x, y)$ 是否为二元连续函数, 证明或举出反例说明结论。

(b) 若进一步假设对任意固定的 x , $f(x, y)$ 是 y 的单调函数, 证明: $f(x, y)$ 是二元连续函数。



(1) 不一定二元连续。反例:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

固定 x , f 关于 y 连续; 固定 y , f 关于 x 连续。沿 $y = x$ 趋于 $(0, 0)$, $f(x, x) = \frac{1}{2}$, 极限不等于 $f(0, 0) = 0$, 在原点不二元连续。

(2) 证明: 任取 $(x_0, y_0), \forall \varepsilon > 0$ 。 $f(x, y_0)$ 在 x_0 连续, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1, |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ 。不妨设 $y \mapsto f(x, y)$ 单调递增。由 $y \mapsto f(x_0, y)$ 在 y_0 连续, 可取 $\delta_2 > 0$, 当 $|y - y_0| < \delta_2$,

$$|f(x_0, y_0 \pm \delta_2) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

对 $|y - y_0| < \delta_2$, 单调性给出

$$f(x, y_0 - \delta_2) \leq f(x, y) \leq f(x, y_0 + \delta_2).$$

$f(\cdot, y_0 \pm \delta_2)$ 在 x_0 连续, 缩小 δ , 当 $|x - x_0| < \delta$,

$$f(x_0, y_0 - \delta_2) - \varepsilon < f(x, y_0 - \delta_2), \quad f(x, y_0 + \delta_2) < f(x_0, y_0 + \delta_2) + \varepsilon.$$

合并得 $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 3\varepsilon$ 。故二元连续。

线性代数 (满分 80 分)

1. (20 分) 设二次曲面

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xz = 0\}.$$

求 S 中包含的线性子空间的最大维数, 并给出一个达到该维数的子空间。

解: 二次型矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

特征方程

$$\det(\lambda I - Q) = (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 4) = 0,$$

特征值: $4, 0, -1$ 。正惯性指数 1, 负惯性指数 1, 零特征 1。实二次锥 $\mathbf{v}^T Q \mathbf{v} = 0$ 包含线性子空间最大维数为 **2**。例子: $U = \text{span}\{(1, 0, 1)^T + (0, 1, 0)^T, (1, 0, -1)^T\}$ 。

2. (20 分) 设 $\mathfrak{sl}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ 为迹零矩阵构成的线性空间, 定义对称双线性型

$$Q: \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(AB).$$

求 Q 的正惯性指数与负惯性指数。

解: $\dim \mathfrak{sl}_n = n^2 - 1$ 。非对角元 E_{ij} ($i \neq j$) 共 $n(n-1)$ 个; 对角迹零基 $H_i = E_{ii} - E_{nn}$ $i = 1, \dots, n-1$ 。每一对 $i < j$, 构造 X_{ij}, Y_{ij} , 贡献 1 个正、1 个负方向, 共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个正, $\frac{n(n-1)}{2}$ 个负。对角子空间维数 $n-1$, Q 在其上正定。

正惯性指数:

$$p = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

负惯性指数:

$$q = \frac{n(n-1)}{2}.$$



3. (20 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 满足对任意多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 矩阵 $I_n - f(A)A$ 均可逆。证明: A 是幂零矩阵。

证明: 反证。若 A 不是幂零, 则存在特征值 $\lambda \neq 0$ (实或复)。取多项式 f 满足 $f(\lambda) = \lambda^{-1}$, 则 $I - Af(A)$ 有特征值 $1 - \lambda f(\lambda) = 0$, 故 $I - Af(A)$ 不可逆, 矛盾。于是 A 的所有特征值全为 0, 实矩阵特征全为 0, 则 A 幂零。

4. (20 分) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 若对任意复数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及正整数 m , 矩阵 $(\lambda I_n - A)^m$ 与 $(\lambda I_n - B)^m$ 的秩相等。证明: A 与 B 在 $\mathbb{R}$ 上相似。

证明:

$$\dim \ker(\lambda I - A)^m = n - \text{rank}(\lambda I - A)^m$$

条件说明对每个特征值, 各阶广义特征子空间维数相等, 故 A, B 在复数域上 Jordan 标准型完全相同, 即 $\mathbb{C}$ 上相似。实矩阵若在复数域相似, 则必在实数域相似。故 A, B 在 $\mathbb{R}$ 上相似。

实变函数 (满分 40 分)

1. (10 分) 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在任意区间上绝对连续, 证明: f 将任意 Lebesgue 零测集映射为 Lebesgue 零测集。

证明: 设 E 为零测集。对任意 $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ 。 f 在 $[-N, N]$ 绝对连续, 绝对连续函数把零测集映为零测集, 故 $m(f(E_N)) = 0$ 。

$$f(E) = \bigcup_{N=1}^{\infty} f(E_N),$$

可数个零测集的并仍为零测集, 故 $m(f(E)) = 0$ 。

2. (10 分) 证明: 若点集 $A \subset [0, 1]$ 满足 $m^*(A) + m^*([0, 1] \setminus A) = 1$, 则 A 可测。其中 m^* 表示 Lebesgue 外测度。

证明: 取 G_δ 集 $G \supset A$, $m(G) = m^*(A)$; 取 G_δ 集 $H \supset [0, 1] \setminus A$, $m(H) = m^*([0, 1] \setminus A)$ 。 $G \cup H \supset [0, 1]$, 于是

$$1 \leq m(G \cup H) \leq m(G) + m(H) = 1,$$

故 $m(G \cup H) = 1$, $m(G \cap H) = 0$ 。 $G \setminus H \subset A \subset G$, A 与可测集 $G \setminus H$ 相差零测集, 因此 A 可测。

3. (20 分) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 且存在 $r > 0$ 及常数 M 使得对任意 k , 有

$$\int_a^b |f_n(x)|^r dx \leq M.$$

(a) 证明: 对任意 $0 < p < r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0$ 。

(b) 若将区间 $[a, b]$ 改为 $\mathbb{R}$, 判断上述结论是否仍成立。

(1) 证明: 由 Fatou 引理, $\int_a^b |f|^r dx \leq M$ 。对 $\forall \varepsilon > 0$, 拆分积分

$$\int |f_n - f|^p = \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} |f_n - f|^p + \int_{\{|f_n - f| \leq \delta\}} |f_n - f|^p.$$

第二项 $\leq \delta^p(b - a)$, 取 δ 足够小可控制。Hölder 不等式:

$$\int |f_n - f|^p \chi_{\{|f_n - f| > \delta\}} \leq \left(\int |f_n - f|^r \right)^{p/r} \cdot m(\{|f_n - f| > \delta\})^{\frac{r-p}{r}}.$$

由 Egorov 定理, 除去小测度集, f_n 一致收敛于 f ; L^r 范数一致有界, 故第一项可以任意小。积分趋于 0。

(2) 不成立。 反例: $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ 。几乎处处收敛到 0, $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^r = 1 \leq M$, 但 $\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0|^p = 1$, 不趋于 0。



复变函数 (满分 40 分)

1. (15 分) 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$ 的收敛域为右半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, 且对任意 $\varepsilon > 0$, 该级数在区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}$ 上一致收敛。

证明: 记 $z = x + iy$, $|e^{-n^2 z}| = e^{-n^2 x}$ 。若 $x \geq \varepsilon > 0$, $|e^{-n^2 z}| \leq e^{-n^2 \varepsilon}$, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \varepsilon}$ 收敛。由 M 判别法, 在 $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon$ 一致收敛。 $x < 0$, $n \rightarrow \infty$, $e^{-n^2 x} \rightarrow +\infty$, 通项不趋于 0, 发散。 $x = 0$, $|e^{-n^2 iy}| = 1$, 通项模不为 0, 发散。收敛域: $\operatorname{Re} z > 0$ 。

2. (15 分) 利用留数定理计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx.$$

解:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 + 1} dx.$$

$z^4 + 1 = 0$ 上半平面极点 $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$ 。

$$\operatorname{Res}_{z_k} \frac{e^{iz}}{z^4 + 1} = \frac{e^{iz_k}}{4z_k^3}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 + 1} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z_1} + \operatorname{Res}_{z_2}).$$

计算得到

$$I = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. (10 分) 证明或否定: 对每个正整数 n , 存在整函数 $f_n(z)$, 使得

$$\max_{1 \leq |z| \leq 2} |\operatorname{Re} f_n(z) - \ln |z|| < \frac{1}{n}.$$

答: 不存在。 $u_n = \operatorname{Re} f_n(z)$ 是全平面调和函数。在圆环 $1 \leq |z| \leq 2$, u_n 一致收敛于调和函数 $\ln |z|$ 。由最大值原理, 圆盘 $|z| < 1$ 内 u_n 内闭一致收敛到调和函数 u , 边界 $|z| = 1$ 上 $\ln |z| = 0$, 故 $u \equiv 0$ 。但是 $\ln |z|$ 在 $z = 0$ 处有对数奇点, u_n 在 $z = 0$ 调和, 矛盾。故不存在。

微分几何 (满分 40 分)

1. (10 分) 设 S 为正则光滑曲面, P 为其上一点。记 $k_n(\theta)$ 为点 P 处沿方向 θ (这里 $\theta \in [0, 2\pi)$ 为与主方向的夹角) 的法曲率, 并记 H 为曲面 S 在点 P 处的平均曲率。假定 $H \neq 0$ 。试计算

$$\frac{1}{H} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta.$$

解: 欧拉公式 $k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$ 。

$$\int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta) d\theta = \pi k_1 + \pi k_2 = 2\pi \cdot 2H.$$

$$\frac{1}{H} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta = \frac{4\pi H}{H} = 4\pi.$$

2. (15 分) 设 S 为正则光滑曲面, 在测地平行坐标系 (u, v) 下曲面 S 的第一基本形式为

$$I = (du)^2 + G(u, v)(dv)^2.$$

(a) 计算 Christoffel 符号 Γ_{jk}^i 并写出测地线方程。

(b) 计算高斯曲率 $K(u, v)$ 。



(1) $E = 1, F = 0, G = G(u, v)$ 。

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.\end{aligned}$$

测地线方程：

$$\begin{cases} \ddot{u} - \frac{1}{2}G_u \dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + \frac{G_u}{G} \dot{u} \dot{v} + \frac{G_v}{2G} \dot{v}^2 = 0. \end{cases}$$

(2) 正交参数高斯曲率公式：

$$K(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

3. (15 分) 记 S^2 为三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点的单位球面。

(a) 判断 $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ 上是否存在光滑单位切向量场。

(b) 判断 $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ 上是否存在沿所有光滑曲线均平行的非零光滑切向量场。

(1) 存在。去掉南北极，球坐标 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 是非零光滑切向量场，归一化得到单位切向量场。

(2) 不存在。若存在处处非零平行切向量场，则沿任意闭曲线平行移动向量不变。取纬线闭曲线，球面高斯曲率 $K = 1 > 0$ ，环绕该闭曲线的和乐转动角等于高斯曲率在围成区域的积分，不为零，平行移动向量会旋转，矛盾。

近世代数 (满分 40 分)

1. (15 分) 设 $A = \langle a \rangle$ 为 m 阶循环群， $B = \langle b \rangle$ 为 n 阶循环群。

(a) 证明：所有群同态 $f: A \rightarrow B$ 均可由自然数 k 唯一确定，满足 $f(a) = b^k$ 。进一步，请描述由固定 k 所决定的同态性质。

(b) 证明：自然数 k 可定义上述同态当且仅当 $n \mid km$ 。

(1) 循环群由生成元的像唯一决定， $f(a^t) = b^{kt}$ 。像： $\text{Im } f = \langle b^k \rangle$ ，阶为 $\frac{n}{\gcd(k, n)}$ ；核： $\ker f = \langle a^{\frac{m}{\gcd(k, m)}} \rangle$ ，阶 $\gcd(k, m)$ 。

(2) $a^m = e_A$ ，必须 $f(a)^m = b^{km} = e_B$ ，故 $n \mid km$ 。反之，若 $n \mid km$ ，映射良定义，是群同态。

2. (10 分) 设 R 为主理想整环， p 为 R 的素元。证明：商环 $R/(p)$ 是一个域。

证明：PID 中素元生成极大理想。交换环模去极大理想得到域，故 $R/(p)$ 为域。

3. (15 分) 设 R 是一个么环，满足对任意 $a \in R$ 有 $a^2 = a$ (这样的环称作布尔环)。

(a) 证明： R 的特征为 2。

(b) 证明： R 是交换环。

(c) 对任意 $a \in R$ ，证明环同构 $R \cong (a) \times (1-a)$ 。

(d) 举例说明存在非整环的布尔环。

(e) 证明： R 的每个有限生成理想均为主理想。

(1) $(a+a)^2 = a+a$ ，展开：

$$a^2 + 2a + a^2 = a + a \implies a + 2a + a = a + a \implies 2a = 0.$$

故 $\text{char } R = 2$ 。



(2) $(a+b)^2 = a+b$,

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a+b \implies a + ab + ba + b = a+b,$$

$ab + ba = 0$ 。特征 2, $-ba = ba$, 于是 $ab = ba$, 交换。

(3) 映射 $\phi: R \rightarrow (a) \times (1-a)$, $\phi(r) = (ra, r(1-a))$ 。 ϕ 是环同态。 $\ker \phi = \{r : ra = 0, r(1-a) = 0\}$,

$$r = r \cdot 1 = r(a + (1-a)) = ra + r(1-a) = 0,$$

故单。任取 $(xa, y(1-a))$, 取 $s = xa + y(1-a)$, $\phi(s) = (xa, y(1-a))$, 满。故环同构。

(4) 例子: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 布尔环, $(1,0)(0,1) = (0,0)$, 含零因子, 不是整环。

(5) 设有限生成理想 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 。布尔环交换幂等, 取 $e = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, 则 $(a_1, \dots, a_k) = (e)$, 为主理想。



中国科学技术大学数学科学学院
2024 年夏令营招生考试试题

数学分析 (满分 80 分)

1. 已知函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

求偏导数 f_x, f_{xy} 。

解：第一步： $xy \neq 0$ 处求导

$$f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} + x^2 \cdot \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - y^2 \cdot \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

化简：

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2}, \quad 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$$

$$f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{y(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2x \arctan \frac{y}{x} - y.$$

坐标轴上 $xy = 0$ ，先算 $f_x(x, 0)$ ：固定 $y = 0$ ， $f(x, 0) = 0$ ，故 $f_x(x, 0) = 0$ 。固定 $x \neq 0, y = 0$ ，上面表达式取 $y \rightarrow 0$ ： $2x \cdot 0 - 0 = 0$ ，连续。

再算 f_{xy} 。当 $xy \neq 0$ ：

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2x \arctan \frac{y}{x} - y \right) = 2x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

求混合偏导在 $(0, 0)$ ：

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

注： $f_{yx}(0, 0) = -1$ ，混合偏导在原点不相等。

总结：

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \arctan \frac{y}{x} - y, & xy \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases} \quad f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & xy \neq 0, \\ 0, & (0, 0). \end{cases}$$

2. 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $(0, 1)$ 上的收敛性和一致收敛性。

解：对固定 $x \in (0, 1)$ ，等比级数

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n(1-x) = (1-x) \cdot \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = 1-x^{N+1}.$$

点态极限： $S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = 1$ ，故在 $(0, 1)$ 上逐点收敛到 1。

一致收敛判别：

$$|S_N(x) - S(x)| = x^{N+1}.$$

$\sup_{x \in (0, 1)} x^{N+1} = 1$ ，上确界不趋于 0。或者取点列 $x_N = 1 - \frac{1}{N+1} \in (0, 1)$ ，

$$|S_N(x_N) - S(x_N)| = \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{N+1} \rightarrow e^{-1} \neq 0.$$

故在 $(0, 1)$ 上逐点收敛，但不一致收敛。



3. 利用二重积分计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i^2 + j^2}.$$

解: 变形黎曼和

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i^2 + j^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\frac{i}{n}}{\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

这是单位正方形 $D: [0, 1] \times [0, 1]$ 的二重黎曼和, $x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n}$ 。

$$I = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy.$$

先对 y 积分:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^1 \left[\arctan \frac{y}{x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \arctan \frac{1}{x} dx.$$

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) dx = \frac{\pi}{2} - \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

4. (1) 设函数 $f \in C^1[a, b]$, 且 $f(a) = 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

证明: $f(a) = 0 \implies f(x) = \int_a^x f'(t) dt$ 。由柯西不等式

$$f(x)^2 = \left(\int_a^x 1 \cdot f'(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^x 1^2 dt \right) \left(\int_a^x (f')^2 dt \right) \leq (x-a) \int_a^b (f')^2 dt.$$

两边积分:

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \int_a^b (x-a) dx \cdot \int_a^b (f')^2 dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f')^2 dx.$$

(2) 若函数 $f \in C^1(D)$, 其中 $D = [a, b] \times [c, d]$, 且 $f(x, c) = 0$, 证明:

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq \frac{(d-c)^2}{2} \iint_D (f_y(x, y))^2 dx dy.$$

证明: 固定 x , $f(x, c) = 0$,

$$f(x, y) = \int_c^y f_y(x, t) dt.$$

柯西不等式:

$$f(x, y)^2 \leq \left(\int_c^y 1^2 dt \right) \left(\int_c^y f_y^2 dt \right) \leq (y-c) \int_c^d f_y^2(x, t) dt.$$

两边在 D 上二重积分

$$\iint_D f^2 dx dy \leq \iint_D (y-c) \left(\int_c^d f_y^2 dt \right) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d (y-c) dy \int_c^d f_y^2(x, t) dt.$$

$$\int_c^d (y-c) dy = \frac{(d-c)^2}{2}, \text{ 交换积分次序即得}$$

$$\iint_D f^2 dx dy \leq \frac{(d-c)^2}{2} \iint_D f_y^2(x, y) dx dy.$$



5. (1) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单位圆盘, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x, y) = 0$ 。证明:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy = f(0, 0), \quad D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0)).$$

证明: 极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。

$$xf_x + yf_y = r \frac{\partial f}{\partial r}, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{rf_r}{r^2} \cdot r dr d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{\partial f}{\partial r} dr d\theta.$$

对 r 积分:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\partial f}{\partial r} dr = f(1, \theta) - f(\varepsilon, \theta) = 0 - f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta).$$

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

f 在原点连续, $\varepsilon \rightarrow 0$, 积分中值定理:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0, 0) d\theta = f(0, 0).$$

- (2) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通区域, 且原点 $(0, 0) \in D$ 。函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x, y) = 0$ 。计算

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D_\varepsilon = D - B_\varepsilon((0, 0)).$$

解: 同极坐标变换, 边界 ∂D 上 $f = 0$ 。

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{r(\theta)} \frac{\partial f}{\partial r} dr d\theta = \int_0^{2\pi} (f(r(\theta), \theta) - f(\varepsilon, \theta)) d\theta = -\int_0^{2\pi} f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

由 (1), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} \dots = f(0, 0)$,

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy = -2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$, 该积分趋于 $-2\pi f(0, 0)$ 。

线性代数 (满分 80 分)

1. 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵。

解:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

特征值: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 。

$\lambda = 5$: 解 $(5I - A)\mathbf{x} = 0$, 得特征向量 $\xi_1 = (1, 1, 1)^T$, 单位化: $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ 。



$\lambda = -1$: 解 $(-I - A)\mathbf{x} = 0$, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 取正交特征向量 $\xi_2 = (1, -1, 0)^T$, $\xi_3 = (1, 1, -2)^T$ 。单位化:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T.$$

正交矩阵

$$P = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad P^T A P = \text{diag}\{5, -1, -1\}.$$

2. 证明: n 阶矩阵 A 是幂零矩阵的充要条件是 $\text{tr}(A^k) = 0, 1 \leq k \leq n$ 。

证明: 必要性: 若 A 幂零, 则所有特征值 $\lambda_i = 0$ 。 A^k 特征值为 $\lambda_i^k = 0$, 故 $\text{tr}(A^k) = \sum \lambda_i^k = 0$ 。

充分性: 设 A 在复数域特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。条件给出幂和

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{tr}(A^k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

由 Newton 恒等式, 初等对称多项式 $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = 0$ 。 A 的特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n = \lambda^n.$$

由 Cayley-Hamilton, $A^n = 0$, 即 A 幂零。

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是一个幂零矩阵, 定义矩阵指数

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

证明: $\exp(A)$ 是可逆矩阵, 且 $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ 。

证明: A 幂零, 存在 m , $A^m = 0$, 级数是有限和:

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!}.$$

二项式乘法, 幂零矩阵 $A, -A$ 可交换:

$$\exp(A) \exp(-A) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-A)^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{2m-2} \left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \right) A^k.$$

$$k \geq 1: \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{i!(k-i)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = \frac{(1-1)^k}{k!} = 0. \quad \text{只剩 } k=0 \text{ 项等于 } I.$$

$$\exp(A) \exp(-A) = I \implies \exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

4. 设 V 为有限维线性空间, $\Phi: V \rightarrow V$ 是幂零线性变换。证明: 存在唯一的线性子空间链

$$\{0\} = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_k = V,$$

满足:

(a) $\Phi(W_i) \subset W_{i+2}$ 对所有 $-1 \leq i \leq k-2$ 成立。

(b) $W_{i+1}/W_i \cong W_{k-i}/W_{k-i-1}$ 对所有 $0 \leq i \leq k-1$ 成立。



证明思路：幂零变换 Φ 的 Jordan 块分解， k 为幂零指数， $\Phi^k = 0, \Phi^{k-1} \neq 0$ 。取 $W_i = \ker \Phi^{i+1}$ ，即幂零变换的核上升链：

$$W_{-1} = \ker \Phi^0 = \{0\}, W_0 = \ker \Phi^1, W_1 = \ker \Phi^2, \dots, W_{k-1} = \ker \Phi^k = V.$$

(1) $\Phi(W_i) = \Phi(\ker \Phi^{i+1}) \subset \ker \Phi^i = W_{i-1}$ ，题目条件下标移位，重新标号即可满足 $\Phi(W_i) \subset W_{i+2}$ 。

(2) Jordan 标准型中，商空间 $W_{i+1}/W_i = \ker \Phi^{i+2}/\ker \Phi^{i+1}$ 的维数等于 Jordan 块阶数大于 $i+1$ 的块的个数；对偶地， W_{k-i}/W_{k-i-1} 维数相同，故同构。

唯一性：该链就是幂零变换的根子空间升链，由 Jordan 块的大小唯一确定，故子空间链唯一。

实变函数（满分 40 分）

1. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Borel/Lebesgue 可测函数，讨论复合函数 $g \circ f$ 的可测性。

解： 1. 若 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 **Borel 可测函数**，则 $g \circ f$ 必可测。理由：对任意 Borel 集 B ， $g^{-1}(B)$ 是 Borel 集； $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$ ， f 可测，原像可测。

2. 若 g 仅仅是 Lebesgue 可测，则 $g \circ f$ **不一定 Lebesgue 可测**。反例：存在 Lebesgue 可测集 A ，Borel 零测集 N ， $A \subset N$ ， $g = \chi_A$ 是 Lebesgue 可测；取 f 为连续函数把零测 Borel 集映到 N ，使得 $f^{-1}(A)$ 不可测，则 $g \circ f = \chi_A \circ f$ 不可测。

总结： g Borel 可测 $\implies g \circ f$ 可测； g 仅 Lebesgue 可测，复合不一定可测。

2. 设 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界函数，证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} nt^{-(n+1)} f(t) dt = f(1).$$

证明： 做变量替换 $u = t^{-n}$ ， $t = u^{-1/n}$ ， $dt = -\frac{1}{n} u^{-\frac{1}{n}-1} du$ 。

$$\int_1^{+\infty} nt^{-(n+1)} f(t) dt = \int_0^1 f(u^{-1/n}) du.$$

记 $g_n(u) = f(u^{-1/n})$ 。- $u \in (0, 1)$ ， $n \rightarrow \infty$ ， $u^{-1/n} = e^{-\frac{\ln u}{n}} \rightarrow 1$ ，故 $g_n(u) \rightarrow f(1)$ ；- f 有界， $|g_n(u)| \leq M$ ，控制收敛定理适用。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(u) du = \int_0^1 f(1) du = f(1).$$

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 中收敛，证明其存在几乎处处收敛的子列。

证明： 若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$ ，则 f_n 依测度收敛于 f 。依测度收敛的函数列，必存在子列 f_{n_k} ，使得 f_{n_k} 几乎处处收敛到 f (Riesz 定理)。

复变函数（满分 40 分）

1. 设整函数 $f(z)$ 满足 $\int_{\mathbb{C}} |f(z)| dA(z) < +\infty$ ， $dA(z)$ 为复平面面积测度，证明： $f(z) \equiv 0$ 。

证明： Cauchy 积分公式，对任意 $r > 0$ ，

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

两边对圆盘 $B(z_0, R)$ 面积平均：

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B(z_0, R)} f(z) dA(z).$$

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\mathbb{C}} |f(z)| dA.$$

令 $R \rightarrow +\infty$ ，右边趋于 0，故 $f(z_0) = 0$ ，由 z_0 任意， $f \equiv 0$ 。



2. 设 $f(z)$ 为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上的全纯函数, 且满足当 $|z| \rightarrow 1^-$ 时, $|f(z)| \rightarrow 1$ 。证明: 存在有限个复数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ 和实数 $t \in \mathbb{R}$, 使得

$$f(z) = e^{it} \prod_{i=1}^n \left(\frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z} \right)^{n_i}, \quad n_i \in \mathbb{N}^+.$$

证明: 由最大模原理, f 在 $\mathbb{D}$ 内零点至多可数。条件 $|f(z)| \rightarrow 1, |z| \rightarrow 1^-$, 说明零点只有有限个, 记零点 a_i , 阶数 n_i 。记有限 Blaschke 乘积

$$B(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z} \right)^{n_i}.$$

则 $h(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$ 在 $\mathbb{D}$ 无零点, $|h(z)| \rightarrow 1, |z| \rightarrow 1^-$ 。 $\log h(z)$ 全纯, 边界模恒为 1, $\operatorname{Re} \log h = \ln |h| \rightarrow 0$, 由 Schwarz 反射原理, $h(z)$ 是模恒为 1 的全纯函数, 故 $h(z) = e^{it}, t \in \mathbb{R}$ 。于是 $f(z) = e^{it} B(z)$ 。

3. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为有界闭区域, 全纯映射 $f: D \rightarrow D$ 存在不动点 $z_0 \in D$ 。证明: $|f'(z_0)| \leq 1$ 。

证明: 取 z_0 为不动点 $f(z_0) = z_0$ 。做分式线性变换把 z_0 映到原点, 不妨设 $z_0 = 0, f(0) = 0, f: \mathbb{D} \rightarrow D$, D 有界。由 Schwarz 引理推广: 令 $M = \sup_{z \in D} |z| < +\infty$ 。 f 在原点 Taylor 展开 $f(z) = f'(0)z + \dots$ 。考虑迭代 $f_n(z) = f^n(z), f_n(0) = 0, |f_n(z)| \leq M$ 。由 Cauchy 导数估计:

$$|(f^n)'(0)| = |f'(0)|^n \leq \frac{M}{r^n}, \quad \forall r > 0.$$

若 $|f'(0)| > 1$, 左边 $|f'(0)|^n \rightarrow +\infty$, 矛盾。故 $|f'(z_0)| \leq 1$ 。

注: 若 z_0 在内部, $|f'(z_0)| = 1$ 可推出 f 是旋转。

微分几何 (满分 40 分)

1. 设球面方程为 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, 上任取一条大圆 (球面的测地线)。

(a) 求此大圆作为空间曲线的曲率和挠率。

(b) 求球面 S^2 的 Gauss 曲率。

(c) 求此大圆在球面上的测地曲率。

解: (1) 大圆: 平面与球面交线, 半径 R , 平面曲线。空间曲率: $k = \frac{1}{R}$; 平面曲线挠率 $\tau = 0$ 。

(2) 球面两主曲率均为 $\frac{1}{R}$, 高斯曲率

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{R^2}.$$

(3) 大圆是球面测地线, 测地曲率 $k_g = 0$ 。

2. 设曲面 S 的方程为 $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$, 其中 $f(u, v)$ 为光滑函数。

(a) 计算曲面的第一基本形式 I 和第二基本形式 II。

(b) 当 $f(u, v) = \ln \cos u - \ln \sin v$ 时, 求曲面的平均曲率 H 。

(1)

$$S_u = (1, 0, f_u), \quad S_v = (0, 1, f_v).$$

$$E = S_u \cdot S_u = 1 + f_u^2, \quad F = S_u \cdot S_v = f_u f_v, \quad G = S_v \cdot S_v = 1 + f_v^2.$$

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = (1 + f_u^2) du^2 + 2f_u f_v du dv + (1 + f_v^2) dv^2.$$

单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{S_u \times S_v}{|S_u \times S_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$



$$S_{uu} = (0, 0, f_{uu}), S_{uv} = (0, 0, f_{uv}), S_{vv} = (0, 0, f_{vv}).$$

$$L = \mathbf{n} \cdot S_{uu} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad M = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad N = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

$$(2) f(u, v) = \ln \cos u - \ln \sin v.$$

$$f_u = \frac{-\sin u}{\cos u} = -\tan u, \quad f_v = \frac{-\cos v}{\sin v} = -\cot v.$$

$$f_{uu} = -\sec^2 u, \quad f_{uv} = 0, \quad f_{vv} = \csc^2 v.$$

$$1 + f_u^2 + f_v^2 = 1 + \tan^2 u + \cot^2 v = \sec^2 u + \csc^2 v.$$

平均曲率公式

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

$$F = M = 0,$$

$$E = 1 + \tan^2 u = \sec^2 u, \quad G = 1 + \cot^2 v = \csc^2 v.$$

$$L = \frac{-\sec^2 u}{\sqrt{\sec^2 u + \csc^2 v}}, \quad N = \frac{\csc^2 v}{\sqrt{\sec^2 u + \csc^2 v}}.$$

$$EG - F^2 = \sec^2 u \csc^2 v.$$

$$EN + GL = \sec^2 u \cdot \frac{\csc^2 v}{\sqrt{\dots}} + \csc^2 v \cdot \frac{-\sec^2 u}{\sqrt{\dots}} = 0.$$

$H = 0$, 此曲面为极小曲面。

3. 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是紧致, 无边界, 可定向的曲面。

(a) 若 S 上存在处处非零的光滑切向量场, 构造 S 上的整体正交活动标架。

(b) 说明球面 S^2 是否存在处处非零的光滑切向量场, 并给出理由。

解: (1) 设 $\mathbf{X}$ 处处非零切向量场, 单位化 $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|}$ 。 S 可定向, 有整体单位法向量场 $\mathbf{n}$ 。令 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_1$ 。则 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ 构成 S 上整体正交单位活动标架。

(2) 球面 S^2 不存在处处非零光滑切向量场。由 Poincaré-Hopf 定理: 紧致无边可定向曲面, 切向量场的指标之和等于欧拉示性数。 $\chi(S^2) = 2 \neq 0$ 。若存在处处非零切向量场, 则总指标为 0, 矛盾。故不存在。

近世代数 (满分 40 分)

1. 求 Abel 群 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24}$ 的不变因子和初等因子。

解: $24 = 8 \times 3$, $\mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3$ 。

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3.$$

初等因子 (素数幂): $\{2, 2^3, 2^3, 3\}$ 。

不变因子: 按从大到小, 最大不变因子取各素最高幂: $2^3 \cdot 3 = 24$; 剩余 $2^3, 2$;

不变因子: $2, 8, 24$ 。

验证: $2 \oplus 8 \oplus 24$, 阶 $2 \times 8 \times 24 = 384$, 与原群阶 $2 \cdot 8 \cdot 24 = 384$ 相等。



2. 设 H 和 K 是群 G 的正规子群, 且 $HK = G$ 。证明:

$$G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

证明: 构造同态

$$\varphi: G \rightarrow (G/H) \times (G/K), \quad \varphi(g) = (gH, gK).$$

φ 是群同态。

$$\ker \varphi = \{g \in G \mid g \in H, g \in K\} = H \cap K.$$

下证 φ 满: 任取 $(aH, bK) \in (G/H) \times (G/K)$ 。 $HK = G$, 记 $a = h_1k_1$, $b = h_2k_2$ 。取 $g = h_1b$ 。
 $gH = h_1bH = bH$ ($h_1 \in H$); $gK = h_1bK = h_1h_2k_2K = h_1h_2K$ 。另一种标准证法: $HK = G$, 对任意 $x, y \in G$, 存在 $g \in G$, 使得 $g \equiv x \pmod{H}$, $g \equiv y \pmod{K}$ 。由群同态基本定理:

$$G/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi.$$

由 $HK = G$, φ 满, 故

$$G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

3. 证明: 有限含么交换环的素理想必是极大理想。

证明: 设 R 有限交换么环, P 是素理想。则商环 R/P 是有限整环。有限整环必是域。商环是域 $\iff P$ 是极大理想。证毕。

4. 设 $f(x, y) \in K[x, y]$ 是不可约多项式。

(a) 证明: $f(x, y)$ 在 $K(y)[x]$ 中要么是不可约元, 要么是单位。

(b) 已知 $g(x, y) \in K[x, y]$ 且 $f(x, y) \nmid g(x, y)$, 证明方程组

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

在 K 上只有有限个解。

(1) 证明: $K[x, y] = K[y][x]$ 。 $f(x, y) \in K[y][x]$ 。若 f 在 $K[y][x]$ 不是不可约元, 则可分解 $f = AB$, $A, B \in K(y)[x]$, 都不是单位。由 Gauss 引理, 可以清分母, 得到 f 在 $K[y][x]$ 的非平凡分解, 与 f 在 $K[x, y]$ 不可约矛盾。 $K(y)[x]$ 的单位恰是 $K(y)$ 中非零元; $f \in K[x, y]$, 若 f 是单位, 则 $f \in K^*$, 常数多项式。故: 要么 f 是单位 (常数), 要么 f 在 $K(y)[x]$ 不可约。

(2) 证明: f 不可约, $f \nmid g$ 。视 $f, g \in K(y)[x]$ 。由 (1), f 在 $K(y)[x]$ 不可约; g 不被 f 整除, 故在 $K(y)[x]$ 中 $\gcd(f, g) = 1$ 。于是存在 $u, v \in K(y)[x]$, 使得 $uf + vg = 1$ 。通分, 乘 $d(y) \in K[y]$, 得到 $U, V \in K[x, y]$,

$$Uf + Vg = d(y).$$

若 (a, b) 是公共零点, 则 $d(b) = 0$ 。 $d(y)$ 是一元非零多项式, 只有有限个根 b 。对每一个固定的 b , 代入 $f(x, b) = 0$, 一元多项式, 只有有限个 x 。因此方程组公共解只有有限多。



中国科学技术大学数学科学学院
2026 年夏令营招生考试试题（回忆版）

数学分析（80 分）

1. (20 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 > a_0 > 0$, 且

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}}$$

求证: $\{a_n\}$ 收敛, 且极限为正。

证明: 取倒数, 令 $b_n = \frac{1}{a_n} > 0$ 。

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2a_{n+1}^2} \implies b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_n a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n.$$

改写原式:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{2a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{2}{\frac{a_n}{a_{n+1}} + 1}.$$

记 $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$, 则 $r_{n+1} = \frac{2}{r_n + 1}$ 。初值 $r_0 = \frac{a_1}{a_0} > 1$ 。迭代 $r_{n+1} = \frac{2}{r_n + 1}$ 。不动点 $r = \frac{2}{r+1} \implies r^2 + r - 2 = 0 \implies r = 1$ (正根)。

$$|r_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{r_n + 1} - 1 \right| = \frac{|1 - r_n|}{r_n + 1} \leq |r_n - 1|.$$

进一步: $r_0 > 1 \implies r_1 = \frac{2}{r_0 + 1} < 1$, $r_2 = \frac{2}{r_1 + 1} > 1$, 奇偶震荡趋向 1。 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ 。

$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, $\ln a_n = \ln a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \ln r_k$ 。 $\ln r_{k+1} = \ln 2 - \ln(r_k + 1)$, $\{r_n\} \rightarrow 1$, $\ln r_n \rightarrow 0$ 。可以证明 $\{a_n\}$ 有上下正界, $\underline{\lim} a_n > 0$, $\overline{\lim} a_n > 0$ 。对原式两边取上下极限: 记 $\alpha = \underline{\lim} a_n$, $\beta = \overline{\lim} a_n$,

$$\beta = \frac{2\beta^2}{\alpha + \beta} \implies \beta(\alpha + \beta) = 2\beta^2 \implies \alpha + \beta = 2\beta \implies \alpha = \beta.$$

故极限存在 $A = \lim a_n > 0$ 。代入递推: $A = \frac{2A^2}{A + A} = A$, 自治。

2. (20 分) 定义在 $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x)$ 有非负的三阶导数, 满足

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) - 1.$$

求所有满足条件的 $f(x)$ 。

解: 差分方程。记移位算子 $Tf(x) = f(x+1)$, 方程:

$$(T - I)f(x) = f'(x) + 1.$$

已知 $f'''(x) \geq 0$, f''' 非负, 故 f'' 单调递增, f' 凸。对等式两边连续求导:

$$f''(x) = f'(x+1) - f'(x), \quad f'''(x) = f''(x+1) - f''(x).$$

因为 $f'''(t) \geq 0$, $f''(x+1) \geq f''(x)$, f'' 不减。设 f 是多项式解: 假设次数 d 。左边 $f'(x)$ 次数 $d-1$; 右边 $f(x+1) - f(x) - 1$ 最高次项为 dx^{d-1} , 故 $d-1 = d-1$, 比较系数: $d = 2$ 。设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 。

$$f'(x) = 2ax + b.$$

$$f(x+1) - f(x) - 1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) - 1 = 2ax + a + b - 1.$$



等式 $2ax + b = 2ax + a + b - 1 \implies a - 1 = 0 \implies a = 1$ 。 $f(x) = x^2 + bx + c$ 。检验三阶导数： $f'''(x) \equiv 0 \geq 0$ ，满足条件。

再证明没有非多项式解： $f'''(x+1) - f'''(x) = f^{(4)}(x)$ 。若 f 不是二次多项式，则 f''' 非零。但 f''' 单调递增。若 f''' 不恒等于 0，则当 $x \rightarrow +\infty$ ， $f'''(x) \rightarrow +\infty$ ， $f'(x+1) - f'(x) = f''(x) \rightarrow +\infty$ 。而 $f'(x)$ 二阶导数 f'' 递增，差分增长太快，矛盾。故全部解：

$$f(x) = x^2 + bx + c, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

3. (20 分) 计算二重积分

$$I = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

解：单位正方形，利用对称性，计算 $x, y \geq 0$ ，分 $y \leq x$ 和 $y \geq x$ 。

$$I = 2 \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

内层积分公式：

$$\int \sqrt{x^2 + y^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{2} \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

代入 $0 \rightarrow x$ ：

$$\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2x} + \frac{x^2}{2} \ln(x + \sqrt{2x}) = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 + \frac{x^2}{2} (\ln x + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x^2 + \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right) dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 x^2 dx + (\ln(1 + \sqrt{2})) \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^2 \ln x dx. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \quad \int_0^1 x^2 \ln x dx = -\frac{1}{9}.$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{9}.$$

4. (10 分) 定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 函数 $f(x, y)$ 连续可微，边界恒为 0。求证

$$\left| \iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{1}{6} \max_{[0,1]^2} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}.$$

证明：记 $M = \max \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ 。 f 在边界为 0，对任意 (x, y) ，由沿线段从边界积分：取从 $(0, y)$ 到 (x, y) ， $f(x, y) = \int_0^x f_x(t, y) dt$ 。

$$|f(x, y)| \leq \int_0^x |f_x(t, y)| dt \leq \int_0^x M dt = Mx.$$

同理， $|f(x, y)| \leq M(1 - x), My, M(1 - y)$ 。

$$|f(x, y)| \leq M \cdot \min\{x, 1 - x, y, 1 - y\}.$$

$$\left| \iint f \right| \leq M \iint_{[0,1]^2} \min\{x, 1 - x, y, 1 - y\} dx dy.$$

正方形四等分，只算第一象限小正方形 $0 \leq y \leq x \leq 1/2$ ，乘以 4。

$$\iint_{[0,1]^2} \min\{x, 1 - x, y, 1 - y\} = 4 \int_0^{1/2} dx \int_0^x y dy = 4 \int_0^{1/2} \frac{x^2}{2} dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} = 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

【注】这里得到 $\frac{1}{12}$ ，题目右端是 $\frac{1}{6}M$ ， $\frac{1}{12}M \leq \frac{1}{6}M$ ，不等式成立。 > 注：本证明给出更紧界 $\frac{1}{12}M$ ，自然蕴含题目的 $\frac{1}{6}M$ 。



5. (10 分) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, f 二阶连续可微, $f(0, 0) = 0$, $\Delta f = x + x^2 + y^2$, 计算

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

解: 使用格林公式/泊松方程积分技巧。极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。格林公式: $\iint_D \Delta f \cdot G dx dy = \oint_{\partial D} \cdots - \iint_D f \Delta G$ 。取格林函数 $G = \frac{1}{4}(R^2 - r^2)$, 满足 $\Delta G = 1$ 。

$$\iint_D f \cdot 1 dx dy = \iint_D f \Delta G = \oint_{\partial D} \left(G \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds - \iint_D G \Delta f.$$

在 ∂D , $G = 0$; $\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{r}{2} \Big|_{r=R} = -\frac{R}{2}$.

$$I = \oint_{\partial D} f \cdot \frac{R}{2} ds - \iint_D \frac{R^2 - r^2}{4} (x + x^2 + y^2) dx dy.$$

但注意: 条件只有 $f(0, 0) = 0$, ** 没有边界条件, 不能直接消去环路积分! ** > 正确思路: 分解方程 $\Delta f = x + (x^2 + y^2)$ 。找特解。 $\Delta f_1 = x$, 试 $f_1 = \frac{1}{8}x(x^2 + y^2)$; $\Delta f_2 = x^2 + y^2$, 试 $f_2 = \frac{1}{16}(x^2 + y^2)^2$ 。

$$\Delta f_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}xy^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\cdots) = \frac{1}{8}(6x) + \frac{1}{8}(2x) = x.$$

$$\Delta f_2 = \Delta \left(\frac{1}{16}r^4 \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^4}{16} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{4r^3}{16} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^4}{4} = r^2 = x^2 + y^2.$$

通解: $f = f_1 + f_2 + h$, $\Delta h = 0$, h 调和。

$$f(0, 0) = 0 \implies h(0, 0) = 0.$$

$$I = \iint_D f_1 dx dy + \iint_D f_2 dx dy + \iint_D h dx dy.$$

$\iint_D f_1 = \iint_D \frac{1}{8}x(x^2 + y^2) dx dy$, 被积函数是 x 奇函数, 圆盘对称, 该项等于 0。

$$\iint_D f_2 = \iint_D \frac{1}{16}r^4 \cdot r dr d\theta = \frac{1}{16} \cdot 2\pi \int_0^R r^5 dr = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^6}{6} = \frac{\pi R^6}{48}.$$

调和函数均值性质: $\iint_D h(x, y) dx dy = h(0, 0) \cdot \text{Area}(D) = 0 \cdot \pi R^2 = 0$.

$$I = \frac{\pi R^6}{48}.$$

线性代数与解析几何 (80 分)

1. (20 分) 曲线

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 0, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

变换 $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + 2z, z + 3x)$, 变换后得到椭圆, 求椭圆中心、法向量、面积。

解: 记线性变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

原曲线是平面 $x + y + z = 3$ 上的二次曲线, 平面与二次锥面 $xy + yz + zx = 0$ 交线。原平面 $x + y + z = 3$, 中心: 原平面上二次曲线的中心, 满足导数条件。 $xy + yz + zx = 0$, 平面 $x + y + z = 3$ 。原中心 $(1, 1, 1)$ 。变换后椭圆中心: $T(1, 1, 1)^T = (2, 3, 4)^T$ 。



原平面法向量 $\mathbf{n}_0 = (1, 1, 1)$; 变换后平面: u, v, w 满足约束, $T^{-T}\mathbf{n}_0$ 为新平面法向量。

$$\det T = 1(1-0) - 1(0-6) + 0 = 1+6 = 7, \quad T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

原二次型 $Q(x, y, z) = xy + yz + zx = \frac{1}{2}[(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]$ 。在平面 $x+y+z=3$, $Q = \frac{1}{2}(9 - (x^2 + y^2 + z^2)) = 0 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 。原曲线是平面 $x+y+z=3$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 交线, 是圆! 半径 $r = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$ 。原圆面积 $S_0 = \pi \cdot 6 = 6\pi$ 。线性变换限制到二维平面, 面积放大倍数是该平面上诱导线性映射的面积伸缩因子。

2. (20 分) 分块方阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

满足 $B^T D$ 为对称矩阵。求证:

$$\det M = \det(A^T D - C^T B).$$

证明: 分块变换。条件 $(B^T D)^T = B^T D \implies D^T B = B^T D$ 。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BB & B \\ CD - DB & D \end{pmatrix}.$$

改用转置思路:

$$M^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}.$$

由条件 $D^T B = B^T D$ 。做分块消元:

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T D & -A^T B + C^T A \\ B^T D & -B^T B + D^T A \end{pmatrix}.$$

另一种标准套路: 若 D 可逆,

$$\det M = \det D \det(A - BD^{-1}C).$$

目标右端 $\det(A^T D - C^T B) = \det(D^T A - B^T C)$ 。条件 $D^T B = B^T D$ 。

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{pmatrix}.$$

对 $\begin{pmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{pmatrix}$ 做分块行变换: $R_2 - C^T(D^T)^{-1}R_1$:

$$\det(D^T) \det(A^T - C^T(D^T)^{-1}B^T) = \det(D^T A - C^T B).$$

$\det(M) = \det(M^T) = \det \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$ 。当 D 可逆,

$$\det \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \det(D^T) \det(A^T - C^T(D^T)^{-1}B^T) = \det(A^T D - C^T B).$$

可逆情形成立; 多项式恒等式, 去掉可逆条件, 等式作为多项式恒成立。

3. (20 分) 记

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



求方阵

$$M = \begin{pmatrix} B & B & O \\ O & B & B \\ O & O & B \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形。

解: $B = I + N$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$, B 是 3 阶 Jordan 块 $J_3(1)$ 。

$$M = \begin{pmatrix} I+N & I+N & 0 \\ 0 & I+N & I+N \\ 0 & 0 & I+N \end{pmatrix} = I_9 + \begin{pmatrix} N & N & 0 \\ 0 & N & N \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} = I + Q.$$

$Q = \begin{pmatrix} N & N & 0 \\ 0 & N & N \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}$, 求 Q 的 Jordan 标准形。 $\lambda = 1$ 是 M 唯一特征值。计算 Q 的幂零指数。 $N^3 = 0$ 。计算 $\ker Q, \ker Q^2, \ker Q^3, \ker Q^4$ 。 Q 是 9 阶幂零矩阵。 $\dim \ker Q = \text{rank}(Q)$ 补: Q 每块 N 秩为 2, 算出来 $\dim \ker Q = 3$; $\dim \ker Q^2 = 6$; $\dim \ker Q^3 = 8$; $\dim \ker Q^4 = 9$ 。幂零 Jordan 块: $J_4(0), J_3(0), J_2(0)$ 。于是 M 的 Jordan 标准形: $J_4(1) \oplus J_3(1) \oplus J_2(1)$ 。

4. (20 分) $V = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr} A = 0\}$, V 上线性变换 $\mathcal{P}(X) = P^{-1}XP$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathcal{P}$ 的特征多项式。

解: 共轭映射 $\text{Ad}_P : X \mapsto P^{-1}XP$ 。 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ 是 8 维实线性空间。若 P 特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 Ad_P 在 M_3 上特征值 λ_i/λ_j , $1 \leq i, j \leq 3$ 。去掉 $i = j$ 对应特征值 1 (一维迹部分), 剩下 8 个就是 $\mathfrak{sl}_3$ 上 $\mathcal{P}$ 特征值。 P 下三角, 特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ 。 $M_3(\mathbb{R})$ 上 Ad_P 特征值:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2, 1, \frac{1}{2}, 4, 2, 1.$$

去掉一维迹对应的特征值 1 (一重)。 $\mathcal{P}$ 的特征值:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{4}, 4.$$

特征多项式:

$$\det(tI - \mathcal{P}) = (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 (t-2)^2 \left(t - \frac{1}{4}\right) (t-4).$$

实分析 (40 分)

1. (10 分) 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, g 是 $\mathbb{R}$ 上有界可测函数, 卷积

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

求证: $f * g$ 有界并且一致连续。

证明: 有界: $|(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|g\|_{\infty} \|f\|_{L^1}$, 故有界。

一致连续:

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| \leq \int |f(x+h-y) - f(x-y)||g(y)|dy \leq \|g\|_{\infty} \int |f(z+h) - f(z)|dz.$$

L^1 函数的平移连续性: $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot+h) - f\|_{L^1} = 0$ 。 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |h| < \delta, \|f(\cdot+h) - f\|_{L^1} < \varepsilon/\|g\|_{\infty}$, 于是 $|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| < \varepsilon$, 与 x 无关, 一致连续。



2. (15 分) 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上绝对连续函数。求证:

- f 把零测集映为零测集;
- f 把可测集映为可测集。

证明: 1. 绝对连续定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对互不相交区间 $\{(a_i, b_i)\}$, $\sum |b_i - a_i| < \delta \implies \sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ 。设 N 零测, $\forall \varepsilon > 0$, 取可数开区间覆盖 N , 总长度 $< \delta$ 。则 $f(N)$ 可以被区间 $\{f((a_i, b_i))\}$ 覆盖, 总外测度 $\leq \sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ 。 ε 任意, $m^*(f(N)) = 0$, $f(N)$ 零测。

2. 任意可测集 E , 写成 $E = F \cup N$, F 是 F_σ 集, N 零测。 $f(F)$ 是 F_σ (连续映紧为紧, 可数并), $f(N)$ 零测, 故 $f(E) = f(F) \cup f(N)$ 可测。

3. (15 分) 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ 是正外测度集合。求证: $\exists h \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

证明: 用 Fubini 定理。考虑特征函数卷积:

$$\chi_{E_1} * \chi_{E_2}(h) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{E_1}(x) \chi_{E_2}(x - h) dx = m(E_1 \cap (E_2 + h)).$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\chi_{E_1} * \chi_{E_2})(h) dh = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{E_1} \int \chi_{E_2}(x - h) dh dx = m(E_1) m(E_2) > 0.$$

积分大于 0, 故被积函数不能几乎处处为 0, 必存在 h 使得 $m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0$ 。

复分析 (40 分)

1. (10 分) D 是 $\mathbb{C}$ 上边界光滑区域, f 在 $\overline{D}$ 全纯。证明:

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z) - \bar{z}| \geq \frac{2 \text{Area}(D)}{\text{Length}(\partial D)}.$$

证明: 复格林公式, $\text{Area}(D) = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} \bar{z} dz$. f 全纯, $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ 。

$$\int_{\partial D} (f(z) - \bar{z}) dz = - \int_{\partial D} \bar{z} dz = -2i \text{Area}(D).$$

取模:

$$2 \text{Area}(D) = \left| \int_{\partial D} (f(z) - \bar{z}) dz \right| \leq \sup_{\partial D} |f(z) - \bar{z}| \cdot \text{Length}(\partial D).$$

移项即

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z) - \bar{z}| \geq \frac{2 \text{Area}(D)}{\text{Length}(\partial D)}.$$

2. (15 分) 设 $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, $\mathbb{D}$ 单位圆盘。证明 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上单射, 并求值域。

解: 分式变换, 令 $w = \frac{z}{(z-1)^2}$ 。解方程 $w = \frac{z}{(z-1)^2}$, $w(z-1)^2 - z = 0$, $wz^2 - (2w+1)z + w = 0$ 。两根 z_1, z_2 , 韦达: $z_1 z_2 = 1$ 。若 $|z_1| < 1$, 则 $|z_2| = \frac{1}{|z_1|} > 1$ 。单位圆盘内至多一个根, 故 f 在 $\mathbb{D}$ 单射。

求值域: $z \in \mathbb{D}$, $w = \frac{z}{(z-1)^2}$ 。这是 Koebe 函数, 值域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ 。

3. (15 分) 整函数 $f(z)$ 满足

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^{2029}} dA(z) < +\infty.$$

证明 $f(z)$ 是次数不超过 2026 的多项式。



证明：整函数，取圆盘 $B(0, R)$ ，柯西积分，对 $k \geq 0$ ，导数估计：

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz.$$

面积平均：

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \frac{(k+1)!}{\pi R^{k+2}} \iint_{|z| \leq R} \frac{f(z)}{z^k} dA(z). \\ |f^{(k)}(0)| &\leq \frac{(k+1)!}{\pi R^{k+2}} \iint_{|z| \leq R} |f(z)| dA(z) \leq \frac{(k+1)!}{\pi R^{k+2}} \cdot C \cdot R^{2029}. \\ |f^{(k)}(0)| &\leq C' \cdot \frac{(k+1)! R^{2029}}{R^{k+2}} = C'(k+1)! R^{2027-k}. \end{aligned}$$

若 $k > 2026$ ， $2027 - k < 0$ ，令 $R \rightarrow +\infty$ ，得到 $f^{(k)}(0) = 0$ 。于是 $k \geq 2027$ 阶导数全为 0， $f(z)$ 是次数至多 2026 多项式。

近世代数 (40 分)

1. (10 分) 分类 360 阶有限 Abel 群。 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ 。初等因子 (素幂部分)： 2^3 : 8; $4 \oplus 2$; $2 \oplus 2 \oplus 2$. 3^2 : 9; $3 \oplus 3$. 5^1 : 5.

全部初等因子型： 1. $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$ 2. $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ 3. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$ 4. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ 5. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5$ 6. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$.

不变因子 (从大到小)： 1. 360 2. $120 \oplus 3$ 3. $180 \oplus 2$ 4. $60 \oplus 6$ 5. $90 \oplus 2 \oplus 2$ 6. $30 \oplus 6 \oplus 2$.

2. (10 分) u 是 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的根。

- 证明 $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$;
- 将 $(1+u)^{-1}$ 表示为 $\{1, u, u^2\}$ 的 $\mathbb{Q}$ -线性组合。

证明：由 Eisenstein 判别法，做替换 $x = t + 2$ 或者模 p 判别。 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, $f(1) = 1 - 6 + 9 + 3 = 7 > 0$, $f(3) = 27 - 54 + 27 + 3 = 3 > 0$, $f(0) = 3 > 0$, $f(4) = 64 - 96 + 36 + 3 = 7 > 0$, $f(-1) = -1 - 6 - 9 + 3 = -13 < 0$ 。仅有一个实根，无有理根，三次不可约，故 $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$ 。

求逆： $(1+u)(au^2 + bu + c) = 1$ 。 $u^3 = 6u^2 - 9u - 3$ 。 $(u+1)(au^2 + bu + c) = au^3 + (a+b)u^2 + (b+c)u + c = a(6u^2 - 9u - 3) + (a+b)u^2 + (b+c)u + c = (7a+b)u^2 + (-8a+b+c)u + (-3a+c) = 1$ 。方程组

$$\begin{cases} 7a + b = 0, \\ -8a + b + c = 0, \\ -3a + c = 1. \end{cases}$$

解得： $a = 1/11$, $b = -7/11$, $c = 14/11$ 。

$$(1+u)^{-1} = \frac{1}{11}u^2 - \frac{7}{11}u + \frac{14}{11}.$$

3. (10 分) R 含么交换环， P 素理想。 $I_1, \dots, I_n$ 理想， $\bigcap_{i=1}^n I_i = P$ 。证明：存在 i , $I_i = P$ 。

证明： $P \subset I_i$ 对每个 i 。若对全部 i , $I_i \supsetneq P$ ，则存在 $a_i \in I_i$, $a_i \notin P$ 。乘积 $a_1 a_2 \cdots a_n \in \bigcap I_i = P$ 。 P 素理想，推出某个 $a_i \in P$ ，矛盾。故必有某个 $I_i = P$ 。

4. (10 分) $C(G)$ 是 G 的中心。若 $G/C(G)$ 循环群，则证明 $G = C(G)$ ，即 G 交换。

证明：标准结论。设 $G/C(G) = \langle \bar{g} \rangle$ 。 $\forall x, y \in G$ ，可以写成 $x = g^a z_1$, $y = g^b z_2$, $z_1, z_2 \in C(G)$ 。

$$xy = g^a z_1 g^b z_2 = g^a g^b z_1 z_2, \quad yx = g^b z_2 g^a z_1 = g^b g^a z_2 z_1.$$

$g^a g^b = g^b g^a$, z_1, z_2 与全体交换，故 $xy = yx$, G 交换， $G = C(G)$ 。



微分几何 (40 分)

1. (15 分) $\mathbf{r}(s)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 弧长参数光滑曲线, 曲率 $0 \leq \kappa(s) \leq \kappa_0$, Frenet 标架 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 。取 $0 \leq \rho \leq 1/\kappa_0$, 管曲面:

$$\mathbf{r}(s, v) = \mathbf{r}(s) + \rho(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}), \quad s \in I, v \in [0, 2\pi].$$

- 若原曲线长度 ℓ , 求管曲面面积;
- 证明 $\mathbf{r}_s$ 为主方向, 求主曲率; 证明是 Weingarten 曲面, 即不全为零实数 a, b, c , $aH + bK = c$ 。

解: (1) 管曲面第一基本形式, 管面积公式: $A = 2\pi\rho \cdot \ell$ 。

(2) 求偏导:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{t} + \rho(-\kappa \cos v \mathbf{t} + (-\tau \cos v - \tau \sin v) \mathbf{n} + \dots).$$

Frenet 公式 $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$.

$$\partial_s(\cos v \mathbf{n} + \sin v \mathbf{b}) = \cos v(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) + \sin v(-\tau \mathbf{n}) = -\kappa \cos v \mathbf{t} - \tau \sin v \mathbf{n} + \tau \cos v \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{t} + \rho(-\kappa \cos v \mathbf{t} - \tau \sin v \mathbf{n} + \tau \cos v \mathbf{b}) = (1 - \rho\kappa \cos v) \mathbf{t} - \rho\tau \sin v \mathbf{n} + \rho\tau \cos v \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{r}_v = \rho(-\sin v \mathbf{n} + \cos v \mathbf{b}).$$

$\mathbf{r}_v$ 是圆周切向; $\mathbf{r}_s$ 是沿轴线方向。管曲面两个主曲率: $k_1 = \frac{-\kappa(s) \cos v}{1 - \rho\kappa(s) \cos v}$, $k_2 = \frac{-1}{\rho}$ 。一个主曲率恒等于常数 $-1/\rho$ 。平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, 高斯曲率 $K = k_1 k_2$ 。消去 k_1 , $2H + \rho K = -\frac{1}{\rho}$ 。即 $2\rho H + \rho^2 K = -1$, $a = 2\rho, b = \rho^2, c = -1$ 不全为零, 满足 Weingarten 条件。

2. (10 分) 单位球面 S^2 参数

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

- 取 $u = \ln \tan \frac{\theta}{2}$, $v = \varphi$, 给出新参数 $\mathbf{r}(u, v)$, 证明局部共形于 $\mathbb{R}^2$;
- 斜航线: 与经线交角恒为常数。三条斜航线构成球面三角形, 求内角和。

解: (1) $u = \ln \tan \frac{\theta}{2}$, $du = \frac{1}{\sin \theta} d\theta$, $d\theta = \sin \theta du$ 。球面第一基本形式:

$$I = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2 = \sin^2 \theta (du^2 + dv^2).$$

$I = \lambda(u, v)^2 (du^2 + dv^2)$, 是共形度量, 局部共形等价平面。

(2) 球面三角形 Gauss-Bonnet: 内角和 = π + 球面面积。斜航线在球面上, 投影到平面是直线; 球面三角形内角和大于 π 。

3. (15 分) 简单光滑闭曲线 $\mathbf{r}(s)$, 主法向量 $\mathbf{n}(s)$ 在单位球面画出的曲线为主法线标。

- 求主法线标的测地曲率 k_g ;
- 用 Gauss-Bonnet 证明: 主法线标把球面分成面积相等两半。

解: 球面曲线 $\mathbf{n}(s)$, 球面 Gauss 曲率 $K = 1$ 。Frenet: $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$ 。 $\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$ 。记 σ 为主法线标的弧长参数。

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}).$$

球面曲线测地曲率公式。主法线标是球面闭曲线, $\oint k_g d\sigma = 0$, Gauss-Bonnet 给出两边包围面积相等, 各为 2π 。



南开大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙



南开大学 夏令营试题

1. 什么是假设检验?

参考答案: 假设检验, 又称统计假设检验, 是用来判断样本与样本、样本与总体的差异是由抽样误差引起还是本质差别造成的统计推断方法。显著性检验是假设检验中最常用的一种方法, 也是一种最基本的统计推断形式, 其基本原理是先对总体的特征做出某种假设, 然后通过抽样研究的统计推理, 对此假设应该被拒绝还是接受做出推断。

2. 数学分析中最重要的定理是什么?

参考答案: 这种面试题重要的不是具体的“定理”, 而是看你怎么解释它的重要性。

比如, 这个“微积分基本定理”, 你可以这样说它的重要性,

一个重要的定理往往体现它能不能勾连不同的概念, 是不是能在不同的定理间架起桥梁。

这个它勾连了微分和积分, 这两个微积分最基本的概念。

微积分基本定理有多种推广形式, 而且每一种推广都影响深远, 比如把右侧的黎曼积分换成勒贝格积分, 这个就会和绝对连续函数产生关系。比如它推广到多维后是格林公式, 是高斯公式, 更是斯托克斯公式。

3. 请解释什么是有限覆盖定理?

参考答案: 有限覆盖定理: 设 H 是闭区间 $[a, b]$ 的一个 (无限) 开覆盖, 则必可以从 H 中选择有限个开区间来覆盖 $[a, b]$ 。

有限覆盖定理是一个有用而且重要的定理。它是数学分析处理问题的一种重要方法, 在数学各领域中都有广泛的应用。有限覆盖定理的作用是从覆盖闭区间的无限个开区间中能选出有限个开区间也覆盖这个闭区间。由“无限转化为有限”是质的变化, 它对证明函数的某些性质提供了新的数学方法。



中国科学院数学与系统科学研究院夏令营 试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙



中国科学院数学与系统科学研究院

2018 年夏令营招生考试试题

注: 本试卷满分 100 分, 考试时间 120 分钟

1. (15 分) 设 Ω_n 是含有 n 个元素的集合, $\{A_1, \dots, A_r\}$ 称为 Ω_n 的一个覆盖, 如果 $\bigcup_{i=1}^r A_i = \Omega_n$, $A_i \subset \Omega_n$ 非空, $A_i \neq A_j$, $r = 1, 2, \dots$ 。记 C_n 为 Ω_n 的不同覆盖的个数。例如 $C_1 = 1$, $C_2 = 5$, 求 C_3 。

解答: 集合覆盖计数: 每个非空子集族, 其并为全集, 子集互不相同。 $\Omega_3 = \{a, b, c\}$, 全体非空子集共 $2^3 - 1 = 7$ 个。集合划分要求元素分块互不相交; 覆盖允许多块重叠。(OEIS A003465)

$$C_3 = 109.$$

2. (10 分) 通过研究极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ 证明 e 是无理数。

证明:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \quad n!e = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = N_n + \delta_n,$$

N_n 为整数,

$$\delta_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$\frac{1}{n+1} < \delta_n < \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{n}.$$

$$2\pi en! = 2\pi N_n + 2\pi \delta_n, \quad \sin(2\pi en!) = \sin(2\pi \delta_n).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot 2\pi \delta_n = 2\pi.$$

反证: 若 $e = \frac{p}{q}$ 为有理数, 取 $n \geq q$, 则 $n!e$ 为整数, $\delta_n = 0$, $\sin(2\pi en!) = 0$, 极限为 0, 矛盾。故 e 无理。

3. (15 分) 设 P 为区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 到 $[0, 1]$ 的单调递增连续可微函数 $p(\theta)$ 全体构成的集合, 且 $p(0) = 0$, $p(\frac{\pi}{2}) = 1$ 。定义

$$I(p(\theta)) = \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{p(\theta)} \right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} \sqrt{1-p(\theta)} \right)^2.$$

- (1) 求解极值问题 $\inf_{p(\cdot) \in P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(p(\theta)) d\theta$ 。

解答: 令 $u(\theta) = \sqrt{p(\theta)}$, 则 $\sqrt{1-p} = \sqrt{1-u^2}$,

$$I = u'^2 + \left(\frac{-uu'}{\sqrt{1-u^2}} \right)^2 = \frac{u'^2}{1-u^2}.$$

边界条件: $\theta = 0, u = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}, u = 1$ 。

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{u'^2}{1-u^2} d\theta.$$

欧拉 - 拉格朗日方程: $F = \frac{u'^2}{1-u^2}$,

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0.$$

代入计算得解 $u = \sin \theta$, 即 $p(\theta) = \sin^2 \theta$ 。

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin \theta \cos \theta)^2 / 4}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

下确界 $\frac{\pi}{4}$ 。



(1) 若 $I(p(\theta))$ 与 θ 无关, 求 $p(\theta)$.

解答: $I = C$ 常数, $\frac{u'^2}{1-u^2} = C, \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{C} d\theta$. $\arcsin u = \sqrt{C}\theta + D$, 边界 $u(0) = 0 \Rightarrow D = 0$;
 $u(\pi/2) = 1 \Rightarrow \sqrt{C} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 1$. $u = \sin \theta$, 得 $p(\theta) = \sin^2 \theta$.

4. (15 分) 请问以下函数是否是超越函数 (说明理由)? [注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 $a_{ij}, (i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n)$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$.]

(1) 多项式.

解答: 多项式是代数函数, 不是超越函数. 设 $f(x)$ 为 d 次多项式, 则 $f(x) - P(x) = 0$, 取 $m = d, n = 1$, 存在非零系数满足代数方程, 故为代数函数.

(1) 三角函数 $\sin x$.

解答: $\sin x$ 是超越函数. 反证: 若存在非零二元多项式 $Q(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$, 使得 $Q(x, \sin x) \equiv 0$. $\sin x$ 有无穷多零点 $x = k\pi, Q(k\pi, 0) = 0$, 多项式 $Q(x, 0)$ 有无穷多根, 故 $Q(x, 0) \equiv 0$, $Q(x, y) = yQ_1(x, y)$. 得 $Q_1(x, \sin x) \equiv 0$, 反复降次, 最后得到矛盾, 故无这样非零多项式, $\sin x$ 是超越函数.

5. (15 分) 设 $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 均为 $n \times n$ 复矩阵, A^* 表示 A 的共轭转置.

(1) 讨论等式 $AB = AC$ 与 $A^*AB = A^*AC$ 的关系.

解答: 若 $AB = AC$, 左乘 A^* , 必有 $A^*AB = A^*AC$; 反之不成立. $A^*A(B - C) = 0 \Rightarrow (B - C)^*A^*A(B - C) = 0 \Rightarrow A(B - C) = 0$, 即: $A^*AB = A^*AC \iff AB = AC$. (因为 $A^*AX = 0 \iff AX = 0$)

(1) 讨论等式 $A^2B = A$ 与 $B^2A = B$ 的关系.

解答: 二者互不蕴含. 例: 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = A, A^2B = A$ 成立, $B^2A = B$ 成立; 反例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2B = A$, 但 $B^2A \neq B$. 故 $A^2B = A$ 一般推不出 $B^2A = B$; 交换例子可构造反向不成立.

(1) 讨论等式 $A^2B = BA^2$ 与 $AB = BA$ 的关系, 其中 A 为正定矩阵.

解答: A 正定, 可对角化, 特征值全正. 若 $AB = BA$, 显然 $A^2B = BA^2$; 反之, $A^2B = BA^2$ 不能推出 $AB = BA$. A 正定, A^2 也是正定; 与 A^2 可交换的矩阵集合大于与 A 可交换矩阵集合. 举例子: $A = \text{diag}(1, 2), A^2 = \text{diag}(1, 4)$, 取 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2B = BA^2$, 但 $AB \neq BA$.

6. (15 分) 设 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 为任意 $n \times n$ 复矩阵, 满足 $AA^* = A^*A$. 是否一定存在多项式 f 使得 $A^* = f(A)$? 说明理由.

解答: A 正规矩阵, 可酉对角化 $A = U\Lambda U^*, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), A^* = U\bar{\Lambda}U^*$. 存在多项式 f 使 $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ 对所有 i 成立的充要条件: 若 $\lambda_i = \lambda_j$ 则 $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_j$ (自然成立). 反例: 正规矩阵 $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, 特征值 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

$$f(z) = z^3, \quad f(i) = i^3 = -i, \quad f(-i) = (-i)^3 = i.$$

此时 $A^* = A^3$. 关键点: 正规矩阵, 同一特征值 $\lambda, f(\lambda)$ 必须等于 $\bar{\lambda}$. ** 结论: 对复正规矩阵, 一定存在复系数多项式 f , 使得 $A^* = f(A)$. **

7. (15 分) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}$ 为 $n \times n$ 正定矩阵, 定义哈达玛乘积 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$. 判断以下论断的对错, 并给出理由.



(1) $A \circ B$ 为正定矩阵.

解答: 正确. Schur 乘积定理: 两个正定矩阵的哈达玛乘积仍是正定矩阵.

(1) $A \circ A^{-1} \geq I$.

解答: 正确. Oppenheim 不等式的推论, 正定矩阵 $A \circ A^{-1} \succeq I$ 。

(1) $A^{\frac{1}{2}} \circ B^{\frac{1}{2}} \preceq I$, 此处正定矩阵 A, B 对角线上的元素均为 1.

解答: 正确. A, B 对角元为 1, 对任意单位向量 x , 利用哈达玛与平方根性质, Schur 乘积, $A^{1/2} \circ B^{1/2}$ 的对角元都是 1, 并且特征值均不大于 1, $A^{1/2} \circ B^{1/2} \preceq I$ 。



中国科学院数学与系统科学研究院

2019 年夏令营招生考试试题

注：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分) 集合 $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个分划是指一族非空集合 $\{B_i\}$, 满足 $\bigcup B_i = \Omega_n$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ (空集), $j \neq k$, $\{\Omega_n\}$ 也算 Ω_n 的一个分划。记 T_n 为 Ω_n 的分划个数, 例如 $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5, \dots$ 。求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{T_n n!}$ 。

解答: T_n 为 Bell 数, Bell 数指数生成函数:

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} x^n = \exp(e^x - 1), \quad T_0 = 1.$$

题目级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{T_n n!}.$$

注意: $\exp(e^x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$, 本题是取 $\frac{1}{T_n}$, 不是 T_n 。该级数没有初等闭式; Bell 数 T_n 增长极快, 级数整平面收敛。> 补充: 若原题印刷笔误, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!}$, 则结果为 $\exp(e^x - 1) - 1$ 。

2. (5 分) 设 $0 < a_k < \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, $k = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 。刻画数列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 的子序列和 (即 $\sum_{n \in S} a_n$ 的子级数) 构成的集合。

解答: 条件 $0 < a_k < \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, 每一项严格小于后面全部项之和。记 $S = \{\sum_{n \in S} a_n \mid S \subset \mathbb{N}^*\}$ 。由条件可以实现 $[0, 1]$ 中每一个实数: 对任意 $t \in [0, 1]$, 依次抉择是否取 a_k , 总能逼近到 t 。子级数集合 $S = [0, 1]$ 。

3. (10 分) 设 f 为 $[0, 2\pi]$ 上连续可微函数, $f(0) = f(2\pi)$, 且 $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ 。探讨 $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ 与 $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ 的关系, 并解函数方程

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

解答: 傅里叶展开, $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} c_k e^{ikt}$ ($\int f = 0$, 常数项为 0)。

$$\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{k \neq 0} |c_k|^2, \quad \|f'\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2.$$

$$\|f'\|_{L^2}^2 \geq \|f\|_{L^2}^2,$$

等号成立当且仅当 $|k| = 1$ 系数非零。

$$f(t) = Ae^{it} + Be^{-it} = C \cos t + D \sin t, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

关系: $\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt \geq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$; 函数方程全部解: $f(t) = C \cos t + D \sin t$, C, D 为常数。

4. (15 分) 设 $0 < a < b < +\infty$ 为实数, $K_{a,b}$ 为区间 $[a, b]$ 上满足 $\int_a^b f(t) dt = 1$, 且 $af(a) = bf(b)$ 的非负单调递减函数全体。求

$$\sup_{f, g \in K_{a,b}} \int_a^b \max\{f(t), g(t)\} dt.$$



解答:

$$\max\{f, g\} = f + g - \min\{f, g\}, \quad \int_a^b \max\{f, g\} = \int_a^b f + \int_a^b g - \int_a^b \min\{f, g\} = 2 - \int_a^b \min\{f, g\}.$$

最大化 $\int \max\{f, g\}$ 等价最小化 $\int \min\{f, g\}$ 。约束: $f, g \geq 0$, 单调递减, $\int f = \int g = 1$, $af(a) = bf(b)$ 。
分析边界极值构型, 上确界 $2 - \frac{a}{b-a} \ln \frac{b}{a}$ 。

5. (10 分) 设 A 为方阵, $\text{tr}(A)$ 为迹 (A 的对角元之和)。讨论以下两个条件之间的关系:

(1) 存在正整数 k 使得 $A^k = O$ 。

(2) 对任何正整数 k 都有 $\text{tr}(A^k) = 0$ 。

解答: (1) $\Rightarrow$ (2): 若 A 幂零, 则全部特征值为 0, A^k 特征值也全为 0, $\text{tr}(A^k) = 0$ 。

(2) $\nRightarrow$ (1): 复数域上, 若矩阵所有幂次迹为 0, 则全部特征值为 0, 故复数域上 (2) $\Rightarrow$ (1); 实数域例子 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = -I$, $\text{tr}(A^2) = -2 \neq 0$, 该例子不满足条件 (2)。实/复域: 若对全部 $k \geq 1$, $\text{tr}(A^k) = 0$, 则特征多项式全部根为 0, 故矩阵幂零。 ** 复数域: (1) $\iff$ (2); 实数域, 在实矩阵范畴同样等价 (Newton 恒等式, 幂和全为 0 $\Rightarrow$ 特征多项式 x^n)。 **

6. (5 分) 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{2019}$ 。

解答: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 。特征方程

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0,$$

$\lambda = 2$ 二重特征值, Jordan 块:

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 2^m & m \cdot 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}.$$

求得 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

$$A^m = 2^{m-1} \begin{pmatrix} m+2 & m \\ -m & 2-m \end{pmatrix}.$$

代入 $m = 2019$:

$$A^{2019} = 2^{2018} \begin{pmatrix} 2021 & 2019 \\ -2019 & -2017 \end{pmatrix}.$$

7. (10 分) 设 A 为复数域上 n 阶矩阵, 非零列向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 满足 $Ax = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$ 。设 $y \in \mathbb{C}^n$ 。讨论矩阵 A 的特征值与矩阵 $A + xy^\top$ 的特征值之间的关系。

解答: 秩 1 修正 $B = A + xy^\top$ 。已知 $Ax = \lambda x$ 。利用 Sylvester 矩阵行列式定理:

$$\det(\mu I - B) = \det(\mu I - A) \cdot (1 - y^\top (\mu I - A)^{-1} x).$$

λ 是 A 的特征值; - 若 $y^\top x \neq 0$: λ 不再是 B 的特征值, 被扰动; 其余特征值不变, 新增一个特征值 $\lambda + y^\top x$ 。 - 若 $y^\top x = 0$: λ 仍然是 B 的特征值, $Bx = \lambda x$; 其余特征值不变。

简言之: 秩 1 更新 $A + xy^\top$, 至多改变一个特征值; λ 这条特征值是否改变取决于 $y^\top x$ 。



8. (10 分) 设 V, W 都是有限维线性空间, V^* 为 V 的对偶空间, $\mathcal{L}(V^*, W)$ 是从 V^* 到 W 的线性映照全体, $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 是从 $V \times W$ 到复数域 $\mathbb{C}$ 的双线性映照全体。讨论 $\mathcal{L}(V^*, W)$ 与 $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 之间的关系。

解答:

$$\mathcal{L}(V^*, W) \cong V \otimes W, \quad \mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C}) = (V \otimes W)^*.$$

$\mathcal{L}(V^*, W)$ 同构于张量积 $V \otimes W$; $\mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C})$ 是 $V \otimes W$ 的对偶空间。

$$\dim \mathcal{L}(V^*, W) = \dim V \cdot \dim W, \quad \dim \mathcal{B}(V \times W, \mathbb{C}) = \dim V \cdot \dim W.$$

有限维下维数相等, 二者 $**$ 互为对偶空间, 维数相同, 但不同构 (作为空间本身可以建立线性同构, 但构造意义不同) $**$ 。

9. (10 分) 设 n 为正整数, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, 分别求以下级数之和:

$$(1) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2.$$

解答: 组合恒等式:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

$$\text{结果: } n \binom{2n-1}{n-1}.$$

$$(1) \sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k}.$$

解答:

$$\sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

10. (15 分) 设 σ 是域 K 上有限维线性空间 V 上的一个线性变换 (又称线性算子), 证明: 如果 σ 的极小多项式 (又称最小多项式) $\mu_\sigma(t)$ 是不可约的 (又称既约的), 证明: 多项式环 $K[\sigma]$ 是一个域。

证明: $K[\sigma]$ 是 σ 的多项式全体构成的交换环, 同构于 $K[t]/(\mu_\sigma(t))$ 。已知 $\mu_\sigma(t)$ 在域 K 上不可约, 域上多项式环模不可约多项式生成的理想得到域, 即

$$K[\sigma] \cong K[t]/(\mu_\sigma(t))$$

故 $K[\sigma]$ 是域。

- (15 分) 设 σ 是域 K 上有限维线性空间 V 上的一个线性变换 (又称线性算子), 证明: 如果 σ 的极小多项式 (又称最小多项式) $\mu_\sigma(t)$ 是不可约的 (又称既约的), 证明: 多项式环 $K[\sigma]$ 是一个域。

证明: $K[\sigma]$ 是 σ 的多项式全体构成的交换环, 同构于 $K[t]/(\mu_\sigma(t))$ 。已知 $\mu_\sigma(t)$ 在域 K 上不可约, 域上多项式环模不可约多项式生成的理想得到域, 即

$$K[\sigma] \cong K[t]/(\mu_\sigma(t))$$

故 $K[\sigma]$ 是域。



中国科学院数学与系统科学研究院

2023 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (10 分)

(1) 已知 $f'(a)$ 存在, $f(a) \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$.

解答:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(a + h) - \ln f(a)}{h} = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \exp \left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right).$$

(1) 求不定积分 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.解答: 分部积分, 令 $u = \ln x$, $dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$, $v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$.

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

2. (15 分) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且严格单调增加, 求证

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

证明: 等价证明

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \geq 0.$$

或者用切比雪夫积分不等式: 两个增函数乘积积分大于等于积分平均之积。

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx \right) \left(\int_a^b f(x) dx \right) = 0.$$

不等式得证。

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二次连续可微, 并且 $f(a) = f(b) = 0$ 。证明不等式

$$M^2 \leq \frac{(b-a)^3}{2} \int_a^b |f''(x)|^2 dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.证明: 取 $x_0 \in [a, b]$ 满足 $|f(x_0)| = M$ 。由 $f(a) = 0$, 泰勒展开:

$$f(x_0) = \int_a^{x_0} (x_0 - t) f''(t) dt.$$

柯西 - 施瓦茨:

$$M = |f(x_0)| \leq \left(\int_a^{x_0} (x_0 - t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^{x_0} |f''(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$$\int_a^{x_0} (x_0 - t)^2 dt = \frac{(x_0 - a)^3}{3}.$$



同理若靠近右端 $f(x_0) = \int_b^{x_0} (x_0 - t)f''(t)dt$, 得到 $\frac{(b-x_0)^3}{3}$ 。

$$M^2 \leq \max \left\{ \frac{(x_0-a)^3}{3}, \frac{(b-x_0)^3}{3} \right\} \int_a^b |f''|^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{2} \int_a^b |f''(x)|^2 dx.$$

证毕。

4. (10 分) 设 A, B 为 n 阶实方阵, 且 AB 和 BA 均为实对称矩阵。求证: AB 和 BA 相似。

证明: 实对称矩阵一定可对角化。 AB 实对称 $\implies AB = (AB)^T = B^T A^T$; BA 实对称 $\implies BA = (BA)^T = A^T B^T$ 。可对角化矩阵 AB 与 BA 有相同非零特征值; 只要证明二者零特征值的几何重数相等。

$$\dim \ker(AB) = n - \text{rank}(AB), \quad \dim \ker(BA) = n - \text{rank}(BA).$$

又 AB, BA 对称, $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$ 。可对角化, 特征值完全相同, 故 AB 与 BA 相似。

5. (10 分) 设 x, y 都是复数域上 n 阶方阵, 定义 $x^{(0)} = x$, $x^{(1)} = [x, y] = xy - yx$, $x^{(j)} = [x^{(j-1)}, y]$ 。证明:

$$\sum_{i=0}^k y^i x y^{k-i} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j+1} y^{k-j} x^{(j)}.$$

证明: 对 k 数学归纳法。 $k=0$: 左边 $y^0 x y^0 = x$; 右边 $\binom{1}{1} y^0 x^{(0)} = x$, 成立。假设 $k=m$ 成立; 利用 $x^{(j+1)} = [x^{(j)}, y] = x^{(j)}y - yx^{(j)}$, 推 $k=m+1$ 等式成立。归纳完成。

6. (20 分) 定义 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Delta r = \partial_x^2 r + \partial_y^2 r + \partial_z^2 r$ 。

(1) (10 分) 证明如下两个等式成立:

$$\Delta r = \frac{2}{r}, \quad \frac{1}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \nabla r.$$

注: 这里的 $\cdot$ 表示两个向量做内积。

证明:

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \frac{x}{r}, \quad \partial_x^2 r = \frac{r^2 - x^2}{r^3}. \\ \Delta r &= \sum \partial_{xx} r = \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = \frac{2r^2}{r^3} = \frac{2}{r}. \\ \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \\ -\nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla r &= -\left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

两式证毕。

- (1) (10 分) 假设 u 是一个在无穷远处为零的一次连续可微函数, 且使得积分 $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz$ 和 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz$ 存在。证明如下不等式成立

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{r^2} dx dy dz \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx dy dz.$$

注: $|\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla u$ 。

证明: Hardy 不等式 (三维 Hardy):

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx.$$

利用分部积分:

$$\int \frac{u^2}{r^2} = - \int u^2 \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla r = \int 2u \frac{\partial u}{\partial r} dr dS \leq 2 \left(\int \frac{u^2}{r^2} \right)^{1/2} \left(\int \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

平方整理得到 $\int \frac{u^2}{r^2} \leq 4 \int |\partial_r u|^2 \leq 4 \int |\nabla u|^2$ 。证毕。



7. (20 分) 证明 $\cos x$ 是超越函数。[注: 函数 $f(x)$ 为超越函数, 若不存在有限个非零的数 $a_{ij}, (i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n)$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i f^j(x) = 0$ 。]

证明: 反证。假设存在非零二元多项式 $P(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$, 满足 $P(x, \cos x) \equiv 0$ 。 $\cos x$ 有无穷多零点: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。于是 $P(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) = 0$ 对无穷多 k 成立。一元多项式 $P(x, 0)$ 有无穷多根, 故 $P(x, 0) \equiv 0$, 即 $P(x, y) = yP_1(x, y)$ 。于是 $P_1(x, \cos x) \equiv 0$, 重复降次, 最后得到 $P \equiv 0$, 矛盾。故不存在这样非零多项式, $\cos x$ 是超越函数。



中国科学院数学与系统科学研究院

2024 年夏令营招生考试试题

考生须知：本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟

1. (15 分)

(1) 设数列 $a_n > 0$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_n}}{n} \right)^n.$$

解答：

$$\sqrt[n]{a_k} = a_k^{1/n} = e^{\frac{\ln a_k}{n}} = 1 + \frac{\ln a_k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a_k} = n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k + o(1).$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a_k} = 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln a_k + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

取对数：

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln a_k + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sim n \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k.$$

由 $\lim a_n = a$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k \rightarrow \ln a$ 。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a_k}}{n} \right)^n = a.$$

(1) 对 $\alpha \geq 2$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t^\alpha} dt - \sin x}{\sin x - x}.$$

解答：泰勒展开：

$$e^{-t^\alpha} = 1 - t^\alpha + o(t^\alpha), \quad \int_0^x e^{-t^\alpha} dt = x - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

分子：

$$\int_0^x e^{-t^\alpha} dt - \sin x = \left(x - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + o(x^3).$$

- 当 $\alpha = 2$: $\alpha + 1 = 3$,

$$\text{分子} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)} = 1.$$

- 当 $\alpha > 2$: $\alpha + 1 > 3$,

$$\text{分子} = \frac{1}{6} x^3 + o(x^3), \quad \lim = -1.$$

2. (20 分)



(1) 设 n 为正整数, 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta$.

解答: 利用三角恒等式,

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} = 1 + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta + \cdots + 2\cos 2n\theta.$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2k\theta d\theta = 0, \quad k \geq 1.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

(1) 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

解答: 圆心 $(1, 1)$, 半径 $\sqrt{2}$, 直线 $y = x$ 过圆心, 区域为半圆. 作平移 $u = x - 1, v = y - 1$, $u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u$.

$$x + y = (u + 1) + (v + 1) = u + v + 2.$$

$$\iint_D (x+y) dx dy = \iint_{v \geq u, u^2+v^2 \leq 2} (u+v+2) du dv.$$

奇函数在对称半圆上 $\iint u = 0, \iint v = 0$; 半圆面积 $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2 = \pi$.

$$\iint_D (x+y) dx dy = 2\pi.$$

3. (15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导函数, $f(0) = f(1) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) \neq 0$. 证明:

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

证明: 不妨设 $f > 0$ 在 $(0, 1)$. 设 $M = \max_{[0,1]} f(x) = f(x_0), 0 < x_0 < 1$.

$$f(x_0) = \int_0^{x_0} f'(t) dt, \quad 0 = f(0) = f(x_0) - \int_0^{x_0} \int_s^{x_0} f''(u) du ds.$$

$$M \leq \int_0^{x_0} \int_s^{x_0} |f''(u)| du ds = \int_0^{x_0} u |f''(u)| du.$$

同理 $M \leq \int_{x_0}^1 (1-u) |f''(u)| du$.

$$2M \leq \int_0^1 (\max(u, 1-u)) |f''(u)| du.$$

$$2 = \frac{2M}{M} \leq \int_0^1 \max(u, 1-u) \left| \frac{f''}{f} \right| du \leq \max_{0 \leq u \leq 1} \max(u, 1-u) \int_0^1 \left| \frac{f''}{f} \right| dx.$$

$\max(u, 1-u) \leq 1$, 更精细: $\max(x_0, 1-x_0) \leq \frac{1}{2}$ 取等在 $x_0 = \frac{1}{2}$,

$$M \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f''|, \quad \int_0^1 \left| \frac{f''}{f} \right| \geq \frac{1}{M} \int_0^1 |f''| \geq 4.$$

证毕.

4. (10 分) 设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ 为实数域上 n 阶方阵, $(AB)^7 = C, |C| \neq 0$ 且 $[A, C] = O$ 或 $[B, C] = O$, 求 $(BA)^{14}$ 与 C 的关系, 其中 $[X, Y] := XY - YX$.

解答: $C = (AB)^7, C$ 可逆.

$$BA \cdot (BA)^{13} = B(AB)^{13}A.$$

若 $[A, C] = AC = CA$:

$$A(AB)^7 = (AB)^7 A \implies A(AB)^k = (AB)^k A.$$



$$(BA)^{14} = B(AB)^{13}A = BA(AB)^{13} = (BA)^2(AB)^{12} = \cdots = (AB)^{14} = C^2.$$

同理 $[B, C] = O$ 也得到 $(BA)^{14} = C^2$ 。

$$(BA)^{14} = C^2.$$

5. (20 分) 令 x, y, z 表示三维空间中的点。设定义在三维空间中的开区域 D 上的函数 $u(x)$ 二阶连续可导, 且满足调和条件 $\Delta u = 0$ 。对任意的 $x \in D$, 定义如下关于半径 r 的函数

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y).$$

其中, $B(x, r)$ 表示以 x 为球心, r 为半径的球。 $\partial B(x, r)$ 表示这个球的外表面。这里 r 充分小使得 $B(x, r) \subseteq D$ 。

- (1) 证明: $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ 。

证明: 高斯公式, $\Delta u = 0$,

$$\frac{d}{dr} \iint_{\partial B(x, r)} u d\sigma = \iint_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iiint_{B(x, r)} \Delta u dy = 0.$$

故 $\phi'(r) = 0$ 。

- (1) 证明: $u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y)$ 。

证明: $\phi(r)$ 与 r 无关, 令 $r \rightarrow 0$, 由连续性 $\phi(r) \rightarrow u(x)$, 故 $\phi(r) \equiv u(x)$ 。

- (1) 证明: $u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{B(x, r)} u(y) dy$ 。

证明: 对球面均值等式两边关于 r 积分:

$$\begin{aligned} u(x) \cdot 4\pi r^2 &= \iint_{\partial B(x, r)} u d\sigma, \\ \int_0^r u(x) 4\pi t^2 dt &= \iiint_{B(x, r)} u(y) dy, \\ u(x) \cdot \frac{4\pi r^3}{3} &= \iiint_{B(x, r)} u(y) dy \implies u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{B(x, r)} u(y) dy. \end{aligned}$$

6. (20 分) 证明如下两个结论:

- (1) 设 f 是 n 维欧氏空间 V 上的一个正交变换, 证明: f 的不变子空间的正交补也是 f 的不变子空间。

证明: 设 W 是 f -不变子空间: $f(W) \subseteq W$ 。任取 $v \in W^\perp$, $\forall w \in W$,

$$(f(v), w) = (v, f^{-1}(w)).$$

正交变换可逆, $f^{-1}(w) \in W$, 故 $(v, f^{-1}(w)) = 0$, 于是 $(f(v), w) = 0$, 即 $f(v) \in W^\perp$ 。 $W^\perp$ 是不变子空间。

- (1) 令 $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 。若 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, 则有 $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ 。

证明: A 复矩阵, Jordan 标准形 $A = PJP^{-1}$, $e^A = Pe^JP^{-1}$, $\det e^A = \det e^J$ 。上三角矩阵指数 e^J 对角元为 e^{λ_i} , $\det e^J = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr} A}$ 。



中国人民大学夏令营试题汇编

数学学院励志书院数学试验班师生联合党支部 整理人：李怡龙



中国人民大学统计学院
2022 年夏令营招生考试试题（统计学）

1. 计算定积分 $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

解答：分部积分，令 $u = \ln(1+x)$, $dv = x dx$, 则 $du = \frac{1}{1+x} dx$, $v = \frac{1}{2} x^2$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln(1+x) dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 - x + \ln(1+x) \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) - 0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. 设数列 a_n 满足条件 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 的收敛性.

解答：该数列为斐波那契数列。 a_n 严格递增，

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi > 1. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1. \end{aligned}$$

由比值判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛。

3. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有三个不同的特征值，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 A 的列向量且满足 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(1) 证明： $\text{rank}(A) = 2$.

证明：由条件 $\alpha_3 - \alpha_1 - 2\alpha_2 = \mathbf{0}$ ，说明列向量组线性相关，故 $\text{rank}(A) \leq 2$ 。矩阵有三个不同特征值，则对应三个特征向量线性无关；不同特征值的特征向量必线性无关，因此矩阵至少有 2 个线性无关特征向量， $\text{rank}(A) \geq 2$ 。综上 $\text{rank}(A) = 2$ 。

(1) 已知向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3$ ，求解线性方程组 $Ax = \beta$.

解答：

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \implies A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

即 $\xi_0 = (1, 2, -1)^T$ 是齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的一个非零解。

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

得到特解 $\eta^* = (1, 1, -3)^T$ 。因为 $\text{rank}(A) = 2$ ，未知数 3 个，齐次基础解系含 $3 - 2 = 1$ 个向量。通解：

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$



4. 现有两枚硬币, 硬币 A 正面和反面出现的概率均为 $\frac{1}{2}$, 硬币 B 正面和反面出现的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$. 随机选择一枚硬币进行抛掷, 若前三次结果均为正面, 求第四次抛掷出现正面的概率.

解答: 记事件 A : 选硬币 A ; B : 选硬币 B ; C_3 : 前三次均正面; C_4 : 第四次正面. $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

$$P(C_3|A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad P(C_3|B) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

由贝叶斯公式:

$$P(A|C_3) = \frac{P(C_3|A)P(A)}{P(C_3|A)P(A) + P(C_3|B)P(B)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{8}{35},$$

$$P(B|C_3) = 1 - P(A|C_3) = \frac{27}{35}.$$

第四次结果与前三次条件独立,

$$P(C_4|C_3) = P(C_4|A)P(A|C_3) + P(C_4|B)P(B|C_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{35} + \frac{3}{4} \cdot \frac{27}{35} = \frac{113}{140}.$$

5. 有 m 种不同的卡片, 每次抽到第 i 种卡片的概率为 p_i , 且满足 $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. 现有放回地抽取 n 次, 定义随机变量 X 为抽到的不同卡片种类数, 求 $\mathbb{E}(X)$.

解答: 引入示性随机变量

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 种卡片被抽到过,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 种卡片从未被抽到.} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

则 $X = \sum_{i=1}^m I_i$.

$$P(I_i = 0) = (1 - p_i)^n, \quad P(I_i = 1) = 1 - (1 - p_i)^n, \quad \mathbb{E}(I_i) = 1 - (1 - p_i)^n.$$

利用期望线性性:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(I_i) = \sum_{i=1}^m [1 - (1 - p_i)^n].$$

6. 设总体 X 服从均匀分布 $U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$, 令 $X_1, \dots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单样本。

- (1) 证明: 均值 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 均为 θ 的无偏估计。

证明: 总体 $X \sim U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$, $\mathbb{E}(X) = \theta$ 。

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_1) = \mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}(X) = \theta,$$

故 $\hat{\theta}_1$ 无偏。做变换 $Y_i = X_i - \theta$, 则 $Y_i \sim U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。 $Y_{(1)} = X_{(1)} - \theta$, $Y_{(n)} = X_{(n)} - \theta$ 。

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})\right) = \theta + \frac{1}{2}(\mathbb{E}(Y_{(1)}) + \mathbb{E}(Y_{(n)})).$$

$Y_{(1)}$ 与 $-Y_{(n)}$ 同分布, 故 $\mathbb{E}(Y_{(1)}) = -\mathbb{E}(Y_{(n)})$, 得到 $\mathbb{E}(Y_{(1)}) + \mathbb{E}(Y_{(n)}) = 0$ 。

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_2) = \theta + 0 = \theta,$$

$\hat{\theta}_2$ 也是 θ 的无偏估计。



(1) 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的方差, 并说明哪一个更有效。

解答: 总体方差

$$\text{Var}(X) = \frac{[(\theta + \frac{1}{2}) - (\theta - \frac{1}{2})]^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \text{Var}(X) = \frac{1}{12n}.$$

$Y \sim U(-1/2, 1/2)$, 次序统计量 $Y_{(1)}, Y_{(n)}$ 的联合密度:

$$f_{Y_{(1)}, Y_{(n)}}(y_1, y_n) = n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2}, \quad -\frac{1}{2} < y_1 < y_n < \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}_2) &= \text{Var}\left(\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{2}(Y_{(1)} + Y_{(n)})\right) \\ &= \frac{1}{4}[\text{Var}(Y_{(1)}) + \text{Var}(Y_{(n)}) + 2\text{Cov}(Y_{(1)}, Y_{(n)})]. \end{aligned}$$

由对称性 $\text{Var}(Y_{(1)}) = \text{Var}(Y_{(n)})$, 计算得到

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2) - 6n}{12n(n+1)(n+2)} = \frac{(n-1)(n-2)}{12n(n+1)(n+2)} \geq 0, \quad n \geq 1.$$

当 $n > 2$ 时, $\text{Var}(\hat{\theta}_2) < \text{Var}(\hat{\theta}_1)$, $\hat{\theta}_2$ 更有效。



中国人民大学统计学院
2022 年夏令营招生考试试题 (应用统计)

1. 计算积分 $\int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$.

解答: 反复分部积分, 记 $I = \int 4x^2 e^{-2x} dx$

$$\begin{aligned}\int 4x^2 e^{-2x} dx &= -2x^2 e^{-2x} + \int 4x e^{-2x} dx \\ &= -2x^2 e^{-2x} - 2x e^{-2x} + \int 2e^{-2x} dx \\ &= -2x^2 e^{-2x} - 2x e^{-2x} - e^{-2x} + C \\ &= -e^{-2x} (2x^2 + 2x + 1) + C.\end{aligned}$$

$$\int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx = -e^{-2x} (2x^2 + 2x + 1) \Big|_a^{+\infty} = e^{-2a} (2a^2 + 2a + 1).$$

2. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中积分区域 D 由直线 $x = -2$, $y = 2$, $y = 0$ 和半圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ($x < 0$) 共同围成.

解答: 区域: 左侧矩形减去左半圆。矩形区域: $-2 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 2$; 半圆: $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, $x < 0$ 。

$$\iint_D y dx dy = \iint_{\text{矩形}} y dx dy - \iint_{\text{左半圆}} y dx dy.$$

矩形部分:

$$\int_0^2 y dy \int_{-2}^0 dx = 2 \cdot \int_0^2 y dy = 2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 4.$$

半圆极坐标: 令 $y - 1 = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $y = 1 + r \sin \theta$ 。

$$\begin{aligned}\iint_{\text{左半圆}} y dx dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 (1 + r \sin \theta) \cdot r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin \theta \right) d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\iint_D y dx dy = 4 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{14}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & a \end{pmatrix}$ 有一个特征值为 10.

(1) 求参数 a 的值.

解答: 代入 $\lambda = 10$, $|10I - A| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 10 - a \end{vmatrix} = 0 \implies a = 2.$$

(1) 求 A 的全部特征值.

解答: 此时 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\text{tr}(A) = 9$ 。

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 10)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

全部特征值: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.



(1) 求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解答: 分别求各特征值对应的特征向量, 再施密特正交单位化。 $\lambda = 10$: 解 $(10I - A)x = 0$, 得 $\xi_1 = (1, 2, -2)^T$; $\lambda = 1$: 解 $(I - A)x = 0$, 得 $\xi_2 = (2, -1, 0)^T$; $\lambda = -1$: 解 $(-I - A)x = 0$, 得 $\xi_3 = (2, 4, 5)^T$ 。

这三个向量已经两两正交, 单位化:

$$p_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad P^T AP = \text{diag}\{10, 1, -1\}.$$

P 即为所求正交矩阵。

4. 现有两枚硬币, 硬币 A 正面和反面出现的概率均为 $\frac{1}{2}$, 硬币 B 正面和反面出现的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$. 随机选择一枚硬币进行抛掷, 若前三次结果均为正面, 求第四次抛掷出现正面的概率.

解答: 贝叶斯公式。记事件 A : 选硬币 A ; B : 选硬币 B ; C_3 : 前三次都是正面。 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

$$P(C_3|A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad P(C_3|B) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

$$P(A|C_3) = \frac{P(C_3|A)P(A)}{P(C_3|A)P(A) + P(C_3|B)P(B)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{8}{35}.$$

$$P(B|C_3) = 1 - P(A|C_3) = \frac{27}{35}.$$

第四次正面概率:

$$P(\text{第4次正面}|C_3) = P(A|C_3) \cdot \frac{1}{2} + P(B|C_3) \cdot \frac{3}{4} = \frac{8}{35} \cdot \frac{1}{2} + \frac{27}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{113}{140}.$$

5. 有 m 种不同的卡片, 每次抽到第 i 种卡片的概率为 p_i , 且满足 $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ 。现有放回地抽取 n 次, 定义随机变量 X 为抽到的不同卡片种类数, 求 $\mathbb{E}(X)$.

解答: 引入示性变量

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 种卡片被抽到过,} \\ 0, & \text{未被抽到} \end{cases}, \quad X = \sum_{i=1}^m I_i.$$

$$P(I_i = 0) = (1 - p_i)^n, \quad P(I_i = 1) = 1 - (1 - p_i)^n.$$

$$\mathbb{E}(I_i) = 1 - (1 - p_i)^n.$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(I_i) = \sum_{i=1}^m [1 - (1 - p_i)^n].$$

6. 设总体 X 服从均匀分布 $U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$, 令 $X_1, \dots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单样本.

(1) 证明: 均值 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 均为 θ 的无偏估计.

证明: 总体 $X \sim U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right)$, $\mathbb{E}(X) = \theta$ 。

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_1) = \mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \theta,$$

故 $\hat{\theta}_1$ 无偏。



令 $Y_i = X_i - \theta$, 则 $Y_i \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。 $Y_{(1)} = X_{(1)} - \theta$, $Y_{(n)} = X_{(n)} - \theta$ 。 $Y_{(1)}$ 与 $-Y_{(n)}$ 同分布, $\mathbb{E}(Y_{(1)}) = -\mathbb{E}(Y_{(n)})$ 。

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})\right) = \theta + \frac{1}{2}(\mathbb{E}(Y_{(1)}) + \mathbb{E}(Y_{(n)})) = \theta.$$

$\hat{\theta}_2$ 也是无偏估计。

(1) 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的方差, 并说明哪一个更有效.

解答: 总体方差 $\text{Var}(X) = \frac{1}{12}$.

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{12n}.$$

$$\text{Var}\left(\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}\right) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

比较: 对 $n \geq 2$, $\frac{1}{2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{12n}$, $\text{Var}(\hat{\theta}_2) < \text{Var}(\hat{\theta}_1)$, 故 $\hat{\theta}_2$ 更有效。



中国人民大学统计学院
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)

注: 考试时间 120 分钟。

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数。

解答: 取对数, 令

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right).$$

泰勒展开 $e^{kx} = 1 + kx + \frac{1}{2}(kx)^2 + o(x)$,

$$\sum_{k=1}^n e^{kx} = n + \frac{n(n+1)}{2}x + o(x).$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{kx} = 1 + \frac{n+1}{2}x + o(x).$$

利用 $\ln(1+t) \sim t$ ($t \rightarrow 0$):

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{kx} \right) \sim \frac{n+1}{2}x.$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \cdot \frac{n+1}{2}x = \frac{e(n+1)}{2}.$$

$$\text{原极限} = e^L = \exp \left(\frac{e(n+1)}{2} \right).$$

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的和函数。

解答: 令 $t = x^2$, 级数化为 $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)(2n+1)}$, 收敛域 $t \in [0, 1]$, 即 $|x| \leq 1$ 。

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2n+1}, \quad \sqrt{t} S'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1}.$$

求导:

$$(\sqrt{t} S'(t))' = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad 0 < t < 1.$$

积分:

$$\sqrt{t} S'(t) = \int_0^t \frac{1}{1-u} du = -\ln(1-t), \quad S'(t) = -\frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}}.$$

$$S(t) = \int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{\sqrt{u}} du.$$

作换元 $u = v^2$,

$$S(t) = 2 \int_0^{\sqrt{t}} -\ln(1-v^2) dv = 2 \int_0^{\sqrt{t}} (-\ln(1-v) - \ln(1+v)) dv.$$

$$\int -\ln(1-v) dv = (1-v) \ln(1-v) + v, \quad \int -\ln(1+v) dv = (1+v) \ln(1+v) - v.$$

$$S(t) = 2 \left[(1-\sqrt{t}) \ln(1-\sqrt{t}) + (1+\sqrt{t}) \ln(1+\sqrt{t}) \right].$$

代回 $t = x^2$:

$$S(x^2) = 2 \left[(1-|x|) \ln(1-|x|) + (1+|x|) \ln(1+|x|) \right], \quad |x| \leq 1.$$



3. 已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -a & 1 & -a \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量。

解答:

$$\mathbf{A} = (1+a)\mathbf{I} - a\mathbf{1}\mathbf{1}^\top.$$

矩阵 $\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ 的特征值: 3 (对应特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, 1)^\top$), 0 (二重, 正交于 $(1, 1, 1)^\top$)。故 $\mathbf{A}$ 特征值:

$$\lambda_1 = 1 - 2a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 + a.$$

$\lambda_1 = 1 - 2a$: 特征向量 $k_1(1, 1, 1)^\top$, $k_1 \neq 0$; $\lambda_{2,3} = 1 + a$: 所有满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的非零向量, 例如 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -1, 0)^\top$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, -2)^\top$ 。

(1) 当 $a = 0.6$ 时, 判断是否存在随机向量 (X, Y, Z) 使其协方差矩阵恰好为 $\mathbf{A}$ 。

解答: 代入 $a = 0.6$:

$$\lambda_1 = 1 - 2 \times 0.6 = -0.2 < 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1.6 > 0.$$

协方差矩阵必须半正定, 所有特征值 ≥ 0 , 此处出现负特征值, 不存在这样的随机向量。

4. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 结构如下

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ x_{100} & x_{99} & x_{98} & \cdots & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

项目的收益 $Y = |\mathbf{A}|$, 随机变量 X_i ($i = 1, 2, \dots, 100$) 独立同分布于标准正态分布 $N(0, 1)$ 。现需确定储备资金 M 的最小值, 使得项目不破产的概率满足 $\mathbb{P}(Y + M \geq 0) \geq 0.95$, 求满足上述条件的 M 的最小值 (标准正态分布的 0.95 分位数取 1.645)。

解答: 按最后一行展开行列式。该矩阵为下 Hessenberg 矩阵, 递推: 记 D_k 为 k 阶同结构行列式,

$$D_k = x_1 D_{k-1} - x_2 D_{k-2} + x_3 D_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1} x_k.$$

这里 $k = 100$, 每一项都是 X_i 的线性组合, 所以 Y 是独立标准正态变量的线性组合, Y 服从正态分布。观察: $D_1 = x_1$, $D_2 = x_1 - x_2$, $D_3 = x_1 D_2 - x_2 D_1 + x_3$, $\mathbb{E}[X_i] = 0$, 故 $\mathbb{E}(Y) = 0$ 。

$$Y \sim N(0, \sigma_Y^2).$$

条件:

$$\mathbb{P}(Y + M \geq 0) = \mathbb{P}(Y \geq -M) = \Phi\left(\frac{M}{\sigma_Y}\right) \geq 0.95 \implies \frac{M}{\sigma_Y} \geq 1.645 \implies M \geq 1.645\sigma_Y.$$

由递推结构, 可求得 $\text{Var}(D_k) = k$, $\text{Var}(Y) = 100$, $\sigma_Y = 10$ 。

$$M_{\min} = 1.645 \times 10 = \mathbf{16.45}.$$

5. 在一个有 n 个人参加的晚会上, 每个人带了一件礼物, 且假定各人带的礼物都不相同。晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 试求抽中自己礼品的人数 X 的均值和方差。



解答：引入示性变量

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{第} i \text{个人抽到自己礼物} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad X = \sum_{i=1}^n I_i.$$

$$P(I_i = 1) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{E}(I_i) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(I_i) = 1.$$

$$\text{Var}(I_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

当 $i \neq j$,

$$P(I_i = 1, I_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

$$\text{Cov}(I_i, I_j) = \mathbb{E}(I_i I_j) - \mathbb{E}(I_i) \mathbb{E}(I_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(I_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(I_i, I_j) = n \cdot \frac{n-1}{n^2} + 2 \cdot \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2(n-1)} = 1.$$

6. 设某场景中有两种型号的电池，其使用时长分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的指数分布。随机选取电池时，选中型号 1 的概率为 p_1 ，选中型号 2 的概率为 p_2 （满足 $p_1 + p_2 = 1$ ）。已知在时刻 t 电池仍能正常工作，求该电池后续能继续使用至少 s 小时的条件概率。

解答：记事件： A_1 ：选型号 1； A_2 ：选型号 2； T ：电池寿命。指数分布生存函数 $P(T > u | A_i) = e^{-\lambda_i u}$ 。由贝叶斯公式：

$$P(A_1 | T > t) = \frac{p_1 e^{-\lambda_1 t}}{p_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 e^{-\lambda_2 t}}, \quad P(A_2 | T > t) = \frac{p_2 e^{-\lambda_2 t}}{p_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 e^{-\lambda_2 t}}.$$

指数无记忆性 $P(T > t + s | T > t, A_i) = P(T > s | A_i) = e^{-\lambda_i s}$ 。

$$\begin{aligned} P(T > t + s | T > t) &= P(A_1 | T > t) e^{-\lambda_1 s} + P(A_2 | T > t) e^{-\lambda_2 s} \\ &= \frac{p_1 e^{-\lambda_1(t+s)} + p_2 e^{-\lambda_2(t+s)}}{p_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 e^{-\lambda_2 t}}. \end{aligned}$$

7. 设随机变量 X 服从对数正态分布，即其对数变换 $Z = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

(1) 计算均值 $\mathbb{E}(X)$ 。

解答： $X = e^Z$, $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，利用正态矩母函数：

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(e^Z) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

(1) 已知 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是从该对数正态分布中抽取的独立同分布样本，求 μ 和 σ^2 的最大似然估计。

解答：令 $z_i = \ln x_i$ ，则 $z_1, \dots, z_n$ 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本。

$$\hat{\mu}_{\text{MLE}} = \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2.$$

(1) 当 $n = 20$ 时，给定具体样本值

$$\begin{array}{cccccccccc} 52 & 24 & 15 & 67 & 15 & 22 & 63 & 26 & 16 & 32 \\ 7 & 33 & 28 & 14 & 7 & 29 & 10 & 6 & 59 & 30 \end{array}$$

求均值 $\mathbb{E}(X)$ 的最大似然估计。

解答：MLE 具有不变性： $\mathbb{E}(X) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$,

$$\widehat{\mathbb{E}(X)}_{\text{MLE}} = \exp\left(\hat{\mu}_{\text{MLE}} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2\right).$$

对样本取对数，计算 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ ，代入上式即可得到数值结果。



中国人民大学统计与大数据研究院
2023 年夏令营招生考试试题 (应用统计)

1. (1) 证明: $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = 2 \int_a^b f(x) \left(\int_a^x f(t)dt\right) dx.$

证明: 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F'(x) = f(x)$, $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(t)dt$. 右侧:

$$2 \int_a^b f(x)F(x)dx = 2 \int_a^b F(x) dF(x) = F^2(x)\Big|_a^b = F^2(b) - F^2(a) = F^2(b) = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2,$$

等于左侧, 等式得证。

(1) 判断 $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的连续性和一致连续性.

解答: $f(x)$ 是有理函数, 分母 $1+x^2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续。

$$f(x) = x - \frac{x}{1+x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

求导:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$, 导数趋于 1, 函数斜率不会趋于 0, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续。

(1) 判断下列命题的正确性, 并给出证明或反例.

i. 若方阵 A 满足 $A^2 = O$, 则 $A = O$.

解答: 命题错误. 反例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = O$, 但 $A \neq O$.

ii. 若矩阵 A, B, C 满足 $AB = AC$, $A \neq O$, 则 $B = C$.

解答: 命题错误. 反例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = O$, $A \neq O$, $AB = AC = O$, 但 $B \neq C$.

2. 设 $\Phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数和密度函数. 证明下列命题:

(1) $\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0$.

证明: 标准正态密度 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -x\varphi(x),$$

移项即得 $\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0$.

(1) 当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq 1 - \Phi(x) \leq \varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right)$.

证明: 正态尾部不等式 (Mill 比率界)。由分部积分:

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt = \varphi(t) \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \varphi(t) \frac{1}{t^2} dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

再分部积分剩余积分:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \frac{\varphi(x)}{x^3} - 3 \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} dt.$$

$$1 - \Phi(x) = \varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) + 3 \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} dt.$$

余项积分 > 0 , 得到左边不等式:

$$1 - \Phi(x) \geq \varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right).$$



继续再做一次分部积分, 余项积分大于 0, 得到上界:

$$1 - \Phi(x) \leq \varphi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} \right).$$

证毕。

3. f 为正定二次函数 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$, $\mathbf{d}^k$ 为下降方向, $\mathbf{x}^k$ 为当前迭代点.

(1) 试求出精确线搜索步长 $\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k)$.

解答:

$$f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k)^\top \mathbf{A} (\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k) + \mathbf{b}^\top (\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k).$$

对 α 求导并置 0:

$$\frac{df}{d\alpha} = (\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k)^\top \mathbf{A} \mathbf{d}^k + \mathbf{b}^\top \mathbf{d}^k = 0.$$

整理:

$$((\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{A} + \mathbf{b}^\top) \mathbf{d}^k + \alpha (\mathbf{d}^k)^\top \mathbf{A} \mathbf{d}^k = 0.$$

注意梯度 $\nabla f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{A} \mathbf{x}^k + \mathbf{b}$,

$$\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d}^k + \alpha_k (\mathbf{d}^k)^\top \mathbf{A} \mathbf{d}^k = 0,$$

$$\alpha_k = - \frac{\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d}^k}{(\mathbf{d}^k)^\top \mathbf{A} \mathbf{d}^k}.$$

(1) 证明: 最速下降法的步长 $\alpha_k = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|^2}{\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{A} \nabla f(\mathbf{x}^k)}$.

证明: 最速下降方向取 $\mathbf{d}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$, 代入 (1) 结果:

$$\alpha_k = - \frac{\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top (-\nabla f(\mathbf{x}^k))}{(-\nabla f(\mathbf{x}^k))^\top \mathbf{A} (-\nabla f(\mathbf{x}^k))} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \nabla f(\mathbf{x}^k)}{\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{A} \nabla f(\mathbf{x}^k)} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|^2}{\nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{A} \nabla f(\mathbf{x}^k)}.$$

证毕。

4. 设样本 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1, p_1)$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} B(1, p_2)$, 其中 $B(1, p)$ 表示 0-1 二项分布. 定义统计量

$$n_1 = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 1\}, \quad n_0 = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 0\}, \quad m_1 = \sum_{j=1}^m \mathbb{I}\{Y_j = 1\}, \quad m_0 = \sum_{j=1}^m \mathbb{I}\{Y_j = 0\}.$$

(1) 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2),$$

其中 $\sigma^2 > 0$ 和 μ 均为有限数. $g(x)$ 的一阶导函数 $g'(x)$ 在 $x = \mu$ 处连续且非零, 证明:

$$\sqrt{n}[g(X_n) - g(\mu)] \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2).$$

证明: Delta 方法. 泰勒展开:

$$g(X_n) = g(\mu) + g'(\mu)(X_n - \mu) + o_p(|X_n - \mu|).$$

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu)) = g'(\mu) \cdot \sqrt{n}(X_n - \mu) + \sqrt{n} o_p(|X_n - \mu|).$$

由条件 $\sqrt{n}(X_n - \mu) = O_p(1)$, 故余项 $\sqrt{n} o_p(|X_n - \mu|) = o_p(1)$. 依分布收敛性质:

$$g'(\mu) \cdot \sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2),$$

得到要证结论。



(1) 针对以下两个参数, 构造其点估计并给出统计量的极限分布.

$$OR = \ln \left(\frac{p_1}{1-p_1} \right) - \ln \left(\frac{p_2}{1-p_2} \right), \quad RR = \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right).$$

解答: 点估计用样本比例:

$$\hat{p}_1 = \frac{n_1}{n}, \quad \hat{p}_2 = \frac{m_1}{m}.$$

$$\widehat{OR} = \ln \frac{\hat{p}_1}{1-\hat{p}_1} - \ln \frac{\hat{p}_2}{1-\hat{p}_2}, \quad \widehat{RR} = \ln \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}.$$

$$\sqrt{n}(\hat{p}_1 - p_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, p_1(1-p_1)), \quad \sqrt{m}(\hat{p}_2 - p_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, p_2(1-p_2)).$$

设 $n, m \rightarrow \infty$, $\frac{n}{n+m} \rightarrow \lambda \in (0, 1)$ 。对 $g_1(p) = \ln \frac{p}{1-p}$, $g'_1(p) = \frac{1}{p(1-p)}$; 对 $g_2(p) = \ln p$, $g'_2(p) = \frac{1}{p}$ 。

$$\widehat{OR} \stackrel{\text{asympt}}{\sim} N \left(OR, \frac{1}{np_1(1-p_1)} + \frac{1}{mp_2(1-p_2)} \right),$$

$$\widehat{RR} \stackrel{\text{asympt}}{\sim} N \left(RR, \frac{1}{np_1} + \frac{1}{mp_2} \right).$$

(1) 基于 (2) 中结果求 OR 和 RR 的置信水平为 95% 的置信区间.

解答: 95% 正态分位数 $z_{0.975} = 1.96$ 。

$$OR: \quad \widehat{OR} \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{n\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)} + \frac{1}{m\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}},$$

$$RR: \quad \widehat{RR} \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{n\hat{p}_1} + \frac{1}{m\hat{p}_2}}.$$



中国人民大学统计与大数据研究院
2024 年夏令营招生考试试题（统计学）

注：考试时间 120 分钟。

1. (1) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 2025} - \sqrt{x^2 + x + 2024} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

解答：先化简对数项：

$$\ln(e^x + x) = x + \ln(1 + xe^{-x}) \implies \frac{\ln(e^x + x)}{x} = 1 + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

泰勒展开立方根：

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 2025} = x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{1/3} = x + \frac{1}{3} + o(1).$$

泰勒展开平方根：

$$\sqrt{x^2 + x + 2024} = x \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{1/2} = x + \frac{1}{2} + o(1).$$

$$\sqrt{x^2 + x + 2024} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} = x + \frac{1}{2} + o(1).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1}{3} + o(1) \right) - \left(x + \frac{1}{2} + o(1) \right) \right] = -\frac{1}{6}.$$

(1) 计算二重积分 $\iint_{|x|+|y|\leq 2} f(x, y) dx dy$ ，其中函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}.$$

解答：利用区域对称性，计算第一象限部分再乘以 4。

$$I = 4 \left(\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} x^2 dx dy + \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ 1 < x+y \leq 2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \right) = 4(I_1 + I_2).$$

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{12}.$$

极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $x + y = r(\cos \theta + \sin \theta)$ 。

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$I = 4 \left(\frac{1}{12} + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right) = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续，证明：

$$\int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt.$$

证明：记 $F(t) = \int_0^t f(u) du$ ，则 $F'(t) = f(t)$ 。对左侧分部积分：

$$\int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x (x-t) dF(t) = (x-t)F(t)|_0^x + \int_0^x F(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt.$$

等式得证。也可以交换二重积分次序证明。



(1) 证明: 行满秩矩阵具有右消去律, 即若矩阵 A 行满秩且 $AC = C$, 则 $A = I$ 。

证明: 本题条件下 A 是方阵, 行满秩方阵必可逆。

$$AC = C \implies (A - I)C = 0.$$

该等式对矩阵 C 成立, 取 $C = I$, 代入得到 $(A - I)I = 0$, 即 $A - I = 0$, $A = I$ 。

2. 考虑线性混合模型

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \alpha_j \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\alpha^2), \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

其中所有 α_j 与 ε_{ij} 相互独立, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ 。

(1) 给出 $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})^\top$ 的分布。

解答:

$$\mathbf{y}_j = \mu \mathbf{1}_n + \beta \mathbf{x}_j + \mathbf{1}_n \alpha_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j,$$

$$\mathbb{E} \mathbf{y}_j = \mu \mathbf{1}_n + \beta \mathbf{x}_j, \quad \text{协方差矩阵 } \text{Cov}(\mathbf{y}_j) = \sigma_\alpha^2 \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n.$$

$$\mathbf{y}_j \sim N(\mu \mathbf{1}_n + \beta \mathbf{x}_j, \sigma_\alpha^2 \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n).$$

(1) 若 σ_ε^2 已知, 求 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \beta)^\top$ 的最大似然估计。

解答: 记 $\mathbf{V}_j = \sigma_\alpha^2 \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n$, 设计矩阵 $\mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{x}_j \end{pmatrix}$ 。对数似然最大化等价广义最小二乘:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MLE}} = \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{X}_j^\top \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{X}_j^\top \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{y}_j \right).$$

(1) 若 σ_ε^2 未知, 写出给定 $\mathbf{y}_j$ 时 α_j 的条件分布, 并求 $\mathbb{E}(\alpha_j | \mathbf{y}_j)$ 和 $\text{Var}(\alpha_j | \mathbf{y}_j)$ 。

解答: 联合正态, 条件分布为正态:

$$\alpha_j | \mathbf{y}_j \sim N(\mathbb{E}(\alpha_j | \mathbf{y}_j), \text{Var}(\alpha_j | \mathbf{y}_j)).$$

$$\mathbb{E}(\alpha_j | \mathbf{y}_j) = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\alpha^2} \mathbf{1}_n^\top (\mathbf{y}_j - \mu \mathbf{1}_n - \beta \mathbf{x}_j),$$

$$\text{Var}(\alpha_j | \mathbf{y}_j) = \frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\alpha^2}.$$

(1) 若 σ_ε^2 未知, 设计算法估计 β 和 σ_ε^2 的值。

解答: 可使用 EM 算法:

- E 步: 给定当前参数, 计算随机效应 α_j 的条件期望 $\mathbb{E}(\alpha_j | \mathbf{y}_j)$;
- M 步: 把条件期望当作已知观测, 更新固定效应 μ, β 以及方差参数 $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\alpha^2$;
- 循环 E 步 M 步直到参数收敛, 输出 $\hat{\beta}, \hat{\sigma}_\varepsilon^2$ 。

也可以采用 REML 限制极大似然直接数值优化得到估计。

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单样本, 定义统计量

$$Y_k = \frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

另设 $U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \dots \leq U_{(n)}$ 是来自均匀分布 $U(0, 1)$ 总体的次序统计量。

(1) 证明: $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{k}{n}$ 。

证明: 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 。由于样本独立同分布,

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{S_n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_2}{S_n}\right) = \dots = \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{S_n}\right).$$



$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{X_i}{S_n} \right) = \mathbb{E} \left(\frac{S_n}{S_n} \right) = 1 \implies \mathbb{E} \left(\frac{X_i}{S_n} \right) = \frac{1}{n}.$$

$$\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E} \left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{S_n} \right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left(\frac{X_i}{S_n} \right) = \frac{k}{n}.$$

(1) 设总体分布为指数分布 $\text{Exp}(1)$, 判断 $U_{(k)}$ 与 Y_k 是否具有相同的分布。

解答: 二者分布相同。指数样本的部分和比例服从均匀次序统计量的分布。

(1) 设总体分布为指数分布 $\text{Exp}(1)$, 证明: Y_k 与 $\sum_{i=1}^n X_i$ 相互独立。

证明: 令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 做变换 $(X_1, \dots, X_n) \mapsto (Y_1, \dots, Y_{n-1}, S_n)$ 。雅可比行列式 $J = S_n^{n-1}$, 联合密度可以分解为:

$$f(y_1, \dots, y_{n-1}, s) = \underbrace{(n-1)!}_{Y_1, \dots, Y_{n-1} \text{ 的联合密度}} \cdot \underbrace{\frac{s^{n-1} e^{-s}}{\Gamma(n)}}_{S_n \text{ 的 Gamma 密度}}.$$

变量分离, $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$ 与 S_n 独立。 Y_k 是 $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ 的函数, 故 Y_k 与 S_n 独立。

(1) 证明: $n(1 - U_{(n)}) \xrightarrow{L} \text{Exp}(1)$ 。

证明: $U_{(n)}$ 的分布函数: $P(U_{(n)} \leq t) = t^n, 0 < t < 1$ 。令 $Z_n = n(1 - U_{(n)})$,

$$P(Z_n \leq x) = P\left(U_{(n)} \geq 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow 1 - e^{-x}, n \rightarrow \infty, x > 0.$$

极限分布是 $\text{Exp}(1)$, 依分布收敛成立。



中国人民大学统计与大数据研究院
2024 年夏令营招生考试试题（应用统计）

注：考试时间 120 分钟。

1. (1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

解答：转化为定积分定义：

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

原极限 = $\frac{\pi}{4}$.

- (1) 证明：函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在区间 $[-\pi, 0)$ 和 $(0, \pi]$ 均为一致连续，但在 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 上不一致连续。

证明：1. 在 $(0, \pi]$: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 将 f 在 $x=0$ 补充定义为 1, 得到闭区间 $[0, \pi]$ 上连续函数, 闭区间连续必一致连续, 故限制在 $(0, \pi]$ 上一致连续。

2. 在 $[-\pi, 0)$: $|\sin x| = |\sin(-x)|$, $f(x) = \frac{|\sin x|}{x} = -\frac{|\sin(-x)|}{-x}$, 令 $t = -x \in (0, \pi]$, $f(x) = -f(t)$ 。
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, 补充定义后在 $[-\pi, 0]$ 连续, 故 $[-\pi, 0)$ 上一致连续。

3. 在集合 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$: 取序列 $x_n = \frac{1}{n} > 0$, $y_n = -\frac{1}{n} < 0$,

$$|x_n - y_n| = \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad |f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{|\sin \frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} - \frac{|\sin(-\frac{1}{n})|}{-\frac{1}{n}} \right| \rightarrow |1 - (-1)| = 2.$$

两点距离趋于 0, 但函数值差不趋于 0, 故在 $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ 上不一致连续。

2. 设随机变量 X 服从 Pareto 分布, 概率密度函数

$$f(x) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}\{x \geq \alpha\} \quad (\alpha > 0, \beta > 2).$$

- (1) 计算 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\text{Var}(X)$.

解答：

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\alpha}^{+\infty} x \cdot \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} dx = \beta \alpha^\beta \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-\beta} dx = \frac{\beta \alpha}{\beta - 1}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\alpha}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} dx = \beta \alpha^\beta \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-(\beta-1)} dx = \frac{\beta \alpha^2}{\beta - 2}.$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{\beta \alpha^2}{\beta - 2} - \left(\frac{\beta \alpha}{\beta - 1} \right)^2 = \frac{\beta \alpha^2}{(\beta - 1)^2 (\beta - 2)}.$$

- (1) 求随机变量 $Y = 2\beta(\ln X - \ln \alpha)$ 的分布。

解答： $Y = 2\beta \ln \frac{X}{\alpha} \implies X = \alpha \exp\left(\frac{Y}{2\beta}\right)$, $Y \geq 0$. 做变量替换, $x \geq \alpha \iff y \geq 0$, 且

$$\frac{dx}{dy} = \alpha \cdot \exp\left(\frac{y}{2\beta}\right) \cdot \frac{1}{2\beta}.$$

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{\beta \alpha^\beta}{(\alpha e^{y/(2\beta)})^{\beta+1}} \cdot \alpha e^{y/(2\beta)} \cdot \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} e^{-y/2}, \quad y \geq 0.$$

即 $Y \sim \chi^2(2)$ (自由度为 2 的卡方分布, 等价于参数为 $\lambda = \frac{1}{2}$ 的指数分布)。

3. 设独立观测样本满足以下条件：



(a) $X_i^{(1)}$ 和 $X_i^{(0)}$ 分别服从参数为 λ_1, λ_0 的 Poisson 分布 $P(\lambda_1), P(\lambda_0)$.

(b) T_i 服从两点分布 $B(1, p)$, 且与 $X_i^{(1)}, X_i^{(0)}$ 独立。

观测值为 $X_i = T_i X_i^{(1)} + (1 - T_i) X_i^{(0)}$.

(1) 求 λ_0 和 λ_1 的无偏估计量 $\hat{\lambda}_0$ 和 $\hat{\lambda}_1$, 并证明其无偏性。

解答: $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(T_i X_i^{(1)} + (1 - T_i) X_i^{(0)}) = p\lambda_1 + (1 - p)\lambda_0$. 按来源分组: $\mathbb{E}(X_i | T_i = 1) = \lambda_1$, $\mathbb{E}(X_i | T_i = 0) = \lambda_0$. 记 $n_T = \sum_{i=1}^n T_i$, $n - n_T = \sum_{i=1}^n (1 - T_i)$, 取

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{n_T} \sum_{i:T_i=1} X_i, \quad \hat{\lambda}_0 = \frac{1}{n - n_T} \sum_{i:T_i=0} X_i.$$

由条件期望, $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_1 | \{T_i\}) = \lambda_1$, 故 $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_1) = \lambda_1$; 同理 $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_0) = \lambda_0$.

(1) 推导 $\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0$ 和 $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}$ 的渐近分布.

解答: 当 $n \rightarrow \infty$, $n_T/n \xrightarrow{P} p$, $(n - n_T)/n \xrightarrow{P} 1 - p$,

$$\hat{\lambda}_1 \stackrel{\text{asympt}}{\sim} N\left(\lambda_1, \frac{\lambda_1}{np}\right), \quad \hat{\lambda}_0 \stackrel{\text{asympt}}{\sim} N\left(\lambda_0, \frac{\lambda_0}{n(1-p)}\right),$$

由渐近独立性得

$$\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0 \stackrel{\text{asympt}}{\sim} N\left(\lambda_1 - \lambda_0, \frac{\lambda_1}{np} + \frac{\lambda_0}{n(1-p)}\right).$$

对 $g(u, v) = u/v$ 使用 Delta 方法:

$$\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0} \stackrel{\text{asympt}}{\sim} N\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda_1}{p\lambda_0^2} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^3(1-p)}\right)\right).$$

(1) 确定 p 的取值, 使得 $\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0$ 和 $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}$ 的渐近方差最小.

解答: (1) 对 $\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0$, 等价于最小化 $V_1(p) = \frac{\lambda_1}{p} + \frac{\lambda_0}{1-p}$, $p \in (0, 1)$. 令导数为 0:

$$-\frac{\lambda_1}{p^2} + \frac{\lambda_0}{(1-p)^2} = 0 \implies \frac{1-p}{p} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}} \implies p = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{\lambda_1}}.$$

(2) 对比值 $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}$, 渐近方差可写成 $\frac{1}{n}$ 的倍数:

$$V_2(p) = \frac{\lambda_1}{p\lambda_0^2} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^3(1-p)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{1-p}, \quad C_1, C_2 > 0.$$

$$-\frac{C_1}{p^2} + \frac{C_2}{(1-p)^2} = 0 \implies \frac{1-p}{p} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \implies p = \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\lambda_0} + \sqrt{\lambda_1}}.$$

(1) 构造 $\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0$ 和 $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}$ 的置信水平为 95% 的近似置信区间.

解答: 取标准正态分布的分位数 $z_{0.975} = 1.96$:

$$\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_0 \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{np} + \frac{\hat{\lambda}_0}{n(1-p)}}.$$

$$\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0} \pm 1.96 \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\hat{\lambda}_1}{p\hat{\lambda}_0^2} + \frac{\hat{\lambda}_1^2}{\hat{\lambda}_0^3(1-p)} \right)}.$$